Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, St. Zimmer, M. Buchholz SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 9: Numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen
Lösungsvorschlag

Zur Übung am 29.6.2010

In dieser Aufgabe soll ein Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_a$$

numerisch gelöst werden, also Näherungen y_k für $y(t_k)$ berechnet werden an diskreten Zeitpunkten $t_k := a + k \cdot \delta t$ mit $\delta t > 0$ und $k = 0, 1, 2, \dots$
Wir betrachten zwei Einschrittverfahren der Form

$$y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot \Phi(t_k, y_k, \delta t), \quad y_0 := y_a,$$

nämlich

- das Euler-Verfahren: $\Phi(t, y, \delta t) := f(t, y)$ und
- das Verfahren von Heun:

$$\Phi(t, y, \delta t) := \frac{f(t, y) + f(t + \delta t, y + \delta t \cdot f(t, y))}{2}$$

und als warnendes Beispiel für ein Mehrschrittverfahren, das auf den ersten Blick vernünftig aussieht, aber unbrauchbar ist, die Mittelpunktsregel:

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2\delta t \cdot f(t_k, y_k), \quad y_0 = y_a, y_1 = y(\delta t).$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf ein sehr einfaches Problem:

$$\dot{y}(t) = -2y(t), \quad y(0) = 1.$$

Geben Sie für die drei Verfahren explizite Formeln für die y_k an!

- *Euler:* $y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k) = (1 - 2\delta t) y_k$ *führt mit* $y_0 = 1$ *auf*

$$y_k^{Euler} = (1 - 2\delta t)^k$$

- *Heun:* $y_{k+1} = y_k + \delta t \cdot \frac{f(t_k, y_k) + f(t_k + \delta t, y_k + \delta t \cdot f(t_k, y_k))}{2} = (1 - 2\delta t + 2\delta t^2) y_k$ *führt mit* $y_0 = 1$ *auf*

$$y_k^{Heun} = (1 - 2\delta t + 2\delta t^2)^k$$

- *Mittelpunktsregel:* $y_{k+1} = y_{k-1} + 2\delta t \cdot f(t_k, y_k) = y_{k-1} - 4\delta t y_k$ *ist schon eine etwas kompliziertere Differenzengleichung. Wir setzen* $y_k = \xi^k$ *an, dann liest sich die Differenzenformel als* $\xi^{k+1} = \xi^{k-1} - 4\delta t \xi^k$, *schöner:* $\xi^2 + 4\delta t \xi - 1 = 0$ *mit Lösungen*

$$\xi_1 = -2\delta t + \sqrt{4\delta t^2 + 1}, \xi_2 = -2\delta t - \sqrt{4\delta t^2 + 1},$$

Damit haben wir Lösungen

$$y_k^{MP} := c_1 \xi_1^k + c_2 \xi_2^k$$

und müssen c_1, c_2 *noch so wählen, dass die Anfangsbedingungen* $y_0 = 1$, $y_1 = e^{-2\delta t}$ *erfüllen (lineares Gleichungssystem!):*

$$c_1 = \frac{\sqrt{4\delta t^2 + 1} + 2\delta t + e^{-2\delta t}}{2\sqrt{4\,2\delta t^2 + 1}}, c_2 = \frac{\sqrt{4\delta t^2 + 1} - 2\delta t - e^{-2\delta t}}{2\sqrt{4\,2\delta t^2 + 1}},$$

oder so ähnlich — als einzig wichtiges davon wird sich nachher $c_2 \neq 0$ *herausstellen.*

Wie erklärt sich aus dem Ergebnis für die Mittelpunktsregel die hier beobachtete Instabilität?
Es ist $|\xi_2| > 1$ *(schon die Wurzel ist größer 1 und alles hat dasselbe Vorzeichen), also explodiert* $c_2 \xi_2^k$ *(es ist ja* $c_2 \neq 0$*).*

Berechnen Sie mit den beiden Einschrittverfahren Näherungslösungen für $y(1)$ mit $\delta t = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots, 10$, den zugehörigen Fehler $e_n := y_{2^n} - y(1)$ und die Quotienten e_n/e_{n+1}. Was sagen diese Quotienten über die Konvergenzordnung der beiden Verfahren aus?
S. Worksheet