Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, M. Buchholz, St. Zimmer
SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 2: Zwei-Personen-Nullsummenspiel, Wahlen

Zu den Übungen am 4.5.2010

1 Zwei-Personen-Nullsummenspiel

In einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel bei gleichzeitigem Spiel von Gewinnspieler $S1$ und Verlustspieler $S2$ ergebe sich folgende Auszahlungsmatrix mit Parameter $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$:

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von c wählt $S1$ die Aktion A_1, wenn seine Strategie ist, seinen garantierten Gewinn zu maximieren?

b) Für welche Werte von c wählt $S2$ die Aktion B_1, wenn seine Strategie ist, seinen maximalen Verlust zu minimieren?

c) Für welche Werte von c ist $a_{1,1}$ ein Sattelpunkt?

2 Wahlversprecher

Bei einer Wahl nach einem Wahlsystem, das die demokratischen Grundregeln 1–4 erfüllt (d.h. die kollektive Auswahlfunktion ist eine Abbildung $P_A^n \to P_A$, die die Pareto-Bedingung und die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt), treten Kandidaten x, y und z an. Eine Woche vor der Wahl würde das Ergebnis $x \varrho y \varrho z$ lauten, x also vor y gewinnen und z ganz am Schluss landen.
Nun vergisst x aber in einem Interview, Steuererhöhungen kategorisch auszuschließen. Daraufhin setzen alle Wähler x ganz ans Ende ihrer neuen Präferenz ϱ_i': Es gilt nun $y \varrho_i' x$ und $z \varrho_i' x$ für alle Wähler i. Die Präferenzen zwischen y und z hingegen bleiben bei allen Wählern unverändert.

a) Was für Wahlausgänge ϱ' sind nun noch möglich?

b) Kann es sein, dass im ursprünglichen Meinungsbild (ϱ_i bzw. ϱ mit $x \varrho y \varrho z$) x bei keinem Wähler Favorit war, d.h. bei jedem Wähler i galt $y \varrho_i x$ oder $z \varrho_i x$?

3 Nochmal Wahl

Für eine Kandidatenmenge $A = \{x_1, \dots, x_m\}$, $m > 2$ haben n Individuen Präferenzen $\varrho_i \in P_A$ und zwar so, dass es ein $\hat{x} \in A$ gibt mit

$$\forall i = 1, \dots, n : (\forall y \in A, y \neq \hat{x} : \hat{x} \varrho_i y) \vee (\forall y \in A, y \neq \hat{x} : y \varrho_i \hat{x}) \,.$$

Mittels eines Wahlverfahrens, von dem wir nur wissen, dass es die demokratischen Grundregeln 1–4 erfüllt, wird eine Präferenz ϱ bestimmt.

- Beschreiben Sie die Eigenschaft von Kandidat $\hat{x}$ in Worten.
- Zeigen Sie, ohne den Satz von Arrow zu verwenden, dass gilt:

  $$(\forall y \in A, y \neq \hat{x} : \hat{x} \varrho y) \vee (\forall y \in A, y \neq \hat{x} : y \varrho \hat{x}) \,.$$

  (Tipp: Bauen Sie einen Widerspruchsbeweis. Wie sieht die Negation der Aussage aus? Nutzen Sie nun die Freiheiten, die Ihnen Regel 4 gibt, und die Information, die Ihnen Regel 3 über das Wahlergebnis in bestimmten Situationen gibt, um einen Widerspruch herzustellen.)

Dieses Ergebnis ist – wieder in Worte übersetzt – unintuitiv und tatsächlich schon der wesentliche Schritt in einem Beweis des Unmöglichkeitssatzes von Arrow (J. Geanakoplos, 2005).