Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, St. Zimmer, M. Buchholz

SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 9: Numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen

Zur Übung am 29.6.2010

In dieser Aufgabe soll ein Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_a$$

numerisch gelöst werden, also Näherungen y_k für $y(t_k)$ berechnet werden an diskreten Zeitpunkten $t_k := a + k \cdot \delta t$ mit $\delta t > 0$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$

Wir betrachten zwei Einschrittverfahren der Form

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot \Phi(t_k, y_k, \delta t), \quad y_0 := y_a,$$

nämlich

- das Euler-Verfahren: $\Phi(t, y, \delta t) := f(t, y)$ und
- das Verfahren von Heun:

$$\Phi(t, y, \delta t) := \frac{f(t, y) + f(t + \delta t, y + \delta t \cdot f(t, y))}{2}$$

und als warnendes Beispiel für ein Mehrschrittverfahren, das auf den ersten Blick vernünftig aussieht, aber unbrauchbar ist, die Mittelpunktsregel:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\delta t \cdot f(t_k, y_k), \quad y_0 = y_a, y_1 = y(\delta t).$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf ein sehr einfaches Problem:

$$\dot{y}(t) = -2y(t), \quad y(0) = 1.$$

Geben Sie für die drei Verfahren explizite Formeln für die y_k an!

Wie erklärt sich aus dem Ergebnis für die Mittelpunktsregel die hier beobachtete Instabilität?

Berechnen Sie mit den beiden Einschrittverfahren Näherungslösungen für $y(1)$ mit $\delta t = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots, 10$, den zugehörigen Fehler $e_n := y_{2^n} - y(1)$ und die Quotienten e_n/e_{n+1}. Was sagen diese Quotienten über die Konvergenzordnung der beiden Verfahren aus?