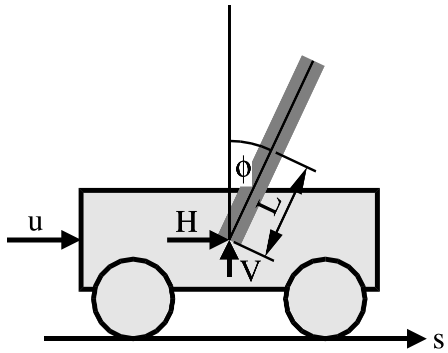
Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, St. Zimmer, M. Buchholz SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 5: Regelung
Lösungsvorschlag

Zur Übung am 1.6.2010

Als Beispiel für eine lineare Regelung wollen wir einen Stab durch geschicktes Hin- und Herbewegen aufrecht balancieren (diese Versuchsanordnung wird auch *inverses Pendel* genannt): Er sei so auf einem Wagen angebracht, dass er frei schwingen kann, der Winkel zur Vertikalen soll $\phi(t)$ heißen und dadurch null werden, dass wir eine Kraft $u(t)$ auf den Wagen ausüben, der sich reibungsfrei bewegen soll. Die Position des Wagens nennen wir $s(t)$ (eine skalare Funktion, er bewegt sich ja nur eindimensional), der Wagen habe die Masse M, der Stab die Masse m und die Länge $2L$, die Stabmasse sei gleichmäßig verteilt, so dass der Stab das Trägheitsmoment $\theta = \frac{1}{3}mL^2$ hat.



Zustandsvariablen unserer Regelung sind Weg, Winkel und die ersten Ableitungen davon, damit wir ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung bekommen (obwohl wir uns für Kräfte, also für Beschleunigungen interessieren):

$$x(t) := (s(t), \dot{s}(t), \phi(t), \dot{\phi}(t)).$$

Zunächst bewegen wir uns in Richtung eines Systems der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t),$$

das im Folgenden aufgestellt werden soll. (Wem dies zu viel Physik ist, der findet weiter unten ein Zwischenergebnis für A und B.)
Vorab einige Hinweise zur benötigten Physik:

- Newtonsches Grundgesetz: $F = m \cdot a$.
  Die Summe aller Kräfte an einem Körper ist gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Körpers. Es bietet sich hier an, dies getrennt für die horizontale und vertikale Richtung zu betrachten.
- Drehimpulssatz: $D = \theta \cdot \ddot{\phi}(t)$:
  Drehmoment ist Trägheitsmoment mal Drehbeschleunigung; beim Stab ist $\theta = \frac{1}{3}mL^2$.
- Drehmoment $D = \sum_i F_i d_i$:
  Betrachtet werden alle i Kräfte, die auf den Stab wirken. F_i ist die Kraftkomponente senkrecht zum Stab, d_i der Abstand des Stabschwerpunkts zum Angriffspunkt der Kraft. Anmerkung: Entgegengesetzte Kraftkomponenten können sich aufheben.

Im Folgenden werden wir annehmen, dass der Stab nur wenig von der senkrechten Lage abweicht (das soll unser Regler ja erreichen). Dann können wir für kleine Winkel ϕ linearisieren: $\sin(\phi) \doteq \phi$, $\cos(\phi) \doteq 1$.

- Auf welcher Bahn bewegt sich bei gegebenem $s(t), \phi(t)$ der Schwerpunkt des Stabs?

  Ortskoordinaten $(x(t), y(t))$ (Jaja, der Zustandsvektor heißt auch x, aber ich hoffe, das wird niemand verwechseln) mit

  $$x = s + L\sin(\phi) \doteq s + L\phi,$$

  $$y = y_0 + L\cos(\phi) \doteq y_0 + L,$$

  wobei y_0 die Höhe des Drehpunkts ist (und im Weiteren keine Rolle spielt…).

- Bestimmen Sie aus der Beziehung zwischen den am Stab angreifenden Kräften (horizontale Komponente H und vertikale Komponente V) und der Beschleunigung des Stabschwerpunkts zwei (Differential-)Gleichungen für unser System.

  Das ist $F = ma$ für jede der beiden Koordinaten.

