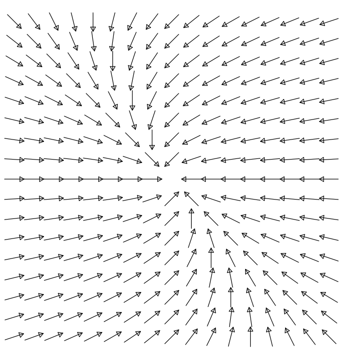
Klausur Modellbildung und Simulation (Prof. Bungartz) SS 2007	Seite 1/7
Name, Vorname:	Matrikelnummer:

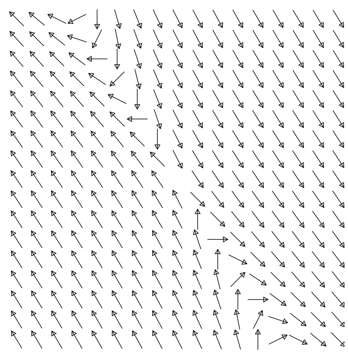
1 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen (3 + 3 = 6 Pkt.)

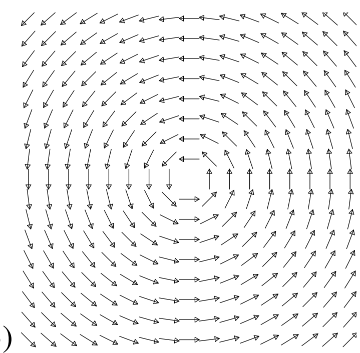
Die Abbildung zeigt die Richtungsfelder von drei Differentialgleichungssystemen der Form

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

(jeweils ein Ausschnitt um den Gleichgewichtspunkt):

1) 

2) 

3) 

a) Was für eine Art von Gleichgewicht (attraktiv, ...) liegt jeweils vor?

b) Die charakteristischen Polynome der Koeffizientenmatrizen lauten (nicht unbedingt in der Reihenfolge der Bilder):

   i) $\lambda^2 - 1$
   ii) $\lambda^2 + 1$
   iii) $\lambda^2 + 3\lambda + 2$

   Ordnen Sie die Richtungsfelder 1), 2) und 3) dem jeweils zugehörigen Polynom i), ii) und iii) zu und begründen Sie Ihre Zuordnung!

2 Auftragsbearbeitung (3 + 3 + 3 + 3 + 2 = 14 Punkte)

Im Rechenzentrum eines großen Unternehmens fallen im Mittel 10 Rechner pro Woche aus. Da das Unternehmen Rechenzeit verkauft, kostet der Ausfall der wöchentlichen Rechenleistung eines Rechners 500 Taler.
Es soll nun eine Arbeitskraft zur Reparatur eingestellt werden. Die Personalabteilung hat die folgenden beiden Optionen:

1. Die Einstellung eines Elektrotechnikers mit einem Wochenlohn von 1200 Talern, der im Mittel 14 Rechner pro Woche reparieren kann.

2. Die Einstellung eines Informatikers mit einem Wochenlohn von 1400 Talern, der im Mittel 15 Rechner pro Woche reparieren kann.

Die Zwischenausfalls- und Reparaturzeiten sind jeweils exponentialverteilt; der stochastische Prozess soll im stationären Zustand betrachtet werden.

a) Skizzieren Sie die Zustandsübergangsdiagramme, wobei als Zustände die Anzahl der defekten Rechner verwendet werden soll.

b) Die Zustandswahrscheinlichkeit p_0 (0 defekte Rechner) sei bekannt. Geben Sie für Elektrotechniker und Informatiker p_1 und p_2 in Abhängigkeit von p_0 an.

c) Berechnen Sie nun p_0 für Eletrotechniker und Informatiker.
(Hinweis: Geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{\infty} a_0 q^i = \frac{a_0}{1-q}$ für $|q| < 1$)

d) Wie viele Rechner sind beim Elektrotechniker, wieviele beim Informatiker durchschnittlich in der Reparatur? Welche Größe wird hierfür benötigt?
(Hinweis: Verwenden Sie den Ableitungstrick.)

e) Zeigen Sie, wer von beiden für die Firma günstiger ist.
(Zwischenergebnis aus d): Elektrotechniker: $2,5$ – Informatiker: $2,0$.)

