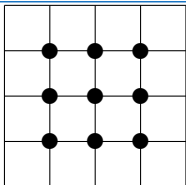


Teil XV

Mehrgitterverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Wiederholung: Relaxationsverfahren

- Direkte Lösung des LGS ist viel zu teuer
- Daher wird versucht, den Fehler lokal zu beseitigen
- Fehler nicht meßbar, daher Residuum lokal beseitigt
- Innere Schleife läuft über alle Gitterpunkte
- Äußere Schleife wiederholt Relaxation bis das Residuum klein genug ist
- Anzahl der äußeren Schleifendurchläufe von der Anzahl an Gitterpunkten abhängig
- Auf den folgenden Folien: Nebeneinanderstellung von PDE-Sicht und LGS-Sicht

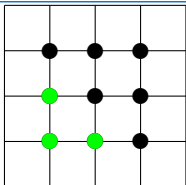


Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$

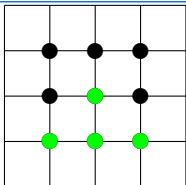


Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$

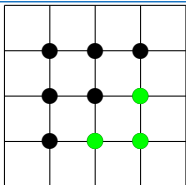


Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$

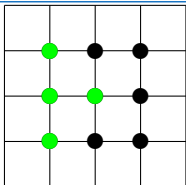


Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$

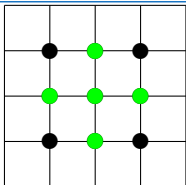


Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$

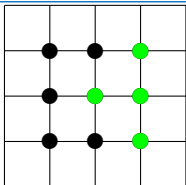


Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

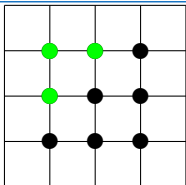
$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$



Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$

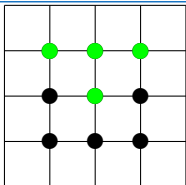


Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

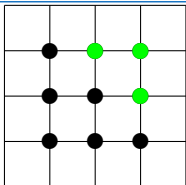
$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$



Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$



Jacobi-Verfahren:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{old})$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{new} \\ u_2^{new} \\ u_3^{new} \\ u_4^{new} \\ u_5^{new} \\ u_6^{new} \\ u_7^{new} \\ u_8^{new} \\ u_9^{new} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix} - h^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ f_9 \end{pmatrix} - \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1^{old} \\ u_2^{old} \\ u_3^{old} \\ u_4^{old} \\ u_5^{old} \\ u_6^{old} \\ u_7^{old} \\ u_8^{old} \\ u_9^{old} \end{pmatrix}$$

Konvergenz: Fourier-Analyse

Szenario

- Stationäre Wärmeleitung bei quadratischer Fläche
- Randbedingung überall Null
- Lösung: Null auf der gesamten Fläche
- Initialer x -Vektor ist damit gleich dem Fehler e
- Veränderung des Fehlers in einer Iteration wird untersucht
- Initialer Fehler als Kombination von Sinus-Kurven unterschiedlicher Frequenz
- 1D: $x = \sum_m a_m \cdot (\sin(m\pi hi))_{i=1..N}$

Was sind hohe/niedrige Frequenzen?

- niedrige Frequenz: eine Schwingung ($\sin(\pi x)$) im betrachteten Bereich
- Ist $\sin(1000\pi x)$ eine hohe Frequenz?

Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

- Eine Frequenz ist hoch/niedrig bezüglich der Anzahl an Abtastpunkten
- Ein Signal mit Maximalfrequenz f_{max} muss mit einer Frequenz größer als $2 \cdot f_{max}$ abgetastet werden
- Für gegebene Abtastfrequenz f ist die höchste darstellbare Frequenz also $1/2f$
- Die Abtastfrequenz entspricht gerade der Anzahl an Diskretisierungspunkten

Änderung des Fehlers in einer Iteration

- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}Ax^{(k)} = (I - D^{-1}A)x^{(k)} = Mx^{(k)}$
- $e^{(k+1)} = Me^{(k)}$
- $(M(\sin(m\pi hi)))_i = \cos(m\pi h)(\sin(m\pi hi))_i$

Eigenwerte von M

- $\lambda^m = \cos(m\pi h)$ sind Eigenwerte zu den Eigenvektoren $(\sin(m\pi hi))_i$
- Frequenzen zu betragsmäßig niedrigen Eigenwerten (nahe Null) verschwinden schnell
- Frequenzen zu betragsmäßig hohen Eigenwerten (nahe Eins) verschwinden langsam
- Für x gegen Null nimmt $\cos(x)$ den maximalen Wert an
- Taylor-Entwicklung um $0 + \pi h$:

$$\begin{aligned}\lambda^1 &\approx \cos(0) - \pi h \sin(0) - \cos(0)\pi^2 h^2 / 2 + \dots \\ &= 1 - 0 - \pi^2 h^2 / 2 \\ &= 1 - c \cdot h^2\end{aligned}$$

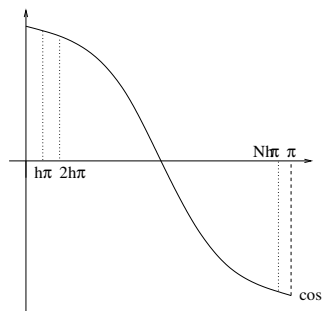
Konvergenz der Iteration

Was passiert bei Verdopplung der Gitterpunkte?