  Horizontal bewirkt die Kraft, die der Wagen auf den Stab ausübt, eine Beschleunigung:

  $$H = m\ddot{x} \doteq m\ddot{s} + mL\ddot{\phi}. \tag{1}$$

  Vertikal halten sich die Kraft, die der Wagen ausübt, und die Schwerkraft die Waage (es gibt ja in unserer Näherung keine vertikale Bewegung):

  $$V - mg = m\ddot{y} \doteq 0. \tag{2}$$

- Bestimmen Sie als nächstes das am Stabschwerpunkt angreifende Drehmoment und daraus eine dritte Gleichung.

  Angriffspunkt von H und V ist das Stabende im Abstand von L zum Schwerpunkt. Für das Drehmoment brauchen wir davon nur die Komponenten $H_\perp$ und $V_\perp$ senkrecht zum Stab. Das Vorzeichen bekommen wir aus der Festlegung des Koordinatensystems, das hier so sei, dass V in Richtung größerer, H in Richtung kleinerer Winkel drückt:

  $$D = LV_\perp - LH_\perp = LV\sin(\phi) - LH\cos(\phi) \doteq LV\phi - LH.$$

  Mit $D = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\phi}$, (1) und (2) haben wir also

  $$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\phi} = L\left(mg\phi - m\ddot{s} - mL\ddot{\phi}\right)$$

  oder schöner:

  $$mg\phi - \frac{4}{3}mL\ddot{\phi} - m\ddot{s} = 0. \tag{3}$$

- Eine vierte Gleichung erhalten wir durch Betrachtung der Kräfte, die am Wagen ansetzen.

  Hier ist nur die horizontale Komponente interessant, es drückt die Stellkraft $u(t)$ nach rechts und der Stab mit H nach links:

  $$u - H = M\ddot{s},$$

  das gibt mit (1):

  $$u - (M + m)\ddot{s} - mL\ddot{\phi} = 0 \tag{4}$$

- Aus diesen vier Gleichungen, die einen Zusammenhang zwischen den Zustandsvariablen, $\ddot{s}$, $\ddot{\phi}$, H, V und u herstellen, bekommen wir durch Elimination von H und V zwei Gleichungen, die wir umformen können in ein System der Form

  $$\dot{x}(t) = Ax(t) - Bu(t).$$

  In den Gleichungen (3) und (4) kommen (von den Konstanten abgesehen) vor:

  - *die Zustandsvariablen* $s, \dot{s}, \phi, \dot{\phi}$
  - *die Stellgröße* u
  - *Ableitungen* $\ddot{s}$ *und* $\ddot{\phi}$ *von Zustandsvariablen.*

  Für letztere brauchen wir Gleichungen der Form $\ddot{s} = f(s, \dot{s}, \phi, \dot{\phi}, u)$ *und* $\ddot{\phi} = g(s, \dot{s}, \phi, \dot{\phi}, u)$.
  Elimination von $\ddot{\phi}$ *mittels* $(5) := -3(3) + 4(4)$ *liefert*

  $$\ddot{s} = \frac{-3mg}{4M+m}\phi + \frac{4}{4M+m}u, \tag{5}$$

  Elimination von $\ddot{s}$ *mittels* $(6) := (M+m)(3) - m(4)$ *liefert*

  $$\ddot{\phi} = \frac{-3(M+m)g}{L(4M+m)}\phi + \frac{3}{L(4M+m)}u. \tag{6}$$

  Wir nehmen erfreut zur Kenntnis, dass (5) und (6) linear in allen Variablen sind und ergänzen mit den beiden trivialen DGLn zum...

Zwischenergebnis:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3mg}{4M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g(m+M)}{L(4M+m)} & 0 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{m+4M} \\ 0 \\ \frac{3}{L(m+4M)} \end{pmatrix} u(t)$$

Nun sei

$$u(t) := K_s s(t) + K_{sp}\dot{s}(t) + K_p\phi(t) + K_{pp}\dot{\phi}(t)$$

und folglich $\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t)$.
Bestimmen sie für $M = 0{,}981\,\mathrm{kg}$, $m = 0{,}08\,\mathrm{kg}$, $L = 0{,}312\,\mathrm{m}$ die Stabilität dieses Systems

- im ungeregelten Fall: $K_s = K_{sp} = K_p = K_{pp} = 0$
- und mit $K_s = 5,088$, $K_{sp} = 5,258$, $K_p = 35,39$, $K_{pp} = 7,174$.

  Siehe Worksheet: wenn man die Werte einsetzt und die Eigenwerte von A bestimmt, gibt es im ungeregelten Fall einen Eigenwert mit positivem Realteil, also Instabilität; im geregelten Fall haben alle Eigenwerte negativen Realteil: Stabilität.