



1) Einführung in die mathematische Modellierung

Begriffsbildung
Simulationspipeline
Anwendungsbeispiele
Herleitung von Modellen
Analyse von Modellen
Klassifizierung von ...
Betrachtungsebene, ...

Page 1 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

1.1. Begriffsbildung

- **Modell**: (vereinfachendes) Abbild einer (partiellen) Realität
 - konkret: z.B. Modellbau, Experimente (Windkanal)
 - abstrakt: **formale** Beschreibung, typischerweise (aber nicht nur) mit dem Methodenapparat der Mathematik
- **mathematische Modellierung**: Prozess der formalen **Herleitung** und **Analyse** eines mathematischen Modells
 - zunächst: informale Beschreibung des Problems (Prosa)
 - daraus: semiformale Beschreibung mit dem Instrumentarium der Anwendungswissenschaft
 - daraus schließlich: streng formale Beschreibung (Konsistenz!)
 - d.h.: **Formalisierung** bzw. **Mathematisierung** eines Problems zur besseren Lösbarkeit!



Begriffsbildung
Simulationspipeline
Anwendungsbeispiele
Herleitung von Modellen
Analyse von Modellen
Klassifizierung von ...
Betrachtungsebene, ...

Page 2 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Begriffsbildung (2)

- Bsp.: Stunden- und Raumbelungsplan einer Schule
 - zunächst Beschreibung mit Text
 - daraus Kärtchentableau
 - daraus Graph und Scheduling-Problem
- **Simulation**: virtuelles (i.A. rechnergestütztes) Experiment am Modell, eigentliches Ziel der Modellierung
- Modellbildung unterschiedlich nahe liegend und etabliert:
 - **exakte Naturwissenschaften**: lange Tradition, Formulierungen der Physik etwa per se mathematisch, heute i.W. anerkannt
 - **staatliche Wirtschaftspolitik**: stark umstritten, mindestens zwei Lager (Monetaristen und Keynesianer), beide fahren Modelle auf
 - **Klimamodellierung**: stark abweichende Theorien zu Ozonloch und globaler Erwärmung, alle modellgestützt
 - **Spieltheorie**: von Neumanns MinMax-Prinzip von Vorsicht geprägt (worst case), kaum realistisch für Zucker etc.



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 3 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Simulationsziele

- Was ist der Zweck einer Simulation?
 - ein bekanntes Szenario **verstehen** bzw. **nachvollziehen**:
 - * Naturkatastrophen (Erdbeben etc.): warum überhaupt, warum an diesem Ort und zu dieser Zeit, warum so heftig?
 - * Einsturz des World Trade Centers
 - ein bekanntes Szenario **optimieren**:
 - * Flugeinsatzplan der Lufthansa
 - * Wärmeabtransport eines Kühlsystems
 - * Durchsatz durch ein Rechensystem oder das Internet
 - ein unbekanntes Szenario **vorhersagen**:
 - * Klimaveränderungen, Wettervorhersage
 - * Entwicklung des Bevölkerungswachstums
 - * Eigenschaften neu konzipierter Materialien (Verbundwerkstoffe, Legierungen, ...)



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

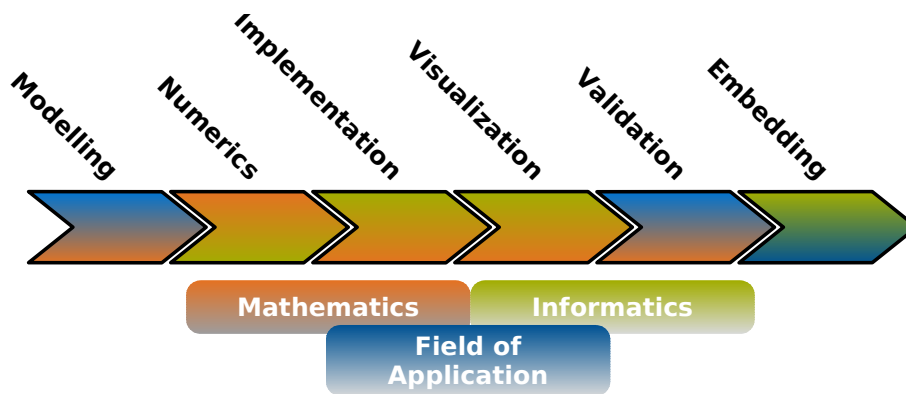
Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 4 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

