Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, M. Buchholz, St. Zimmer

SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 8: Markov-Ketten
Lösungsvorschlag

Zur Übung am 22.6.2010

1 $M|M|1$

Schreiben Sie einen Simulator für ein $M|M|1$-Wartesystem! Wir haben also einen Ankunfts- und einen Bedienprozess mit jeweils negativ exponentialverteilten Zwischenankunftszeiten; die Parameter der Verteilungen heißen *Ankunftsrate* λ und *Bedienrate* μ. Die Bedieneinheit bearbeitet immer einen Auftrag, sofern (mindestens) einer da ist ($k_{\mathrm{BE}} = 1$). Bis die Bedieneinheit frei ist, reihen sich die Aufträge in der Warteschlange ein.
Der Simulator könnte z.B. folgende Bestandteile haben:

- Eine Funktion, die das nächste Ereignis bestimmt. Sie bekommt Ankunftsrate λ und Bedienrate μ als Parameter; Ergebnis der Funktion ist ein Paar, bestehend aus dem Typ des Ereignisses (Ankunft oder Bedienung) und die Zeit bis zum Eintreten dieses Ereignisses.

  Gut, dass Ankunfts- und Bedienprozess gedächtnislos sind – wir brauchen also keinerlei Information über die Vorgeschichte zu speichern, sondern können immer neu „würfeln".

  Hilfreich ist aber ein Mechanismus, mit dem man erzwingen kann, dass das nächste Ereignis eine Ankunft ist: Das brauchen wir für den Fall der leeren Warteschlange.

- Den eigentlichen Simulator, der zu gegebenem λ, μ und Startfüllung f_0 (Füllung zu Beginn der Simulation) n Ereignisse verarbeitet. Das Ergebnis könnte z.B. eine Liste von Paaren (t_i, f_i) sein, die angibt, dass das System zum Zeitpunkt t_i die Füllung f_i annimmt (also $f_i = f_{i-1} \pm 1$, vielleicht packen wir ganz am Anfang noch das Paar $(0, f_0)$ dazu).

- Auswertefunktionen für das Ergebnis des Simulators. Interessante Größen sind z.B.
  - Die Füllung als Diagramm über die Zeit
  - Die mittlere Füllung
  $$\bar{f}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$
  - Die Verweilzeiten in den einzelnen Zuständen (Die gesamte Simulationszeit zerlegen in Anteile gemäß der jeweiligen Füllung)

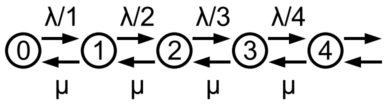
Sofern die Vorlesung schnell genug vorangeschritten ist (oder Sie eine Vorschau auf die Folien 67-70 gemacht haben), kann man den gemessenen Werten die berechneten gegenüberstellen, die sich als Erwartungswert im Grenzfall sehr vieler Ereignisse einstellen.

1.1 Einfaches Postamt: Klassische $M|M|1$

Simulieren Sie ein Postamt mit einem Schalter, einer Ankunftrate $\lambda = 8$ Kunden pro Stunde und einer Bedienrate von $\mu = 12$ Kunden pro Stunde. Was für eine mittlere Füllung stellt sich langfristig ein?

1.2 Zweites Postamt: Modifikation von $M|M|1$

An einem anderen Postamt werden im Mittel $\mu = 8$ Kunden pro Stunde bedient. Eigentlich kommen im Mittel im gleichen Zeitraum $\lambda = 12$ Kunden an. Diese werden allerdings durch lange Warteschlangen abgeschreckt. Steht bereits ein Kunde im Postamt, so stellen sich nur noch die Hälfte der Eintreffenden an (die anderen gehen nach Hause), bei zwei Kunden nur noch $\lambda/3$, bei k Kunden $\lambda/(k+1)$. Die Zwischenankunftszeiten und die Bedienzeiten sind wieder jeweils exponentialverteilt.
Modifizieren Sie Ihren Simulator zur Berechnung des neuen Postamts!
(Wenn Sie auch hier den Erwartungswert der Füllung berechnen wollen: Das geht ganz analog zur Rechnung auf Folie 68; dabei ist $e^s = \sum_{i=0}^{\infty} s^i/i!$ hilfreich.)
Simulation s. Programm.
Rechnung: mit dem Zustandsübergangsdiagramm



ergibt sich

$$\begin{aligned} p_0 \frac{\lambda}{1} &= p_1 \mu \\ p_1 \frac{\lambda}{2} &= p_2 \mu \\ \dots &= \dots \\ p_{i-1} \frac{\lambda}{i} &= p_i \mu \end{aligned}$$

das gibt mit $s := \lambda/\mu$

$$p_i = \frac{s^i}{i!} p_0.$$

Bestimmung von p_0 aus

$$1 \overset{!}{=} \sum_{i=0}^{\infty} p_i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} \right) p_0 = e^s p_0$$

zu $p_0 = e^{-s}$.
Mittlere Kundenanzahl:

$$E(F) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i = e^{-s} \cdot s \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s^{i-1}}{(i-1)!} = e^{-s} \cdot s \cdot e^s = s = 12/8 = 1.5$$

Vielleicht interessiert uns noch die mittlere Verweilzeit. Wir rechnen dazu den mittleren Durchsatz aus, den bekommen wir (eine Bedieneinheit!) als Produkt der Auslastung $r = 1 - p_0 = 1 - e^{-s}$ (Anteil der Zeit, in der gearbeitet wird) und der Bedienrate μ:

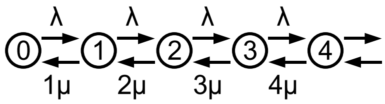
$$E(D) = \mu \cdot \left(1 - e^{-s}\right).$$

Weiter mit der Formel von Little

$$E(Y) = \frac{E(F)}{E(D)} = \frac{s}{\mu \cdot (1 - e^{-s})} \approx 0.24[h]$$

1.3 Fuchs und Hase: $M|M|\infty$

Im Tal Wo-Fuchs-und-Hase-sich-Gute-Nacht-sagen gelte folgende Situation: Ein Fuchs sei eine Bedieneinheit und bediene (hier: fresse) Hasen mit einer Bedienrate von einem Hasen pro Tag. Es gebe in unserem Tal immer mehr Füchse als Hasen. (Was für Auswirkungen hat das auf die Wartezeit für die Hasen?) Füchse teilen sich keine Hasen.
Die Zwischenankunftszeiten und die Bedienzeiten sind wieder jeweils exponentialverteilt.
Es kommen im Mittel 16 Hasen pro Tag zum Gute-Nacht-Sagen an.
Modifizieren Sie Ihren Simulator zur Berechnung dieses Tals!
Simulation s. Programm – rechnen kann man aber auch:



$$
\begin{aligned}
p_0\lambda &= p_1\mu \\
p_1\lambda &= 2p_2\mu \\
\dots &= \dots \\
p_{i-1}\lambda &= i \cdot p_i\mu
\end{aligned}
$$

ergibt mit $s := \lambda/\mu$ *wieder*

$$p_i = \frac{s^i}{i!}p_0,$$

mithin wieder $p_0 = e^{-s}$ *und*

$$E(F) = s = 16/1 = 16.$$

Für die Verweilzeit brauchen wir ein neues Argument (viele Bedieneinheiten!), aber wir kennen $E(B) = 1$ *und* $W = 0$*, also* $E(Y) = E(B) = 1[\mathit{Tag}]$.