Lehrstuhl für Informatik mit
Schwerpunkt Wissenschaftliches Rechnen
Prof. H.-J. Bungartz, St. Zimmer, M. Buchholz SS 2010

Modellbildung und Simulation
Übungsblatt 11: Jacobi

Zur Übung am 13.7.2010

Löst man ein lineares $n \times n$-Gleichungssystem $Ax = b$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b, x \in \mathbb{R}^n$) mit einem linearen Iterationsverfahren der Bauart

$$Mx^{(i+1)} + (A - M)x^{(i)} = b,$$

gilt für den Fehler $e^{(i)} := x^{(i)} - x$, dass die Abbildung $e^{(i)} \mapsto e^{(i+1)}$, die die Entwicklung des Fehlers (hoffentlich möglichst schnell in Richtung Nullvektor!) beschreibt, ebenfalls linear ist: mit

$$N := -M^{-1}(A - M) = I - M^{-1}A$$

gilt

$$e^{(i+1)} = Ne^{(i)}.$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von N sind entscheidend für das Konvergenzverhalten und damit für die Kosten der Iteration. In der Regel werden wir sie natürlich nicht kennen, für ein einfaches Modellproblem — mit trotzdem typischen Konvergenzverhalten — werden wir sie aber gleich explizit berechnen.

Jacobi-Iteration für $-u'' = f$

Dazu betrachten wir wieder die Diskretisierung von $-u'' = f$ auf einem Gitter der Maschenweite h wie auf dem letzten Blatt (Wärmeleitungsgleichung), die auf eine Tridiagonalmatrix A mit Einträgen $2/h^2$ auf der Hauptdiagonalen und $-1/h^2$ auf den beiden Nebendiagonalen führt.
Wegen der Tridiagonalstruktur wäre dieses Gleichungssystem billig mit einem direkten Löser zu behandeln; wir sind ja aber gar nicht an einer Lösung, sondern am Iterationsprozess interessiert (für die partielle Differentialgleichung $-\Delta u = f$ in $d > 1$ Unabhängigen ist direktes Lösen ziemlich teuer; die Erkenntnisse, die wir jetzt über die Jacobi-Iteration sammeln werden, sind aber direkt übertragbar).
Für die mit dem Faktor α gedämpfte Jacobi-Iteration ($0 < \alpha \leq 1$) wird

$$M := \frac{1}{\alpha} D_A$$

verwendet, wobei D_A den Diagonalanteil von A bezeichne (also eine Diagonalmatrix, bei der in unserem Fall alle Einträge $2/h^2$ sind).
Bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisse vom letzten Blatt die Eigenwerte und die Eigenvektoren der zugehörigen Matrix N, definiert wie oben.
Damit können wir die Konvergenz der Jacobi-Iteration analysieren:

- Welche Fehlerkomponenten (Eigenvektoren von N) verschwinden schnell, welche langsam?
- Am Anfang werden wir einen mehr oder weniger zufälligen Mix aus verschiedenen Fehlerkomponenten haben. Was passiert damit nach einigen Iterationsschritten?
- Was ist die Konvergenzrate der „renitentesten" Fehlerkomponenten?
- Ab welcher Zahl η von Iterationsschritten ist für ein gegebenes ε die Fehlerreduktion $\|e^{(\eta)}\| \leq \varepsilon \|e^{(0)}\|$ garantiert? Was ändert sich, wenn wir zum Gitter mit halber Maschenweite ($h/2$) übergehen (hier ist wieder $\sin(x) \approx x$ für kleine x hilfreich)?