1.2. Simulationspipeline



- Modellierung: vereinfachende formale Beschreibung eines geeigneten Ausschnitts
- Berechnung bzw. Simulation im engeren Sinne: geeignete Aufbereitung des Modells
- Implementierung: effiziente Umsetzung der Berechnungsalgorithmen
- Visualisierung/Datenexploration: interpretieren der Ergebnisse eines Simulationslaufs
- Validierung: Abgleich z. B. von Simulationsergebnissen mit Experimenten
- Einbettung: Integration in Simulationskontext

Begriffsbildung
Simulationspipeline
Anwendungsbeispiele
Herleitung von Modellen
Analyse von Modellen
Klassifizierung von ...
Betrachtungsebene, ...

Page 5 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

1.3. Anwendungsbeispiele

- Wo wird überall modelliert und simuliert?
 - **Physik:** Astrophysik, Geophysik, ...
 - **Chemie:** Proteinforschung, Drug Design, ...
 - **Biologie:** Bioinformatik, Bioverfahrenstechnik, ...
 - **Materialwissenschaften:** Smart materials, Nanostrukturen, ...
 - **Klima & Wetter:** Global Warming, Golfstrom, Ozonloch, ...
 - **Automobilindustrie:**
Crashtests (Strukturmechanik), Windkanal (Strömungsmechanik), Einspritzung und Zündzeitpunkt (Verbrennung), Airbags (Mikrosystemtechnik, Kopplungen), Fahrdynamik (Optimalsteuerung), Schallabstrahlung (Akustik), ...
 - **Nationalökonomie:** Konjunkturmodelle (Zyklen, ...), Wirtschafts- und Steuerpolitik, Preisbildungsmechanismen, ...
 - **Finanzwirtschaft:** Kursprognosen, Option Pricing, ...



Begriffsbildung
Simulationspipeline
Anwendungsbeispiele
Herleitung von Modellen
Analyse von Modellen
Klassifizierung von ...
Betrachtungsebene, ...

Page 6 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Anwendungsbeispiele (2)

- Wo wird überall modelliert und simuliert ?
 - **Halbleiterindustrie:** Bauelementsimulation (npn-Übergang im Transistor), Prozesssimulation (Herstellung von hochreinen Kristallen), Schaltkreissimulation, Chip-Layout, ...
 - **Computergraphik:** lokale und globale Beleuchtungsmodelle, ...
 - **Logistik/Ablaufplanung:** Routing, Scheduling, Fuhrparkmanagement, ...
 - **Verkehrstheorie:** Stauprävention, Verkehrssteuerung, Durchsatzerhöhung, ...
 - **Strategie:** militärische/politische/ökonomische Szenarien, ...
 - **Wahl- und Meinungsforschung:** Faktorenanalyse, ...
 - **Codierungstheorie:** Informationsmodell, ...
 - **Versorger:** Lastmodelle, Redundanz und Sicherheit, ...
 - **Steuerung:** Funktionieren komplexer Systeme, ...
 - **Software Engineering:** Abläufe (Work flow), ...



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 7 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Anwendungsbeispiele (3)

... oder ganz exotisch: Amerika-Simulationen



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 8 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Anwendungsbeispiele (4)

- man sieht:
 - ganz unterschiedliche Anwendungsgebiete: „harte“ versus „weiche“ Modellierung
 - ganz unterschiedliche Zielsetzungen
- man ahnt:
 - ganz unterschiedliche mathematische bzw. informatische Werkzeuge
- somit die ersten Fragen:
 - Wie kommt man zu einem Modell?
 - Welche Beschreibungsmittel nimmt man her?



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 9 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

1.4. Herleitung von Modellen

- Was genau soll modelliert werden?
 - der Wirkungsgrad eines Katalysators oder die detaillierten Reaktionsvorgänge in ihm?
 - das Bevölkerungswachstum in Afrika oder nur in Kairo?
 - der Durchsatz durch ein Rechnernetz oder die mittlere Durchlaufzeit eines Pakets?
- Welche Größen spielen eine Rolle (qualitativ) und wie groß ist ihr Einfluss (quantitativ)?
 - optimale Flugbahn des Space Shuttle: Gravitation des Mondes, des Pluto, dieses Hörsaals?
 - Dow Jones Index morgen um 12 Uhr: Äußerungen von Ben Bernanke bzw. von H.-J. Bungartz?
 - i.A. alles andere als offensichtlich (Expertise, Studien, Hypothesen); frühe Festlegungen bestimmen spätere Simulationsergebnisse (vgl. Klima!)



