Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, D. Pflüger SS 2008

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 8: Populationssimulation mit Markov-Ketten

Zur Übung am 25.06.2008

Auf diesem Übungsblatt wollen wir ein einfaches Modell für das Populationswachstum mit Hilfe von stochastischen Prozessen aufstellen.
Hierzu wiederholen wir zunächst das Wachstumsmodell nach Maltus mit einer konstanten Vermehrungs- oder Geburtenrate λ der Individuen der Population. Der Einfachheit halber stirbt in unserer Population nichts.

- Wie groß ist die Population $p(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit, wenn zum Startzeitpunkt $t = 0$ ein einziges Individuum existiert? (Und ja, auch das kann sich in unserem Fall vermehren.) Praktischerweise verwendet man hierzu ein kontinuierliches Modell.

Ein alternativer Ansatz zur Modellierung des Populationwachstums geht von einer diskreten Anzahl an Individuen aus – es gibt keine Bruchteile von Lebewesen (Zellen/Hasen/Eisbären/…). Ist $X(t)$ eine Zufallsvariable, die die Anzahl der Individuen zu einem bestimmen Zeitpunkt beschreibt, so kann $X(t)$ nur ganze Zahlen annehmen. Uns interessiert dann, mit welcher Wahrscheinlichkeit $P_x(t) := P(X(t) = x)$ es zum Zeitpunkt t genau x Individuen gibt. Betrachten wir die Wachstumsrate λ, mit der sich ein Individuum unserer Population vermehrt, so erhalten wir einen Markov-Prozess. (Gibt es hier einen statischen Grenzzustand?)
Wieder gibt es zum Startzeitpunkt $t = 0$ nur ein einziges Lebewesen, d.h.

$$P_x(0) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Wie sehen die Wahrscheinlichkeiten $P_x(t)$ für $x = 1, 2, \ldots$ Individuen aus? Stellen Sie für $P_x(t),\ \ x = 1, 2, \ldots$ je eine geeignete Differentialgleichung auf und lösen Sie sie für die ersten paar x. Sie können gerne Maple als Hilfsmittel verwenden.

- Zeigen Sie, dass für allgemeines x und t gilt:

$$P_x(t) = e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^{x-1}.$$

- Wie groß ist der Erwartungswert $E(X(t))$?