Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, M. Buchholz, St. Zimmer

SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 2: Zwei-Personen-Nullsummenspiel, Wahlen
Lösungsvorschlag

Zu den Übungen am 4.5.2010

1 Zwei-Personen-Nullsummenspiel

In einem Zwei-Personen-Nullsummenspiel bei gleichzeitigem Spiel von Gewinnspieler $S1$ und Verlustspieler $S2$ ergebe sich folgende Auszahlungsmatrix mit Parameter $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$:

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von c wählt $S1$ die Aktion A_1, wenn seine Strategie ist, seinen garantierten Gewinn zu maximieren?

   Strategie: $\hat{\imath}$ so, dass $\min_j a_{\hat{\imath},j}$ maximal; er wählt A_1, wenn $c > 0$ (dann wird die Zeile 2 mit ihrer 0 riskanter)

b) Für welche Werte von c wählt $S2$ die Aktion B_1, wenn seine Strategie ist, seinen maximalen Verlust zu minimieren?

   Strategie: $\hat{\jmath}$ so, dass $\max_i a_{i,\hat{\jmath}}$ minimal; er wählt B_1 für beliebige c (2 ist auf jeden Fall ein schlimmerer Verlust als 1)

c) Für welche Werte von c ist $a_{1,1}$ ein Sattelpunkt?

   1 ist sowieso immer der größte Wert in seiner Spalte, es ist genau dann der kleinste Wert in seiner Zeile, wenn $c > 1$ ist, also ist $a_{1,1}$ genau dann Sattelpunkt.

2 Wahlversprecher

Bei einer Wahl nach einem Wahlsystem, das die demokratischen Grundregeln 1–4 erfüllt (d.h. die kollektive Auswahlfunktion ist eine Abbildung $P_A^n \to P_A$, die die Pareto-Bedingung und die Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt), treten Kandidaten x, y und z an. Eine Woche vor der Wahl würde das Ergebnis $x\varrho y \varrho z$ lauten, x also vor y gewinnen und z ganz am Schluss landen.
Nun vergisst x aber in einem Interview, Steuererhöhungen kategorisch auszuschließen. Daraufhin setzen alle Wähler x ganz ans Ende ihrer neuen Präferenz ϱ_i': Es gilt nun $y\varrho_i' x$ und $z\varrho_i' x$ für alle Wähler i. Die Präferenzen zwischen y und z hingegen bleiben bei allen Wählern unverändert.

a) Was für Wahlausgänge ϱ' sind nun noch möglich?

   Wegen der Einstimmigkeit muss gelten: $y\varrho' x$ und $z\varrho' x$. Es ist also nur noch die Reihung von y und z untereinander zu klären.

   Wegen der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (bei allen i gilt $y\varrho_i z \Leftrightarrow y\varrho_i' z$) gilt aber nach wie vor $y\varrho' z$.

   Somit gibt es für den neuen Wahlausgang genau eine Möglichkeit:

   $$y\varrho' z \varrho' x.$$

b) Kann es sein, dass im ursprünglichen Meinungsbild (ϱ_i bzw. ϱ mit $x\varrho y\varrho z$) x bei keinem Wähler Favorit war, d.h. bei jedem Wähler i galt $y\varrho_i x$ oder $z\varrho_i x$?

Nein: der Satz von Arrow besagt, dass es einen Diktator j geben muss. Dann gilt $y\varrho_j x \Rightarrow y\varrho x$ und $z\varrho_j x \Rightarrow z\varrho x$, in keinem Fall würde sich also das beobachtete Wahlergebnis einstellen.

3 Nochmal Wahl

Für eine Kandidatenmenge $A = \{x_1, \dots, x_m\}$, $m > 2$ haben n Individuen Präferenzen $\varrho_i \in P_A$ und zwar so, dass es ein $\hat{x} \in A$ gibt mit

$$\forall i = 1, \dots, n : (\forall y \in A, y \neq \hat{x} : \hat{x}\varrho_i y) \vee (\forall y \in A, y \neq \hat{x} : y\varrho_i \hat{x}) \,.$$

Mittels eines Wahlverfahrens, von dem wir nur wissen, dass es die demokratischen Grundregeln 1–4 erfüllt, wird eine Präferenz ϱ bestimmt.

- Beschreiben Sie die Eigenschaft von Kandidat $\hat{x}$ in Worten.

  Der Kandidat polarisiert extrem: jeder Wähler platziert ihn (und zwar ausschließlich ihn, da ϱ_i ja dem $<$ entspricht) entweder ganz an die Spitze oder ganz an den Schluss der Präferenz.

- Zeigen Sie, ohne den Satz von Arrow zu verwenden, dass gilt:

  $$(\forall y \in A, y \neq \hat{x} : \hat{x}\varrho y) \vee (\forall y \in A, y \neq \hat{x} : y\varrho \hat{x}) \,.$$

  (Tipp: Bauen Sie einen Widerspruchsbeweis. Wie sieht die Negation der Aussage aus? Nutzen Sie nun die Freiheiten, die Ihnen Regel 4 gibt, und die Information, die Ihnen Regel 3 über das Wahlergebnis in bestimmten Situationen gibt, um einen Widerspruch herzustellen.)

  Angenommen, es gelte die Negation der Aussage:

  $$\exists y, z \in A \setminus \{\hat{x}\} : y\varrho^* \hat{x} \varrho^* z$$

  (In Worten: in der kollektiven Präferenz gibt es jemanden, der für wenigstens genauso gut gehalten wird wie $\hat{x}$, und jemanden, der für wenigstens genauso schlecht gehalten wird wie $\hat{x}$, so dass $\hat{x}$ nicht alleiniges Extremum an einem der beiden Enden der Skala ist).

  Wegen $m > 2$ können wir o.E. $y \neq z$ annehmen – wir hätten sonst einen dritten Kandidaten übrig, der y oder z ersetzen kann, je nachdem, wie er von ϱ im Verhältnis zu $\hat{x}$ eingeordnet wird.

  Nun ändern alle Individuen ihre Präferenz ϱ_i zu einem $\tilde{\varrho}_i$, indem sie z vor y setzen:

  $$z\tilde{\varrho}_i y,$$

  ohne dass dabei die Rangfolge von $\hat{x}$ bezüglich y oder z geändert wird (das geht, weil $\hat{x}$ ganz an einem Ende steht: $(\hat{x}\varrho_i y \wedge \hat{x}\varrho_i z) \vee (y\varrho_i \hat{x} \wedge z\varrho_i \hat{x})$).

  Wegen Regel 3 (Einstimmigkeit) folgt für die zugehörige kollektive Präferenz $z\tilde{\varrho}y$; andererseits gilt wegen Regel 4 (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen) und der Transitivität von ϱ^* $y\tilde{\varrho}^*\hat{x}\tilde{\varrho}^* z \Rightarrow y\tilde{\varrho}^* z$, was ein Widerspruch ist.

Dieses Ergebnis ist – wieder in Worte übersetzt – unintuitiv und tatsächlich schon der wesentliche Schritt in einem Beweis des Unmöglichkeitssatzes von Arrow (J. Geanakoplos, 2005).