Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, M. Buchholz, St. Zimmer SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 7: Fundamentaldiagramm, Zufallszahlen, Hamburgerbraterei
Lösungsvorschlag

Zur Übung am 15.06.2010

1 Fundamentaldiagramm

Konstruieren Sie im Verkehrsmodell eine Beziehung zwischen der Verkehrsdichte ϱ und der Geschwindigkeit v für perfekt erzogene Autofahrer: Alle halten sich sowohl an die Regel „Abstand halber Tacho" als auch an die Höchstgeschwindigkeit (hier: $v_{\max} = 80\frac{\text{km}}{\text{h}}$) – wir betrachten eine Strecke der Länge 1km, die Autos sind 10m lang. (Die Fahrer haben als Lohn für ihren vorbildlichen Fahrstil gewaltige Stretch-Limousinen geschenkt bekommen. Außerdem rechnet es sich mit diesen Werten gut.)
Den Abstand zwischen zwei Fahrzeugen berechnen wir leicht anders als auf Folie 94 mit ϱ statt $\varrho - 1$ im Nenner: $(1 - \varrho \cdot l)/\varrho$.
Wie sieht das Fundamentaldiagramm aus und wie die Signalgeschwindigkeit in Abhängigkeit von ϱ? Was ist der maximale Verkehrsfluss?
Mit Abstand $\delta = (1 - \varrho[\frac{\text{Auto}}{\text{km}}] \cdot l[\frac{\text{km}}{\text{Auto}}])/\varrho[\frac{\text{Auto}}{\text{km}}]$ *(Einheit:* $\frac{\text{km}}{\text{Auto}}$*) und* $\delta[\frac{\text{km}}{\text{Auto}}] \geq v[\frac{\text{km}}{\text{h}}]\frac{1}{2\cdot 1000}$ *ist*

$$v_1(\varrho) := 2000\frac{\text{Auto}}{\text{h}} \cdot (1 - \varrho l)/\varrho = 2000\frac{\text{Auto}}{\text{h}} \cdot (1 - \varrho \cdot 0.01\frac{\text{km}}{\text{Auto}})/\varrho$$

Geschwindigkeitsbegrenzung: $v = C \cdot (1 - \varrho l)/\varrho$ *nach* ϱ *auflösen gibt* $\varrho = C/(v + Cl)$

- *Beschränkung nach oben:* $v_1 \geq v_{max}$ *für* $\varrho \leq 2000\frac{\text{Auto}}{\text{h}}/(80\frac{\text{km}}{\text{h}} + 2000\frac{\text{Auto}}{\text{h}} \cdot 0.01\frac{\text{km}}{\text{Auto}}) = 20\frac{\text{Auto}}{\text{km}}$
- *Beschränkung nach unten:* $v_1 < 0$ *für* $\varrho > 1/l = 100\frac{\text{Auto}}{\text{km}}$.

Zusammen:

$$v(\varrho) = \begin{cases} 80\frac{\text{km}}{\text{h}} & \textit{für } \varrho \leq 20\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \\ v_1(\varrho) = 2000\frac{\text{Auto}}{\text{h}}(1 - \varrho \cdot 0.01\frac{\text{km}}{\text{Auto}})/\varrho & \textit{für } 20\frac{\text{Auto}}{\text{km}} < \varrho \leq 100\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \\ 0\frac{\text{km}}{\text{h}} & \textit{für } \varrho > 100\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \end{cases}$$

Mit Little $f = v \cdot \varrho$ *ist*

$$f(\varrho) = \begin{cases} 80\frac{\text{Auto}}{\text{h}} \cdot \varrho & \textit{für } \varrho \leq 20\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \\ 2000\frac{\text{Auto}}{\text{h}}(1 - \varrho \cdot 0.01\frac{\text{km}}{\text{Auto}}) & \textit{für } 20\frac{\text{Auto}}{\text{km}} < \varrho \leq 100\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \\ 0\frac{\text{Auto}}{\text{h}} & \textit{für } \varrho > 100\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \end{cases}$$

f *ist maximal für* $\varrho = 20\frac{\text{Auto}}{\text{km}}$*, nämlich* $1600\frac{\text{Auto}}{\text{h}}$.
Signalgeschwindigkeit ist f'*, also*

$$f'(\varrho) = \begin{cases} 80\frac{\text{km}}{\text{h}} & \textit{für } \varrho \leq 20\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \\ -20\frac{\text{km}}{\text{h}} & \textit{für } 20\frac{\text{Auto}}{\text{km}} < \varrho \leq 100\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \\ 0\frac{\text{km}}{\text{h}} & \textit{für } \varrho > 100\frac{\text{Auto}}{\text{km}} \end{cases}$$

2 Admiral Byrds Unterhosen

Die folgende Aufgabe ist (mit leicht veränderten Zahlen) aus dem Buch *J. Banks, J.S. Carson II, B.L. Nelson, D. Nicol: Discrete-Event System Simulation* entnommen – Byrds Biographie und der gesunde Menschenverstand geben zur Skepsis Anlass, aber der Aufgabe schadet das hoffentlich nicht.
Auf dem Weg zum Nordpol hielt Admiral Byrd sich mit batteriebetriebenen Unterhosen warm. Die Lebensdauer der Batterien war exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 12 Tagen, am Ende der Lebensdauer fiel die Leistung schlagartig ab. Er nahm für die 36-tägige Reise drei dieser Batterien mit.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Vorrat reicht?

  Es ist ein Poisson-Prozess (vgl. Folien 38/39), der Parameter ϑ der zugehörigen Exponentialverteilung ergibt sich aus

  $$\vartheta = \frac{1}{E(T)} = \frac{1}{12}$$

  (Zeiteinheit: 1 Tag).