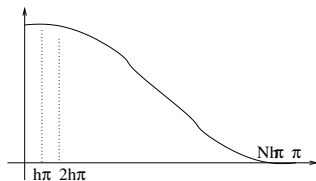
- Eine Iteration mit h drückt den Fehler um $1 - c \cdot h^2$
- $h \rightarrow h/2$
- Eine Iteration drückt Fehler um: $1 - c \cdot (h/2)^2 = 1 - (1/4)c \cdot h^2$
- Zwei Iterationen: $(1 - c \cdot (h/2)^2)^2 \approx 1 - (1/2)c \cdot h^2$
- Vier Iterationen: $(1 - (1/2)c \cdot h^2)^2 \approx 1 - c \cdot h^2$
- Bei Halbierung von h sind vier Mal so viele Gitterpunkte nötig
- \Rightarrow Anzahl an Iterationen wächst mit $1/h^2$

Frequenzabhängige Fehlerreduktion

Jacobi-Verfahren

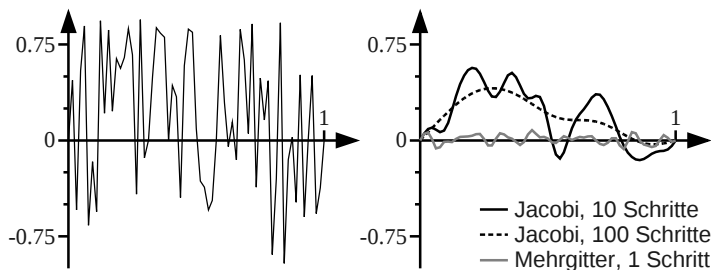


gedämpftes Jacobi-Verfahren



Reduktion des Fehlers bei Jacobi/Gauss-Seidel

- Jacobi-Verfahren erfüllt die PDE lokal
- D.h. lokal ist die zweite Ableitung Null bzw. sehr klein
- D.h. für glatte Funktionen ist das Residuum geringe
- Für hohe Frequenzen ist das Residuum groß, d.h. solche Frequenzen werden schnell beseitigt, niedrige nicht.
- Abbildung: 1D Wärmeleitung mit Rand=0 und zufälligen Startwerten für die Temperatur



Mehrgitter: Motivation

- Optimales LGS-Verfahren: Rechenaufwand wächst linear mit der Anzahl ab Diskretisierungspunkten
- Besser geht es nicht (jeder Punkt muss mindestens ein mal betrachtet werden)
- Kosten einer Iteration bei Jacobi/Gauss-Seidel sind $\mathcal{O}(n)$
- Die Anzahl an Iterationen wächst mit der Anzahl an Diskretisierungspunkten
- Niedrige Fehlerfrequenzen verschwinden nur sehr langsam
- Ursache: Informationen müssen durch das gesamte Gebiet (damit durch alle Punkte) propagiert werden
- Mehrgitter-Verfahren propagiert Informationen sehr viel schneller

Grundidee des Mehrgitter-Verfahrens

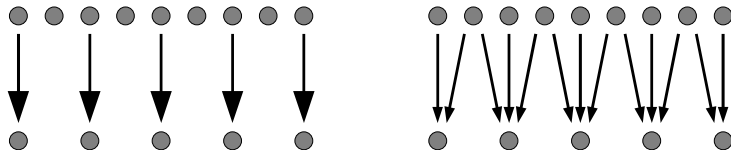
- Jacobi/Gauss-Seidel sind schlecht für niedrige Frequenzen
- Shannon: Eine Frequenz ist niedrig bezüglich einer bestimmten Zahl an Diskretisierungspunkten
- Bei Halbierung der Diskretisierungspunkte wird die Frequenz bezüglich der Diskretisierung verdoppelt
- D.h. für jede Frequenz gibt es eine Diskretisierung, für die diese Frequenz mittel/hoch ist
- Durch Einsatz verschiedener Gitterauflösungen gibt es für jede Komponente des Fehlers ein Gitter, bezüglich dessen die Frequenz der Fehlerkomponente niedrig ist.

