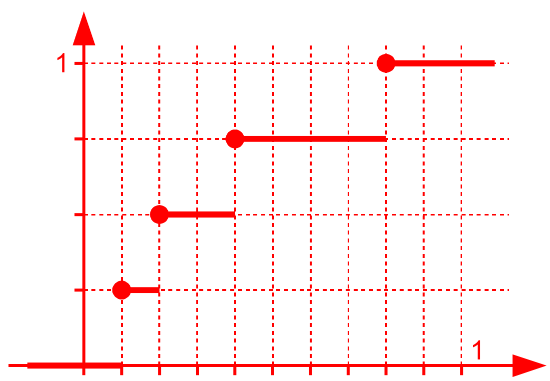
Klausur Modellbildung und Simulation (Prof. Bungartz) SS 2009	Seite 1/6
Name, Vorname:	Matrikelnummer:

1 Zufallsvariablen erzeugen (ca. 3 + 4 + 6 = 13 Punkte)

Gegeben seien n reelle Zahlen $x_i, i = 1, \ldots, n$ aus dem Intervall $(0, 1)$. Die x_i seien paarweise verschieden und aufsteigend geordnet: $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$.
Als Beispieldaten nehmen wir $n = 4$ und die Zahlen $0.1, 0.2, 0.4, 0.8$.
Weiter stehe ein Zufallszahlengenerator $R()$ zur Verfügung, der Realisierungen einer auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen liefert.

a) Skizzieren Sie für die Beispieldaten die *empirische Verteilungsfunktion* $H(x)$, die den Anteil der Datenpunkte angibt, die höchstens so groß sind wie x:

$$H(x) = \frac{1}{n} \left| \{x_i : x_i \leq x\} \right| .$$



b) Geben Sie ein Verfahren an, um Realisierungen einer Zufallsvariablen X zu erzeugen, die als Verteilungsfunktion F_X gerade die empirische Verteilungsfunktion $H(x)$ hat (für allgemeine Datensätze x_i).

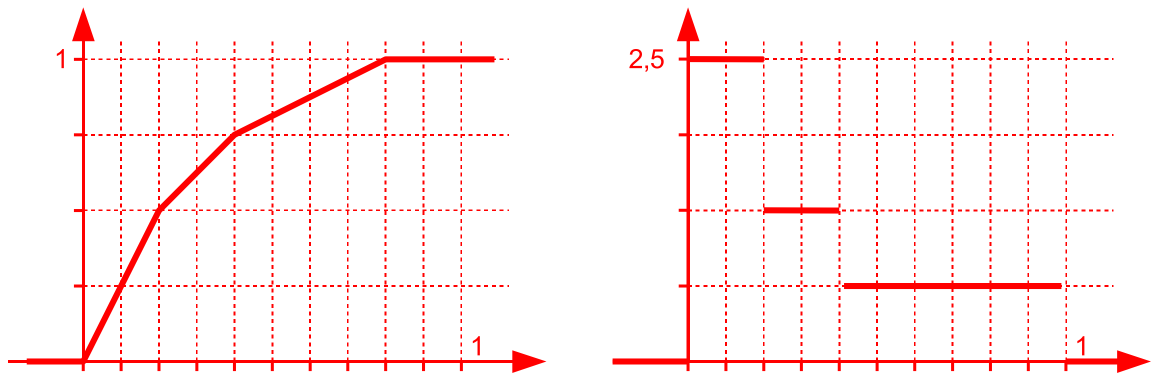
Wir müssen nur eins der x_i auswählen, und zwar jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/n$:

$$X := x_i \text{ mit } i := \lceil R() \cdot n \rceil \;\; (i = 1 \text{ für } R() = 0)$$

c) Nun ist eine Zufallsvariable Y zu erzeugen, deren Verteilungsfunktion F_Y folgende Eigenschaften hat:

- F_Y ist stetig.
- $F_Y(x_i) = H(x_i)$ für alle Datenpunkte $x_i, i = 1, \ldots, n$ und es sei $F_Y(0) = 0$.
- Zwischen je zwei Datenpunkten x_i und x_{i+1} sowie zwischen 0 und x_1 sei F_Y linear.