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 10 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Beziehungsgeflecht von Einflussgrößen

- In welchem Beziehungsgeflecht stehen die als wichtig identifizierten Größen miteinander?
 - qualitativ: Vorzeichen von Ableitungen, „wenn – dann“ etc.
 - quantitativ: konkrete Größe der Abhängigkeiten
 - typischerweise sehr komplizierte Beziehungen:
 - * Normalerweise beeinflusst die CPU-Leistung die Job-Bearbeitungszeit stark.
 - * Bei heftigem Seitenflattern spielt sie dagegen kaum eine Rolle!
 - * allgemeine Beschreibung dieser schwankenden Abhängigkeit?
- Mit welchem Instrumentarium lassen sich die Wechselwirkungen und Abhängigkeiten beschreiben?



Begriffsbildung
Simulationspipeline
Anwendungsbeispiele
Herleitung von Modellen
Analyse von Modellen
Klassifizierung von ...
Betrachtungsebene, ...

Page 11 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Beschreibungsmittel

- Instrumentarien zur Beschreibung von Beziehungen:
 - **algebraische Gleichungen und Ungleichungen:**

$$E = mc^2, \quad w^T x \leq 10$$
 - **(Systeme) gewöhnliche(r) Differentialgleichungen** (Differentialgleichungen mit nur einer unabhängigen Variablen, typischerweise der Zeit t):

$\ddot{y}(t) + y(t) = 0$	Oszillation eines linearen Pendels
$\dot{y}(t) = y(t)$	exponentielles Wachstum
$\dot{x}(t) = -mx(t) + ay(t) + c$	$a, b, c, d, m, n \geq 0$
$\dot{y}(t) = bx(t) - ny(t) + d$	Wettrüsten zweier Großmächte

- **(Systeme) partielle(r) Differentialgleichungen** (Differentialgleichungen mit mehr als einer unabhängigen Variablen, also Ort oder Ort und Zeit):

$$u_{xx} + u_{yy} = f \quad \text{für } (x, y) \in \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \delta\Omega$$

Verformung einer am Rand eingespannten Membran unter Last f



Begriffsbildung
Simulationspipeline
Anwendungsbeispiele
Herleitung von Modellen
Analyse von Modellen
Klassifizierung von ...
Betrachtungsebene, ...

Page 12 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Beschreibungsmittel (2)

- Instrumentarien zur Beschreibung von Beziehungen:

- **Automaten, Zustandsübergangsdiagramme:**

- * Modellierung von Warteschlangen (Zustände: verschiedene Füllgrade; Übergänge: Ankunft bzw. Bearbeitungsende)
- * Modellierung von Texterkennung (Zustände: bisherige Struktur; Übergänge: neues Zeichen)
- * Modellierung von Wachstumsprozessen mit zellulären Automaten (Zustände: Gesamtbelegungssituation (Zellen voll, gefüllt, leer); Übergänge durch Regeln)

- **Graphen:**

- * Modellierung von Rundreisen (Problem des Handlungsreisenden; Knoten: Orte; Kanten: Wege)
- * Modellierung von Reihenfolgeproblemen (Knoten: Teilaufträge auf einer Maschine; Kanten: zeitliche Reihenfolge)
- * Modellierung von Rechensystemen (Komponenten und Kanäle)
- * Modellierung von Abläufen (Datenflüsse, Work flows)



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 13 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Beschreibungsmittel (3)

- Instrumentarien zur Beschreibung von Beziehungen:

- **Wahrscheinlichkeitsverteilungen:**

- * Ankunftsprozess in einer Warteschlange
- * Zustimmung zur Regierungspolitik in Abhängigkeit von der Arbeitslosenquote
- * Kontrolltheorie: Störterme, Rauschen
- * randomisierte Heuristiken (Greedy, simulated annealing, ...)