Mehrgitter-Algorithmus (generell, Pseudocode)

```
def mehrgitter(level, b, x):  
    # Vorglaetten (hohe Fehlerfrequenzen beseitigen)  
    self.glaetter(level, b, x)  
    if(level < maxlevel):  
        # Berechnung des Residuums  
        r = residuum(level, b, x)  
        # Uebertragung des Residuums auf das grobe Gitter  
        b_c = restriktion(l, r)  
        # Loesung von -Ae = r auf grobem Gitter  
        e_c = mehrgitter(l+1, b_c, zero_vector(l))  
        # Prolongation  
        x_delta = prolongation(level, e_c)  
        # Korrektur  
        x = x + x_delta  
    # Nachglaetten / oberster level  
    self.glaetter(2, level)
```

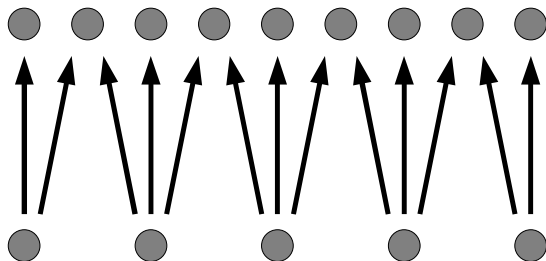
Restriktion

- Für neue Näherung x^{k+1} auf grobem Gitter sind nötig: x^k und r^k bezüglich des groben Gitters
- Bisherige Näherungslösung muss auf das nächstgrößere Gitter transportiert werden
- Einfachste Methode: Injektion. Nur jeder zweite Punkte wird verwendet, die dazwischen verworfen
- Teilweise bessere Ergebnisse, wenn zwischen drei benachbarten Punkten gemittelt wird



Prolongation

- Der auf dem groben Gitter berechnete Fehler muss auf das feine übertragen werden
- Feingitterpunkte, die zugleich Grobgitterpunkte sind, erhalten den Wert direkt vom Grobgitterpunkt
- Feingitterpunkte zwischen zwei Grobgitterpunkte erhalten den Wert durch Interpolation



Mehrgitter-Algorithmus (vereinfacht)

- Im bisherigen Code (letzte Vorlesung) zur Wärmeleitung kein b vorgesehen
- Daher nicht Lösung von $-Ae = r$ auf grobem Gitter, sondern direkte Lösung

```
def mehrgitter_rekursiv(self, level):
    if (2**level < min(self.zeilen, self.spalten)):
        # Vorglaetten
        self.glaetter(2, level)
        # Restriktion: nicht nötig (Injektion)
        # -
        # Loesung auf grobem Gitter
        self.mehrgitter_rekursiv(level+1)
        # Prolongation
        self.prolongation(level)
    # Nachglaetten / oberster Level
    self.glaetter(2, level)
```


Glaetter und Prolongation

```
def glaetter(self, n, l):  
    offset = 2**l  
    for iters in range(n):  
        for i in range(2**l, self.zeilen+1, 2**l):  
            for j in range(2**l, self.spalten+1, 2**l):  
                self.T[i,j] = 0.25*(self.T[i-offset,j] \  
                                     + self.T[i+offset,j] \  
                                     + self.T[i,j-offset] \  
                                     + self.T[i,j+offset])
```

```
def prolongation(self, l):  
    offset = 2**l  
    for i in range(2**l, self.zeilen+1, 2**(l+1)):  
        for j in range(2**l, self.spalten+1, 2**(l+1)):  
            self.T[i,j] = 0.25*(self.T[i-offset,j] \  
                                 + self.T[i+offset,j] \  
                                 + self.T[i,j-offset] \  
                                 + self.T[i,j+offset])
```

Rekursionsaufruf

```
def mehrgitter(self, maxres):  
    res = self.getResiduum()  
    while res > maxres:  
        self.mehrgitter_rekursiv(0)  
        res = self.getResiduum()
```

Berechnung des Residuum

```
def getResiduum(self):  
    res = 0  
    for i in range(1, self.zeilen+1):  
        for j in range(1, self.spalten+1):  
            res += (self.T[i-1,j] + self.T[i+1,j] \  
                    + self.T[i,j-1] + self.T[i,j+1] \  
                    - 4 * self.T[i,j])**2  
    return sqrt(res/(self.zeilen*self.spalten))
```

Beispiel

```
>>> from waermesim import *  
>>> lgs = Waermesimulation(50. ,30. ,1. ,0.6 ,0. ,1. ,0.)  
>>> lgs.mehrgitter(0.001)  
>>> lgs.plot()
```

Kosten des Mehrgitter-Verfahrens

- Pro Level zwei bis vier Jacobi/Gauss-Seidel Iterationen: $\mathcal{O}(n_l)$
- Residuumsberechnung: $\mathcal{O}(n_l)$
- Restriktion: $\mathcal{O}(n_l)$
- Prolongation: $\mathcal{O}(n_l)$

Rekursion

- Kosten auf feinstem Level: cn
- Kosten auf zweitfeinstem Level: $1/4cn$
- ...
- \Rightarrow Kosten $cn \sum_{i=0}^{\infty} (1/4)^i = 4/3cn$

Anzahl Iterationen

- $\mathcal{O}(1)$
- \Rightarrow Gesamtkosten: $\mathcal{O}(n)$