Skizzieren Sie F_Y und die zugehörige Dichte f_Y für den Beispieldatensatz und geben Sie (für allgemeine Datensätze x_i) ein Verfahren an, um Realisierungen von Y zu erzeugen.



Wir bestimmen wie gehabt

$$i := \lceil R() \cdot n \rceil \;\; (i = 1 \text{ für } R() = 0),$$

und sorgen dafür, dass Y im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ landet (ab jetzt sei $x_0 := 0$).

Innerhalb des Intervalls muss es gleichverteilt sein:

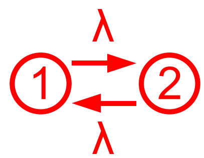
$$Y := x_{i-1} + R() \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Name, Vorname:

2 Markovprozess, Systeme gewöhnlicher DGLn (ca. 2 + 5 + 2 + 6 = 15 Punkte)

Wir betrachten einen diskreten homogenen Markovprozess in kontinuierlicher Zeit mit zwei Zuständen. Die Übergangsrate von Zustand 1 zu Zustand 2 und umgekehrt sei jeweils λ.

a) Zeichnen Sie das Übergangsdiagramm:



b) Nun befinde sich das System zum Zeitpunkt t mit einer Wahrscheinlichkeit $p_1(t)$ $(0 \leq p_1 \leq 1)$ in Zustand 1, also mit Wahrscheinlichkeit $p_2(t) = 1 - p_1(t)$ in Zustand 2.

Geben Sie wie bei Blatt 7 „Populationswachstum mit Markov-Ketten“ mittels der Formel für die Ausfallrate die Wahrscheinlichkeiten $p_1(t+\Delta t)$ und $p_2(t+\Delta t)$ im Grenzwert $\Delta t \to 0$ in Abhängigkeit von $p_1(t)$, $p_2(t)$ und Δt an.

Die Wahrscheinlichkeit für den Wechsel des Zustands innerhalb von Δt ergibt sich aus der Ausfallrate (die hier λ ist):

$$h_T(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(T \leq t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} = \lambda.$$

Somit ist im Grenzwert $\Delta t \to 0$

$$p(1 \to 2) \doteq \lambda p_1 \Delta t, \quad p(2 \to 1) \doteq \lambda p_2 \Delta t,$$

und weiter

$$\begin{aligned} p_1(t+\Delta t) &\doteq p_1(t) - \lambda p_1(t)\Delta t + \lambda p_2(t)\Delta t, \\ p_2(t+\Delta t) &\doteq p_2(t) + \lambda p_1(t)\Delta t - \lambda p_2(t)\Delta t. \end{aligned}$$

c) Geben Sie ein System von Differentialgleichungen an, die die Entwicklung von $p_1(t)$, $p_2(t)$ beschreiben.

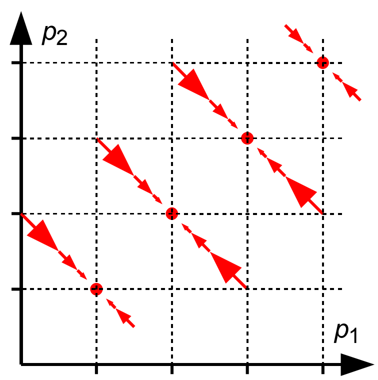
Hinweis: sollten Sie zwischendrin den Faden verloren haben, rechnen Sie einfach ersatzweise weiter mit

$$\begin{pmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Teil b) mit $\Delta t \to 0$ gibt

$$\begin{pmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

d) Bestimmen Sie Eigenvektoren und Eigenwerte der Systemmatrix aus c), alle Gleichgewichtspunkte und skizzieren Sie das Richtungsfeld in untenstehendem Koordinatensystem (ganz grobe Skizze für irgendein $\lambda > 0$). Wie verhalten sich die Lösungen in den Gleichgewichtspunkten gegenüber kleinen Störungen? Was bedeutet das für den betrachteten Markovprozess?