- **Fuzzy Logic:**

- * Regelung von Geräten der Consumer Electronics (Waschmaschinen, Spülmaschinen, Fotoapparate)

- **neuronale Netze**

- **algebraische Strukturen:**

- * Gruppen in der Quantenmechanik
- * endliche Körper in der Kryptologie



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 14 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Simulationsaufgabe

- Welche Gestalt hat die resultierende Aufgabenstellung?
 - finde **eine** Lösung zu gegebenem Gleichungssystem
 - * Bestimmung einer gültigen Startlösung in der Linearen Optimierung
 - finde **die** Lösung zu gegebenem Gleichungssystem
 - * eindeutig lösbare partielle Differentialgleichung
 - löse Existenzaufgabe
 - * Gibt es überhaupt Lösung (Hamiltonschen Weg im Graphen)?
 - löse unbeschränkte Extremalaufgabe
 - * kürzester Weg von der Quelle zur Senke
 - löse beschränkte Extremalaufgabe
 - * Rucksackproblem
 - * lineare Optimierung
 - ermittle Störenfried bzw. Flaschenhals
 - * kritischer Pfad
 - * Komponente maximaler Auslastung



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 15 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

1.5. Analyse von Modellen

- Aussagen zur Handhab- und Lösbarkeit:
 - **Existenz** von Lösungen:
 - * Populationsdynamik: Gibt es stationären Grenzzustand? Wenn ja, wird dieser erreicht?
 - * Reihenfolgeproblem: Ist der Präzedenzgraph zyklensfrei?
 - * Minimierung: Gibt es Minima oder nur Sattelpunkte?
 - **Eindeutigkeit** von Lösungen:
 - * Minimierung: Lokales oder globales Minimum?
 - * Stabile Zustände oder Oszillationen zwischen verschiedenen Lösungen (Molekulardynamik)?
 - * Alle Lösungen gleichwertig?
 - **stetige Abhängigkeit** der Resultate von den Eingabedaten:
 - * Eingabe: Anfangswerte, Randwerte, Startzustände, ...
 - * entspricht Kondition bzw. Sensitivität



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 16 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Sachgemäß gestellte Probleme

- Hadamard 1923: Existenz + Eindeutigkeit + Stetigkeit
- allerdings: die meisten Probleme sind's nicht (John, Tikhonov), sondern **un-sachgemäß gestellt** (*ill-posed*)
 - Bsp.: **inverse Probleme** (Antwort/Ergebnis ist vorgegeben, gesucht ist die Anfangseinstellung)
 - * Wirtschaftspolitik: was heute tun, damit im nächsten Jahr die Arbeitslosenzahl in Deutschland unter 3.5 Millionen?
 - * Technik: wie Stanzmaschine einstellen, damit bestimmtes Blech herauskommt?
 - * Rechnernetz: wie Netzkomponenten auslegen, damit erforderlicher Mindestdurchsatz garantiert ist?
 - Strategien für inverse Probleme:
 - * (sinnvolles) Ausprobieren und Anpassen (Folge von Vorwärtsproblemen)
 - * Löse verwandtes (regularisiertes) Problem, das sachgemäß gestellt ist.



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 17 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Eignung für weitere Verarbeitung

- Ist das Modell in seiner hergeleiteten Form für eine rechnergestützte bzw. automatisierte Lösung geeignet?
 - Verfügbarkeit der Eingabedaten (in hinreichender Genauigkeit)
 - Implementierungsaufwand
 - * Verfügbarkeit von (ggfs. zu erweiternder) Software etc.
 - erforderlicher Rechen- und Speicheraufwand absolut
 - * Bsp.: NP-vollständige Probleme
 - * Bsp.: Wettervorhersage: Rechenzeit > Echtzeit
 - erforderlicher Rechen- und Speicheraufwand relativ
 - * Ist das Modell kompetitiv (cost-benefit-ratio)?
 - Empfindlichkeit
 - * Bei schlecht gestelltem Problem können kleinste Trübungen der Eingabe das Ergebnis komplett verfälschen (vgl. Chaos, „Schmetterlingsflügel“).



