Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, D. Pflüger

SS 2008

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 11: Wärmeleitung

Zur Übung am 16.07.2008

1 Finite-Differenzen-Approximation von $-u''$

Betrachten wir zunächst eine Funktion $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, also ein stationäres Problem mit nur einer Raumdimension.
Die Funktion u wird auf einem Gitter der Maschenweite $h = 1/m$, ($m \in \mathbb{N}$) durch den Vektor von $m-1$ Funktionswerten $u_i = u(ih), 1 \leq i < m$ approximiert; da hier kaum Verwechslungsgefahr besteht, nennen wir diesen Vektor auch u.
Wir setzen Dirichlet-Randbedingungen mit Funktionswert 0 voraus: $u(0) = u(1) = 0$.
Die zweite Ableitung $-u''(x)$ wird diskretisiert durch

$$-u''(x)\big|_{x=ih} \approx \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2},\ 1 \leq i < m$$

(wobei die Terme $-u_{i-1}$ für $i = 1$ und $-u_{i+1}$ für $i = m-1$ entfallen), mithin eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$, die zugehörige Koeffizientenmatrix heiße $A \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$.

- Zeigen Sie, dass mit

  $$\eta^k := \left(\sin\left(\frac{ik\pi}{m}\right)\right)_{1\leq i<m} \in \mathbb{R}^{m-1} \text{ und } \lambda_k := 4m^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2m}\right)$$

  die η^k für $1 \leq k < m$ ein vollständiges System von Eigenvektoren von A bilden mit zugehörigen Eigenwerten λ_k.

  - Anmerkung: Entweder überlegen oder rechnen. In zweiterem Fall hilft folgendes: Es ist

    $$\begin{aligned} \sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \\ \sin\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$

    und damit

    $$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma))$$

- Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Verhalten von $x \mapsto \sin(k\pi x)$ unter der Abbildung $u \mapsto -u''$ (Dazu benutzt man zweckmäßigerweise $\sin(x) \doteq x$ für kleine x).

b.w.

2 Euler-Verfahren für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Jetzt nehmen wir die Zeit als unabhängige Variable dazu und lösen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung: gesucht ist ein $u : [0,\infty) \times [0,1]$ mit

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \tag{1}$$

mit *Randwerten* $u(t,0) = u(t,1) = 0$ für alle t und *Anfangswerten* $u(0,x) = u_0(x)$ mit einem geeigneten $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$.

- Vielleicht ist es beruhigend, erst mal ein Beispiel in der Hand zu halten, hier sind gleich viele: für jedes $k \in \mathbb{N}$ löst

  $$v_k(t,x) := e^{-k^2\pi^2 t} \cdot \sin(k\pi x)$$

  die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswerten $u_0(x) := \sin(k\pi x)$.

  Da das Problem linear ist, erfüllen auch beliebige Linearkombinationen von Lösungen wieder die Wärmeleitungsgleichung. Wenn wir nun ein u_0 vorgesetzt bekommen, können wir es als Überlagerung von Sinusschwingungen entwickeln und haben durch Überlagerung der einzelnen v_k das Gesamtproblem gelöst.

  Und noch besser: wir können mit dieser Technik auch das diskretisierte Problem analysieren, was im Folgenden passieren wird.

- Zunächst wird bezüglich des Raums diskretisiert: wir bekommen wie oben einen Vektor $u \in \mathbb{R}^{m-1}$, dessen Komponenten $u_i(t) = u(t,ih)$ nun aber zeitabhängig sind, und ersetzen die rechte Seite von (1) durch $-Au$ mit obiger Matrix A.

  Das führt auf ein System von $m-1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

  $$\frac{\partial}{\partial t} u = -Au,$$

  das wir numerisch mit dem Euler-Verfahren lösen können.

  Also wählen wir eine *Zeitschrittweite* $\delta t > 0$, setzen zu Beginn $u^{(0)}$ auf die diskretisierten Anfangswerte $u_0(ih), 1 \leq i < m$ und berechnen in jedem Zeitschritt $j \geq 0$

  $$u^{(j+1)} := u^{(j)} - \delta t \cdot Au^{(j)}, \tag{2}$$

  was der Diskretisierung in Zeitrichtung

  $$\frac{\partial}{\partial t} u \approx \frac{u^{(j+1)} - u^{(j)}}{\delta t}$$

  entspricht.

  Der Schritt von $u^{(j)}$ auf $u^{(j+1)}$ ist eine lineare Abbildung:

  $$u^{(j+1)} = Bu^{(j)}.$$

  Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von B!

- Das numerische Verfahren sollte die Wirklichkeit zumindest soweit abbilden, dass die Lösungen für $t \to \infty$ gegen Null gehen. Für welche δt ist das für beliebige Anfangswerte erfüllt?

  Was hat das für eine Konsequenz, wenn ich die Anzahl m der Intervalle in Raumrichtung verdoppele?

- Und wie sieht das für das implizite Euler-Verfahren aus, bei dem in (2) $Au^{(j)}$ durch $Au^{(j+1)}$ ersetzt wird?