3 Neuronale Netze (2 + 1 + 7 = 10 Punkte)

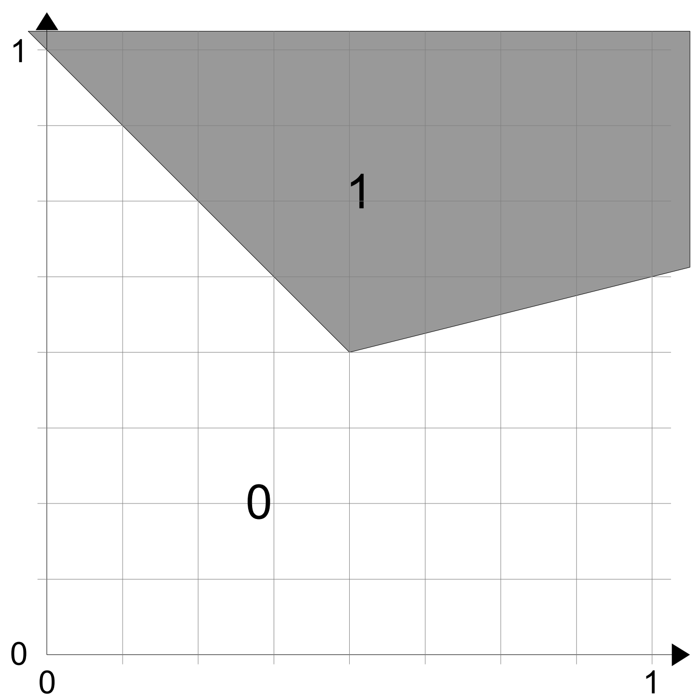
Für die verarbeitende Einheit eines Perzeptrons gelten die folgenden Funktionen:

$$NET_v : \; net_v := \sum_{u \in U_I} W(u,v) o_u$$

$$A_v : \; a_v := \begin{cases} 0, \text{falls } net_v \leq \theta \\ 1, \text{sonst} \end{cases}$$

$$O_v : \; o_v := a_v$$

Im Folgenden sollen alle Eingabewerte reelle Zahlen $\in [0,1]$ sein. Mit Hilfe von Perzeptronen soll folgende Lernaufgabe gelöst werden:



Dabei soll das zu erstellende Neuronale Netz die Ausgabe 1 liefern, wenn ein Muster $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ im grauen Bereich liegt. Die Trenngerade zwischen den beiden Klassen gehöre zur Klasse 0.

a) Begründen Sie, weshalb diese Lernaufgabe nicht mit einem einzelnen Perzeptron lösbar ist.

b) Nun sollen mehrere Perzeptronen hintereinander geschaltet werden, so dass die Ausgabe von Perzeptronen als Eingabe von Perzeptronen dient. Wie viele Neuronen brauchen wir für die Eingabeschicht (Begründung)?

c) Geben Sie ein neuronales Netz aus Perzeptronen an, das die Lernaufgabe löst und erklären Sie seine Funktionsweise. (Hinweis: Für den Fall, dass Sie diese Aufgabe nicht lösen können, vereinfachen Sie die Lernaufgabe und klassifizieren Sie zumindest die vereinfachte Version.)

4 Lineare Rückführungsregelung (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Zunächst betrachten wir ein ungeregeltes lineares System $\dot{x}(t) = A \cdot x(t)$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

mit Parameter $\alpha > 0$.

Berechnen Sie die Eigenwerte von A. Für welche Werte von α ist der Nullpunkt ein attraktiver Gleichgewichtspunkt?

b) Nun soll das System geregelt werden mittels Stellkoeffizienten-Matrix B und Rückführmatrix K, die gewählt werden als

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, K := \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie die Systemmatrix M des geregelten Systems an und bestimmen Sie deren Eigenwerte. Wie ist (in Abhängigkeit von α) der Wert von γ zu wählen, damit der Nullpunkt attraktiver Gleichgewichtspunkt ist?