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 18 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Lösungsansätze für mathematische Modelle

- **analytisch:** Existenz- und Eindeutigkeitsnachweis *plus* Konstruktion erfolgen formal/analytisch/direkt
 - dies ist das Optimum: keine Vereinfachungen / Näherungen
 - allerdings geht das fast nur in einfachen Spezialfällen
 - * Bsp. Populationsdynamik: exponentielles Wachstum
$$\dot{y}(t) = y(t) \Rightarrow y(t) = c \cdot e^t$$
 - * Bsp. Wärmeleitung: eindimensionale Basisgleichung
$$u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) \Rightarrow u(x, t) = \sin(cx) \cdot e^{-c^2 t}$$
 - * Bsp. kürzester Weg in Graphen: Minigraph
- **heuristisch:** trial & error, gemäß bestimmter Strategie
 - nützlich v.a. bei Problemen der diskreten Optimierung
 - * Bsp. Rucksack-Problem: *Greedy-Heuristik*, wählt immer lokal beste Alternative aus (funktioniert das immer?)
 - Problem: Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit??



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 19 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Lösungsansätze für mathematische Modelle (2)

- **direkt-numerisch:** numerischer Algorithmus liefert exakte Lösung (modulo Rundungsfehler)
 - klarer Algorithmus, keine Heuristik mehr; Erreichen des Ziels ist stets sichergestellt
 - Bsp.: Simplex-Algorithmus bei der linearen Optimierung
$$\max_x c^T x \quad \text{unter} \quad Ax \leq b$$
- **approximativ-numerisch:** Näherungsverfahren (Iterationen) für genäherte (diskretisierte) Gleichungen
 - Erreichen einer (beliebig genauen) Approximation ist sichergestellt.
 - spannend: wie genau, und wie schnell kommt man dort hin?
 - Hauptklasse bei der *numerischen Simulation*
 - Bsp.: Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme, Newton-Verfahren zur Nullstellensuche



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 20 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Bewertung von Modellen

- **Validierung:** „Stimmt das Modell?“
 - Vergleich mit Experimenten
 - * „1:1 Experimente“ (Windkanal, Crashtest, ...)
 - * Laborexperimente an (verkleinerten) Prototypen;
Problem: Skalierung sichergestellt?
 - a-posteriori-Beobachtungen
 - * Realitäts-Test (Wetter, Börse, militärische Szenarien)
 - * Zufriedenheits-Test (Verkehrssteuerung, Beleuchtungsmodelle in der Computergraphik)
 - Plausibilitäts-Test
 - * Test der Simulationsergebnisse auf Konsistenz mit bestehenden Theorien (Astrophysik, Quantenphysik)
 - Modellvergleich
 - * Vergleich der Ergebnisse zu auf unterschiedlichen Modellen basierenden Simulationen



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 21 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Bewertung von Modellen (2)

- **Genauigkeit:** „Wie präzise ist das Modell?“
 - Genauigkeit im Hinblick auf die Qualität der Eingabedaten (bei Messdaten auf 3 Stellen genau als Eingabe kann kein Resultat auf 8 Stellen genau erwartet werden!)
 - Genauigkeit im Hinblick auf die Fragestellung
 - * Bsp. Bundestagswahl
 - * Frage: welche Regierung?
 - * Modell erlaubt Wahlprognose mit +/- 2% Genauigkeit
 - * Koalitionsaussagen: Rot-Grün und Gelb-Schwarz
 - * Simulation liefert: FDP 4%, Grüne 6%, Union 45%, SPD 45%
 - * keine Aussage möglich!
 - * Somit taugt das verwendete Modell im Grunde genommen nicht für unsere Fragestellung!
 - Sicherheit: worst case oder average case Aussagen?



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 22 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

1.6. Klassifizierung von Modellen

- Möglichkeit 1 : **diskret** vs. **kontinuierlich**
- diskretes Modell nutzt diskrete / kombinatorische Beschreibung:
 - binäre oder ganzzahlige Größen
 - Zustandsübergänge in Graphen oder Automaten
- kontinuierliches Modell nutzt kontinuierliche / reellwertige Beschreibung:
 - reelle Zahlen, physikalische Größen
 - algebraische Gleichungen, Differentialgleichungen
- naheliegend, aber nicht zwingend: Einsatz für entsprechende Phänomene
 - Bsp. Verkehrsfluss durch Stadt
 - * diskret: Anzahl der Autos im System, an Ampeln, Warteschlangen
 - * kontinuierlich: Dichten, Flüsse (Fluid-Modell mit Kanälen, Sperren)



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von . . .