  Erfrierungen bleiben dem Admiral erspart, wenn 0, 1 oder 2 Ereignisse (Batteriewechsel) im Reisezeitraum von 36 Tagen eintreten. Die ZV X zähle die Ereignisse im Zeitraum von 36 Tagen, sie ist also Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 36/12 = 3$.

  Dann gilt

  $$p(\textit{Warmer Hintern}) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2) = \frac{e^{-3}\cdot 3^0}{0!} + \frac{e^{-3}\cdot 3^1}{1!} + \frac{e^{-3}\cdot 3^2}{2!} \approx 0.42$$

- Simulieren Sie diesen Vorgang!

  Schreiben Sie dazu zwei Funktionen zur Erzeugung Poisson-verteilter bzw. exponentialverteilter Zufallszahlen. Diese dürfen eine Bibliotheksfunktion zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen verwenden (Python `random.random()` – jaja, Python hat auch eine Funktion für exponentialverteilte Zufallszahlen, aber wir wollen hier unsere eigene schreiben).

  Folgendes ist da hilfreich: Wenn X eine $[0,1]$-gleichvereilte Zufallsvariable ist, dann ist

  $$Y = -\frac{\ln(1-X)}{\vartheta}$$

  exponentialverteilt mit Parameter ϑ (warum?).

  Für die diskrete Poisson-Verteilung funktioniert's analog – ggf. erstmal mit einer endlichen Verteilung üben, z.B. für eine Zufallsvariable, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.5 den Wert 0 und mit Wahrscheinlichkeiten von je 0.25 die Werte 1 und 2 liefert.

  Führen Sie mit Ihrem Programm viele Simulationsläufe (Fahrten zum Nordpol, dabei prüfen, ob die Batterien halten) durch in den Varianten „diskret“ (Poisson-Verteilung) und „kontinuierlich“ (Exponentialverteilung).

  Passen die Ergebnisse zu dem oben berechneten Wert?

Erzeugung von ZV mit vorgegebener Verteilungsfunktion F, für die die Umkehrfunktion F^{-1} existiert (d.h., F ist streng monoton steigend) als $Y = F^{-1}(X)$ mit einer auf $[0,1]$ gleichverteilten ZV X. Begründung:

$$F_Y(t) = p(Y \leq t) = p(X \leq F(t)) = F(t)$$

($p(X \in [0,x]) = x$ für $0 \leq x \leq 1$). Hier ist $F(t) = 1 - e^{-\vartheta t}$.

Rest siehe Programm.

3 Hamburgerbraterei (Wartezeitparadoxon)

In einer Hamburgerbraterei werden ununterbrochen und sequentiell Hamburger hergestellt – die Herstellung dauert normalerweise t_0 Minuten, außer wenn gerade ein neues Gurkenglas geöffnet werden muss. Letzter Fall passiert mit einer Wahrscheinlichkeit p und führt dazu, dass sich die Herstellung des betroffenen Hamburgers um t_G auf $t_0 + t_G$ verlängert. Diese Dauer der Herstellung werde durch eine Zufallsvariable T beschrieben.
Schöne Zahlen bei den folgenden Rechnungen (aber auch ein erhebliches Tempo beim Braten. . .) bekommt man mit $p = 1/5$ und $t_0 = 1/10$ (t_G lassen wir variabel).

- Berechnen Sie Erwartungswert $E(T)$, Varianz $V(T)$, Variationskoeffizient $\varrho(T)$ der Herstellung eines Hamburgers.

  Man kann sich T als transformierte Bernoulli-verteilte ZV vorstellen und die Formelsammlung benutzen oder selber rechnen:

$$E(T) = (t_0 + t_G)p + t_0(1-p) = t_0 + t_G p \overset{Bsp.}{=} \frac{1}{10} + \frac{t_G}{5},$$

$$V(T) = \big((t_0 + t_G)^2 p + t_0^2(1-p)\big) - E(T)^2 = p(1-p)t_G^2 \overset{Bsp.}{=} \frac{4t_G^2}{25},$$

$$\varrho(T) = \frac{\sqrt{V(T)}}{E(T)} = \frac{\sqrt{p(1-p)}t_G}{t_0 + t_G p} \overset{Bsp.}{=} \frac{4t_G}{1 + 2t_G}.$$

- Berechnen Sie den Erwartungswert $E(\mathrm{VRZ})$ der Vorwärtsrekurrenzzeit – also die mittlere Zeit, die für einen zufällig eintreffenden Beobachter von seinem Eintreffen bis zur Fertigstellung eines Hamburgers verstreicht.

  Wie groß muss t_G werden, damit mit den Beispielswerten für p und t_0 das Wartezeitparadoxon eintritt, alo $E(\mathrm{VRZ}) > E(T)$ wird?

  Formel von Folie 41 verwenden:

$$E(\mathrm{VRZ}) = E(T)\frac{1 + \varrho^2(T)}{2} \overset{Bsp.}{=} \frac{20t_G^2 + 4t_G + 1}{40t_G + 20}.$$

  Es ist $E(\mathrm{VRZ}) > E(T)$ für $\varrho(T) > 1$, was hier für $t_G > 1/2$ erfüllt ist.

- Simulieren Sie auch diesen Prozess: erzeugen Sie eine Folge von N Realisierungen t_i von T, die den Herstellungsprozess beschreiben, und lassen Sie dann M Beobachter an zufälligen (im betrachteten Zeitintervall gleichverteilten) Zeitpunkten eintreffen und die VRZ bestimmen, und bilden Sie den Mittelwert über die M Beobachter.

  S. Python-Programm