Eigenwerte (am einfachsten durch Ansehen der Matrix):

$$0 \text{ zu } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ und } -2\lambda \text{ zu } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Gleichgewichtspunkte: $\dot{p_1} = \dot{p_2} = 0 \Leftrightarrow p_1 = p_2$. Das System ist indifferent gegenüber Störungen in Richtung $(1,1)^T$, aber Störungen in Richtung $(1,-1)^T$ werden abgebaut.

Markovprozess: hier bewegen wir uns auf einem Abschnitt der Geraden $p_1+p_2 = 1$, also für beliebige Startwerte auf den Punkt $(1/2, 1/2)^T$ zu (exponentieller Abfall der Entfernung zu $(1/2, 1/2)^T$).

3 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen (ca. 3 + 2 = 5 Pkt.)

Um einen numerischen Wert für $e = 2.71828\ldots$ zu bekommen, kann man aus der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = y(t), \quad y(0) = 1 \tag{1}$$

eine Näherung für $y(1)$ bestimmen; da die Lösung der Gleichung $y(t) = e^t$ ist, haben wir damit eine Näherung für e.

a) Geben Sie eine explizite Formel für die Näherung η_N für $y(1)$ in Anhängigkeit von einem $N \in \mathbb{N}$ an, wenn Gleichung (1) numerisch von $t = 0$ bis $t = 1$ mit dem Euler-Verfahren bei einer Schrittweite $\delta t = 1/N$ integriert wird.

Es ist $y_k = (1 + \delta t)y_{k-1} = (1 + \delta t)^k$ (wegen $y_0 = 1$), also

$$\eta_N = y_N = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

b) Wie verhält sich der Diskretisierungsfehler $\eta_N - e$ bei diesem Verfahren in Abhängigkeit von δt? ($O(\ldots)$, nur hinschreiben, nicht herleiten!)

Was bedeutet das für des Verhältnis von Rechenaufwand zu erzielter Genauigkeit?

Euler ist $O(\delta t)$, der Aufwand proportional zu $N = 1/\delta t$, also ist der Fehler $O(\text{Aufwand}^{-1})$.

4 Wahlversprecher (ca. 4 + 3 = 7 Punkte)

Bei einer Wahl nach einem Wahlsystem, das die demokratischen Grundregeln 1–4 erfüllt (d.h. die kollektive Auswahlfunktion ist eine Abbildung $P_A^n \to P_A$, die die Pareto-Bedingung und die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt), treten Kandidaten x, y und z an. Eine Woche vor der Wahl würde das Ergebnis $x\varrho y\varrho z$ lauten, x also vor y gewinnen und z ganz am Schluss landen.
Nun vergisst x aber in einem Interview, Steuererhöhungen kategorisch auszuschließen. Daraufhin setzen alle Wähler x ganz ans Ende ihrer neuen Präferenz ϱ_i': Es gilt nun $y\varrho_i'x$ und $z\varrho_i'x$ für alle Wähler i. Die Präferenzen zwischen y und z hingegen bleiben bei allen Wählern unverändert.

a) Was für Wahlausgänge ϱ' sind nun noch möglich? Begründen Sie ihre Antwort!

Wegen der Einstimmigkeit muss gelten: $y\varrho'x$ und $z\varrho'x$. Es ist also nur noch die Reihung von y und z untereinander zu klären.

Wegen der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (bei allen i gilt $y\varrho_i z \Leftrightarrow y\varrho_i' z$) gilt aber nach wie vor $y\varrho' z$.

Somit gibt es für den neuen Wahlausgang genau eine Möglichkeit:

$$y\varrho' z\varrho' x.$$

b) Kann es sein, dass im ursprünglichen Meinungsbild (ϱ_i bzw. ϱ mit $x\varrho y\varrho z$) x bei keinem Wähler Favorit war, d.h. bei jedem Wähler i galt $y\varrho_i x$ oder $z\varrho_i x$?

Nein: der Satz von Arrow besagt, dass es einen Diktator j geben muss. Dann gilt $y\varrho_j x \Rightarrow y\varrho x$ und $z\varrho_j x \Rightarrow z\varrho x$, in keinem Fall würde sich also das beobachtete Wahlergebnis einstellen.