Betrachtungsebene, . . .

Page 23 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Klassifizierung von Modellen (2)

- Möglichkeit 2: **deterministisch** vs. **stochastisch**
- wiederum kein zwingender Bezug zwischen dem zu modellierenden Phänomen und dem Instrumentarium:
 - Bsp. 1: Würfeln
 - * offensichtlich Zufallsexperiment (d.h. probabilistische Realität)
 - * sinnvollerweise auch stochastisches Modell (Zufallsvariable)
 - Bsp. 2: Crash-Test
 - * deterministisches Phänomen
 - * üblicherweise deterministisches Modell
 - Bsp. 3: Wettervorhersage
 - * deterministisch (Strömungsmechanik etc.) oder Chaos-Theorie?
 - Bsp. 4: Paketankunft an Bedieneinheit im Internet
 - * im Grunde deterministisch (hoffentlich)
 - * für den Betrachter ohne Außensicht aber eher zufällig
 - * außerdem interessieren v.a. Durchschnittsgrößen



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von . . .

Betrachtungsebene, . . .

Page 24 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

1.7. Betrachtungsebene, Hierarchie

- selten „ein korrektes Modell“, vielmehr Modellhierarchie (Wechselspiel aus Aufwand und Genauigkeit)
- welche Betrachtungsebene (Auflösung) im Hinblick auf
 - das erwünschte Resultat („was ist erforderlich?“)?
 - den erforderlichen Lösungsaufwand („was ist machbar?“)?
- Beispiele:
 - Strömung durch Zylinder (Einströmung gegeben, Feld der Geschwindigkeitsvektoren im Inneren gesucht): 1D/2D/3D?
 - Populationsdynamik, USA 1840-1860: rein zeitabhängig als $p(t)$ oder mit Ost-West-Siedlerstrom als $p(x, t)$?
 - Schaltkreissimulation: ursprünglich rein zeitabhängig (Kirchhoff-Systeme); zunehmende Integration: parasitäre Ortseffekte
 - Katalysator: rein makroskopische Größen (Permeabilität) vs. mikroskopisches Reaktionsverhalten



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 25 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Multiskaleneigenschaft

- Skalen nicht ohne inakzeptablen Genauigkeitsverlust separierbar
 - Bsp.: turbulente Strömungen
 - * starke, unregelmäßige Verwirbelungen unterschiedlicher Größe
 - * instationär, inhärent dreidimensional
 - * starker Energietransport in alle Richtungen und zwischen Skalen
 - * abhängig von der Zähigkeit/Viskosität des Fluids müssen auch in großem Gebiet kleinste Wirbel mitgerechnet werden (erfordert hohe Auflösung des Gitters)
 - * d.h.: man kann aufwandstechnisch nicht alles berücksichtigen, müsste aber eigentlich
 - * Abhilfe: Turbulenzmodelle (feinskaligen Einfluss in grobe Parameter packen; Mittelung (bzgl. Raum und Zeit), Homogenisierung)
- oft: Modellhierarchie, schrittweise Verfeinerung



Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von ...

Betrachtungsebene, ...

Page 26 of 27

Modellbildung und Simulation
1. Einführung in die
mathematische Modellierung
Hans-Joachim Bungartz

Simulationsebenen beim Menschen



Fragestellung	Betrachtungseben	Modellbasis(z.B.!)
Bevölkerungswachstum global	Länder/Regionen	Populationsdynamik
Bevölkerungswachstum lokal	Individuen	Populationsdynamik
Mensch	Kreisläufe/Organe	Systemsimulator
Blutkreislauf	Pumpe/Kanäle/Ventile	Netzwerksimulator
Herz	Blutzellen	Kontinuum
Zelle	Makromoleküle	Kontinuum
Makromoleküle	Atome	Molekulardynamik
Atome	Elektronen/feiner	Quantenmechanik

Begriffsbildung

Simulationspipeline

Anwendungsbeispiele

Herleitung von Modellen

Analyse von Modellen

Klassifizierung von . . .

Betrachtungsebene, . . .

Page 27 of 27