

Modellbildung und Simulation Übungsblatt 10: Wärmeleitung

Zur Übung am 6.07.2010

1 Simulation der Wärmeleitungsgleichung

Auf der Webseite findet sich ein Programmrahmen zur Simulation der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Die Aufgabenstellung ist in README.TXT bzw. der Python-Datei enthalten. Für ein tiefgehendes Verständnis sollten aber zunächst die folgenden Aufgaben gelöst werden.

2 Finite-Differenzen-Approximation von $-u''$

Betrachten wir zunächst eine Funktion $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, also ein stationäres Problem mit nur einer Raumdimension. Die Funktion u wird auf einem Gitter der Maschenweite $h = 1/m$, ($m \in \mathbb{N}$) durch den Vektor von $m - 1$ Funktionswerten $u_i = u(ih)$, $1 \leq i < m$ approximiert; da hier kaum Verwechslungsgefahr besteht, nennen wir diesen Vektor auch u .

Wir setzen Dirichlet-Randbedingungen mit Funktionswert 0 voraus: $u(0) = u(1) = 0$.

Die zweite Ableitung $-u''(x)$ wird diskretisiert durch

$$-u''(x)|_{x=ih} \approx \frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2}, \quad 1 \leq i < m$$

(wobei die Terme $-u_{i-1}$ für $i = 1$ und $-u_{i+1}$ für $i = m - 1$ entfallen), mithin eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^{m-1}$, die zugehörige Koeffizientenmatrix heiße $A \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$.

- Zeigen Sie, dass mit

$$\eta^k := \left(\sin \left(\frac{ik\pi}{m} \right) \right)_{1 \leq i < m} \in \mathbb{R}^{m-1} \text{ und } \lambda_k := 4m^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2m} \right)$$

die η^k für $1 \leq k < m$ ein vollständiges System von Eigenvektoren von A bilden mit zugehörigen Eigenwerten λ_k .

- Anmerkung: Helfen kann u.U. folgende Überlegung. Es ist

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

und damit

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4} (\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma))$$

- Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Verhalten von $x \mapsto \sin(k\pi x)$ unter der Abbildung $u \mapsto -u''$ (Dazu benutzt man zweckmäßigerweise $\sin(x) \doteq x$ für kleine x).

3 Euler-Verfahren für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

Jetzt nehmen wir die Zeit als unabhängige Variable dazu und lösen die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung: gesucht ist ein $u : [0, \infty) \times [0, 1]$ mit

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \quad (1)$$

mit Randwerten $u(t, 0) = u(t, 1) = 0$ für alle t und Anfangswerten $u(0, x) = u_0(x)$ mit einem geeigneten $u_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Vielleicht ist es beruhigend, erst mal ein Beispiel in der Hand zu halten, hier sind gleich viele: für jedes $k \in \mathbb{N}$ löst

$$v_k(t, x) := e^{-k^2 \pi^2 t} \cdot \sin(k \pi x)$$

die Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswerten $u_0(x) := \sin(k \pi x)$.

Da das Problem linear ist, erfüllen auch beliebige Linearkombinationen von Lösungen wieder die Wärmeleitungsgleichung. Wenn wir nun ein u_0 vorgelegt bekommen, können wir es als Überlagerung von Sinusschwingungen entwickeln und haben durch Überlagerung der einzelnen v_k das Gesamtproblem gelöst.

Und noch besser: wir können mit dieser Technik auch das diskretisierte Problem analysieren, was im Folgenden passieren wird.

- Zunächst wird bezüglich des Raums diskretisiert: wir bekommen wie oben einen Vektor $u \in \mathbb{R}^{m-1}$, dessen Komponenten $u_i(t) = u(t, ih)$ nun aber zeitabhängig sind, und ersetzen die rechte Seite von (1) durch $-Au$ mit obiger Matrix A .

Das führt auf ein System von $m - 1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -Au,$$

das wir numerisch mit dem Euler-Verfahren lösen können.

Also wählen wir eine Zeitschrittweite $\delta t > 0$, setzen zu Beginn $u^{(0)}$ auf die diskretisierten Anfangswerte $u_0(ih)$, $1 \leq i < m$ und berechnen in jedem Zeitschritt $j \geq 0$

$$u^{(j+1)} := u^{(j)} - \delta t \cdot Au^{(j)}, \quad (2)$$

was der Diskretisierung in Zeitrichtung

$$\frac{\partial}{\partial t} u \approx \frac{u^{(j+1)} - u^{(j)}}{\delta t}$$

entspricht.

Der Schritt von $u^{(j)}$ auf $u^{(j+1)}$ ist eine lineare Abbildung:

$$u^{(j+1)} = Bu^{(j)}.$$

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von B !

- Das numerische Verfahren sollte die Wirklichkeit zumindest soweit abbilden, dass die Lösungen für $t \rightarrow \infty$ gegen Null gehen. Für welche δt ist das für beliebige Anfangswerte erfüllt?

Was hat das für eine Konsequenz, wenn ich die Anzahl m der Intervalle in Raumrichtung verdoppele?

- Und wie sieht das für das implizite Euler-Verfahren aus, bei dem in (2) $Au^{(j)}$ durch $Au^{(j+1)}$ ersetzt wird?