Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, M. Buchholz, St. Zimmer SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 1: Erdbeeranbau und Banzhaf-Index

Zu den Übungen am 27.4. 2010

1 Erdbeeranbau im Cournot-Nash-Gleichgewicht

Nach: M. Holler, G. Illing, *Einführung in die Spieltheorie*, Springer 2006
Ein Markt werde von zwei Erdbeerfarmern beliefert. Jeder kann für den Markttag eine Menge (in kg) $x_i, i = 1,2$ von Erdbeeren anbieten; diese zu ernten erzeugt Kosten (in einer geeigneten Währung)

$$K_i(x_i) := x_i^2.$$

(Ich verstehe nicht genug vom Erdbeeranbau um erklären zu können, warum das so ist.)
Der Preis richtet sich nach dem Angebot: Für ein Kilo erlöst man

$$p := 120 - 2(x_1 + x_2).$$

- Stellen Sie die Gewinnfunktionen $G_i(x_1,x_2)$ auf, die angeben, wie viel Bauer i bei gegebenen Mengen x_1,x_2 verdient (nach Abzug der Kosten).
- Bestimmen Sie die Menge $r_1(x_2)$ von Erdbeeren, mit denen Bauer 1 bei gegebener Menge x_2 seinen Gewinn maximieren kann, und analog $r_2(x_1)$ für Bauer 2.
- Bestimmen Sie ein Paar $(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ mit
  $$\hat{x}_1 = r_1(\hat{x}_2), \hat{x}_2 = r_2(\hat{x}_1).$$
  Dieses Paar nennt man *Cournot-Nash-Gleichgewicht* — diskutieren Sie die Eigenschaften dieses Gleichgewichts und die Konsequenzen, die sich für unsere beiden Bauern ergeben (die natürlich versuchen, ihre Gewinne zu maximieren).

2 Banzhaf-Index

Wir betrachten eine Entscheidung, in der eine Gruppe von Individuen

$$S = \{S_1, \ldots, S_n\}$$

durch Abstimmung eine ja/nein-Entscheidung trifft. Dazu sind die Beteiligten mit (i.d.R. unterschiedlichen) Stimmgewichten $w_1, \ldots, w_n$ versehen, und es wird ein Quotum q festgelegt; eine Entscheidung gilt als angenommen, wenn die Summe der Stimmgewichte der zustimmenden S_i wenigstens q beträgt. (Vernünftigerweise wird man

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i < q \leq \sum_{i=1}^{n} w_i$$

wählen).

Um die Machtverhältnisse in einem solchen Gremium zu analysieren, darf man sich nicht von den reinen Zahlenverhältnissen der w_i täuschen lassen. Ein besseres Maß ist der *Banzhaf-Index*, der bestimmt, in wie vielen der 2^n möglichen Koalitionen ein Teilnehmer j die Entscheidung kippen kann, d.h., man bestimmt die Anzahl der Teilmengen

$$T \subseteq S \setminus \{S_j\} : \sum_{i \in T} w_i < q \leq \sum_{i \in T \cup \{S_j\}} w_i.$$

Die Anzahl dieser Teilmengen (= Koalitionen) ist der absolute Banzhaf-Index von j, zum Zwecke der besseren Lesbarkeit normiert man meist noch auf den relativen Banzhaf-Index, der durch Division durch die Summe aller absoluten Banzhaf-Indizes entsteht.

Ein Beispiel mit drei Teilnehmern und $q = 10$: Eine Stimmverteilung 10,5,4 führt zu relativen Indizes 1,0,0 (also einem Machtmonopol für die erste Partei), die Verschiebung von einer Stimme zu 9,6,4 führt zu den Indizes $1/3, 1/3, 1/3$ (also sind alle drei gleichmächtig, da sie mit einem beliebigen Koalitionspartner das Quotum erreichen).

Schreiben Sie ein Programm, das (einfach durch Ausprobieren) zu gegebenen Stimmgewichten die Banzhaf-Indizes berechnet.

Als Beispieldaten eignen sich die Stimmverhältnisse im Rat der EWG in den Jahren 1958–72 und 1973–80, wobei das Ergebnis für Luxemburg besonders interessant ist:

	F	D	I	GB	B	NL	DK	IRL	L	Quotum
1958-72	4	4	4	-	2	2	-	-	1	12
1973-80	10	10	10	10	5	5	3	3	2	41

Mehr über die Stimmverhältnisse im Rat der EWG bzw. EU:
http://www.ruhr-uni-bochum.de/mathphys/mathpol.htm