Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, D. Pflüger

SS 2008

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 6: Markov-Ketten

Zur Übung am 11.06.2008

1 Waschmittelverkauf

Die Firma YACA (Yet Another Cleaning Agent) möchte ein neues Reinigungswundermittel (W_1) auf den Markt werfen. Allerdings gibt es bereits drei Waschmittel (W_2, W_3 und W_4), die miteinander konkurrieren. Die Firma YACA bezahlte daher ein überteuertes Beratungsunternehmen um eine Marktanalyse durchzuführen. Untersucht wurde, wie bereitwillig Kunden jeden Monat ihr Waschmittel nach Einführung des neuen Wundermittels W_1 wechseln würden. Das Ergebnis der Analyse ergab das folgende prognostizierte Wechselverhalten:

$$P := \begin{pmatrix} 0.75 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.05 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt $P_{i,j} = p(X(t_k) = i | X(t_{k-1}) = j)$.

- Zeichnen Sie das Zustandsübergangsdiagramm.
- Vor Einführung von W_1 waren die Marktanteile für W_2 40%, für W_3 30% und für W_4 30%. Wie groß sind die Marktanteile nach 1 bzw. 2 Monaten?
- Stellt sich ein stationärer Zustand des Gesamtsystems, d.h. eine stationäre Grenzverteilung ein? Überlegen Sie sich dazu, ob die Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist. Berechnen Sie den stationären Zustand des Gesamtsystems falls dieser existiert. Hinweis: Von Hand wird das etwas länglich. Maple kann das schöner.
- Der Firma YACA vertreibt bereits das Waschmittel W_2 zum Preis von 5 EUR. Das neue Waschmittel W_1 soll für nur 3 EUR verkauft werden. Es werden insgesamt 1000 Waschmittelpackungen pro Monat gekauft. Lohnt sich langfristig die Einführung des neuen Produktes wenn die Produktion einer Packung 1 EUR Kosten verursacht?

2 Postamt, Modifikation von $M/M/1$

An einem Postamt mit nur einem Schalter werden im Mittel $\mu = 8$ Kunden pro Stunde bedient. Eigentlich kommen im Mittel im gleichen Zeitraum $\lambda = 12$ Kunden an. Diese werden allerdings durch lange Warteschlangen abgeschreckt. Steht bereits ein Kunde im Postamt, so stellen sich nur noch halb so viele Kunden an, bei zwei Kunden nur noch $\lambda/3$, bei k Kunden $\lambda/(k+1)$. Betrachtet werde die Anzahl der Kunden im Postamt. Wiederum sind die Ankunfts- und Bedienzeiten jeweils exponentialverteilt.

- Skizzieren Sie das Zustandsübergangsdiagramm.
- Berechnen Sie die mittlere Kundenanzahl und die mittlere Ankunftsrate.

Anmerkung: Betrachten Sie die Reihenentwicklung von e^x.

3 Fuchs und Hase ($M/M/\infty$)

Im Tal Wo-Fuchs-und-Hase-sich-Gute-Nacht-sagen gelte folgende Situation: Ein Fuchs (es gehen auch omnipräsente Medien-Eisbären) sei eine Bedieneinheit und fresse im Mittel einen Hasen (bzw. eine süße Robbe) pro Tag. Füchse teilen sich keine Hasen. Es gebe in unserem Tal immer einen Fuchs mehr als Hasen, die gerade „bedient“ werden, d.h. eine ausreichende Zahl an Füchsen für die Hasen. (Was für Auswirkungen hat das auf die Wartezeit für die Hasen?)
Es kommen im Mittel 16 Hasen pro Tag zum Gute-Nacht-Sagen an. Betrachtet werde die Anzahl der Hasen im Tal. Auch hier sind Ankunfts- und Bedienprozesse exponentialverteilt.

- Skizzieren Sie das Zustandsübergangsdiagramm.
- Berechnen Sie die mittlere Zahl der Hasen im Tal sowie die mittlere Verweilzeit eines Hasen im Tal.