Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, D. Pflüger

SS 2008

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 7: ODE-Baukasten

Zur Übung am 18.06.2008

Zur Analyse gewisser Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind *Richtungsfelder* ein nützliches Werkzeug, man betrachte dazu z.B. im Kapitel 3.1 die Folien 13ff.
Hier gehen wir den umgekehrten Weg: Wir basteln uns zu vorgegebenem Richtungsfeld (bzw. zu den Größen, die dieses Feld im Fall der von uns betrachteten Gleichungen charakterisieren) ein Gleichungssystem.
Wir beschränken uns auf Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (weil deren Theorie so schön überschaubar ist) und zwar auf solche mit zwei Gleichungen (weil die sich so schön zeichnen lassen):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) - b_1,\\ \dot{x}_2(t) &= a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) - b_2,\end{aligned}$$

oder kürzer in Vektor-/Matrixschreibweise:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) - b.$$

Wir setzen ab jetzt voraus, dass die Koeffizientenmatrix A zwei reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ habe; r_1, r_2 seien zugehörige Eigenvektoren.
Weil beide Eigenwerte ungleich Null sind, ist A regulär und somit gibt es genau einen Gleichgewichtspunkt $\hat{x}$ in dem beide Ableitungen verschwinden.
Das System hat dann die allgemeine Lösung:

$$x(t) = \hat{x} + c_1 e^{\lambda_1 t} r_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} r_2$$

mit beliebigen Koeffizienten c_1, c_2.
Für die Vorzeichen der λ_i bleiben drei Fälle:

- $\lambda_1, \lambda_2 > 0,$
- $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ (oder umgekehrt) und
- $\lambda_1, \lambda_2 < 0.$

Dass die Vorzeichen eine entscheidende Rolle spielen, sieht man spätestens jetzt:

- Skizzieren Sie für jeden der drei Fälle ein exemplarisches Richtungsfeld! (Ich würde dazu vorschlagen, $r_1 = (1, 0)^T$ und $r_2 = (0, 1)^T$ zu wählen.)

Schönere Bilder kann man mit folgenden Überlegungen und Maples `DEplot()` bekommen:

- Geben Sie ein Verfahren an, das zu gegebenen Parametern $(r_1, \lambda_1, r_2, \lambda_2)$ eine/die (Wie viele gibt's da eigentlich?) passende Koeffizientenmatrix A aufstellt. Dabei sei $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ vorausgesetzt, weiter seien r_1 und r_2 linear unabhängig.
- Erweitern Sie das Verfahren, so dass man auch noch den gewünschten Gleichgewichtspunkt $\hat{x}$ angeben kann und das Ergebnis ein Differentialgleichungssystem in obiger Form ist.