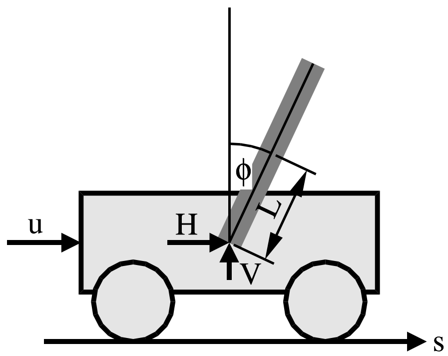
Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, St. Zimmer, M. Buchholz

SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 5: Regelung

Zur Übung am 1.6.2010

Als Beispiel für eine lineare Regelung wollen wir einen Stab durch geschicktes Hin- und Herbewegen aufrecht balancieren (diese Versuchsanordnung wird auch *inverses Pendel* genannt): Er sei so auf einem Wagen angebracht, dass er frei schwingen kann, der Winkel zur Vertikalen soll $\phi(t)$ heißen und dadurch null werden, dass wir eine Kraft $u(t)$ auf den Wagen ausüben, der sich reibungsfrei bewegen soll. Die Position des Wagens nennen wir $s(t)$ (eine skalare Funktion, er bewegt sich ja nur eindimensional), der Wagen habe die Masse M, der Stab die Masse m und die Länge $2L$, die Stabmasse sei gleichmäßig verteilt, so dass der Stab das Trägheitsmoment $\theta = \frac{1}{3}mL^2$ hat.



Zustandsvariablen unserer Regelung sind Weg, Winkel und die ersten Ableitungen davon, damit wir ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung bekommen (obwohl wir uns für Kräfte, also für Beschleunigungen interessieren):

$$x(t) := (s(t), \dot{s}(t), \phi(t), \dot{\phi}(t)).$$

Zunächst bewegen wir uns in Richtung eines Systems der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t),$$

das im Folgenden aufgestellt werden soll. (Wem dies zu viel Physik ist, der findet weiter unten ein Zwischenergebnis für A und B.)
Vorab einige Hinweise zur benötigten Physik:

- Newtonsches Grundgesetz: $F = m \cdot a$.
  Die Summe aller Kräfte an einem Körper ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Körpers. Es bietet sich hier an, dies getrennt für die horizontale und vertikale Richtung zu betrachten.

- Drehimpulssatz: $D = \theta \cdot \ddot{\phi}(t)$:
  Drehmoment ist Trägheitsmoment mal Drehbeschleunigung; beim Stab ist $\theta = \frac{1}{3}mL^2$.

- Drehmoment $D = \sum_i F_i d_i$:
  Betrachtet werden alle i Kräfte, die auf den Stab wirken. F_i ist die Kraftkomponente senkrecht zum Stab, d_i der Abstand des Stabschwerpunkts zum Angriffspunkt der Kraft. Anmerkung: Entgegengesetzte Kraftkomponenten können sich aufheben.

Im Folgenden werden wir annehmen, dass der Stab nur wenig von der senkrechten Lage abweicht (das soll unser Regler ja erreichen). Dann können wir für kleine Winkel ϕ linearisieren: $\sin(\phi) \doteq \phi$, $\cos(\phi) \doteq 1$.

- Auf welcher Bahn bewegt sich bei gegebenem $s(t), \phi(t)$ der Schwerpunkt des Stabs?
- Bestimmen Sie aus der Beziehung zwischen den am Stab angreifenden Kräften (horizontale Komponente H und vertikale Komponente V) und der Beschleunigung des Stabschwerpunkts zwei (Differential-)Gleichungen für unser System.
- Bestimmen Sie als nächstes das am Stabschwerpunkt angreifende Drehmoment und daraus eine dritte Gleichung.
- Eine vierte Gleichung erhalten wir durch Betrachtung der Kräfte, die am Wagen ansetzen.
- Aus diesen vier Gleichungen, die einen Zusammenhang zwischen den Zustandsvariablen, $\ddot{s}$, $\ddot{\phi}$, H, V und u herstellen, bekommen wir durch Elimination von H und V zwei Gleichungen, die wir umformen können in ein System der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - Bu(t).$$

Zwischenergebnis:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3mg}{4M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g(m+M)}{L(4M+m)} & 0 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{m+4M} \\ 0 \\ \frac{3}{L(m+4M)} \end{pmatrix} u(t)$$

Nun sei

$$u(t) := K_s s(t) + K_{sp}\dot{s}(t) + K_p\phi(t) + K_{pp}\dot{\phi}(t)$$

und folglich $\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t)$.
Bestimmen sie für $M = 0{,}981\,\mathrm{kg}$, $m = 0{,}08\,\mathrm{kg}$, $L = 0{,}312\,\mathrm{m}$ die Stabilität dieses Systems

- im ungeregelten Fall: $K_s = K_{sp} = K_p = K_{pp} = 0$
- und mit $K_s = 5,088,\ K_{sp} = 5,258,\ K_p = 35,39,\ K_{pp} = 7,174.$