Vorkurs Mathematik für Informatiker

-- 1 Potenzen und Polynome --

Thomas Huckle

Stefan Zimmer (Stuttgart)

4.10.2018

Vorwort

- Es sollen **Arbeitstechniken** vermittelt werden für das Informatikstudium

- Der wesentliche Teil ist das **Bearbeiten der Übungsaufgaben**

  Vorlesung, Zentralübung, Tutorü., Seminar, Prakt., Lab …

- Aufgaben, die man nicht lösen konnte, kann man vergessen, daher gibt es keine „Musterlösungen“: „learning by doing“

- Stoffauswahl:
  - Wiederholung von Schulstoff
  - Informatik-relevante Mathematik
  - insgesamt relativ willkürlich, aber interessant!

Vorgehensweise

Typischer Lösungsweg für Übungsaufgaben:
Aus aktuellem Teil des Skripts/der Vorlesung die Definitionen anschauen, umformulieren, zusammenfügen → Lösung

Mathematik: Definition von Objekten und Operationen.

Frage nach Eigenschaften der definierten Strukturen!

Vorlesung verstehen? Mitschreiben! Nacharbeiten!

Jeder Zeit Fragen stellen! Anwesenheit!

Verschiedene Schwierigkeitsstufen.

Serlo: https://de.serlo.org/mathe/universitaet/tu-muenchen/vorkurs-mathematik-informatiker/44328

„Potenzen“ bzgl. Addition

Einführung der Zahloperationen, basierend auf 0 und 1:

„Potenzen“ bezgl. „+“:

$$\underbrace{1+1+...+1+1}_{n\text{-mal}} = n$$

Mächtigkeit einer Menge mit
n Elementen (Äpfeln)

Addition: n+1 = (1+1+..+1+1) + 1 als Nachfolger von n

Multiplikation: $n \cdot m = \underbrace{n+n+...+n+n}_{m\text{-mal}}$

als wiederholte Addition in Paketen oder
Mächtigkeit von m Mengen der Mächtigkeit n

Potenzen bzgl. Multiplikation

Potenz als wiederholte Multiplikation:

$\underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x \cdot x}_{n\text{-mal}} =: x^n$ als abkürzende Definition/Schreibweise „:=„

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{(x \cdot x \cdots x \cdot x)}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdots x \cdot x)}_{n\text{-mal}} = \underbrace{x \cdot x \cdots x \cdot x}_{m+n\text{-mal}} = x^{n+m}$$

$$x^m \cdot y^m = \underbrace{(x \cdots x)}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{(y \cdots y)}_{m\text{-mal}} = \underbrace{((xy) \cdots (xy))}_{m\text{-mal}} = (xy)^m$$

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdots x^m}_{n\text{-mal}} = \underbrace{\underbrace{(x \cdots x)}_{m\text{-mal}} \cdots \underbrace{(x \cdots x)}_{m\text{-mal}}}_{n\text{-mal}} = x^{mn}$$

Rekursive Definition

Präzise mathematische Definition:

$$x^{n+1} := \begin{cases} x & \textit{für} \quad n = 0 \\ x \cdot x^n & \textit{für} \quad n > 0 \end{cases}$$

Als Computer-Programm:

```
function  Potenz( x: Real;  n: Integer):  Real;
begin
   if  n=1   then   Potenz := x
             else   Potenz := x · Potenz(x, n-1)
end;
```

Rekursives Programm (Ausführung von oben her)

Loop programm

```
function  Potenz ( x:  Real;  n: Integer ) :  Real ;
var
     p:  Real ;
     i :   Integer ;
begin
     p := 1.0 ;
     for  i := 1  to  n   do   p := p · x ;
     Potenz  :=  p ;
end ;
```

Induktives Programm (Ausführung von unten her)

Brüche als Exponent

Definition:

Für eine positive Zahl $x \in \mathbb{IR}$ *und* $n \in \mathbb{IN}$ *ist* $x^{1/n}$ *diejenige positive Zahl* y, *für die gilt* $y^n = x$.

Damit diese Definition vernünftig ist, sollte es nur eine solche Zahl y geben!

$$y = x^{1/n} \Leftrightarrow y^n = x$$

Für n=2 bekommen wir die üblichen Wurzeln $\sqrt{}$

Entsprechend ist die *n*-te Wurzel definiert durch

$$\sqrt[n]{x} := x^{\frac{1}{n}} = x^{1/n}$$

Rechenregeln

Die Definition von $x^{1/n}$ wurde genau so gewählt, dass die alte Regel $(x^m)^n = x^{m\cdot n}$ weiter gilt:

$$\left(x^{1/n}\right)^n = ?$$

$$\left(x^{1/n}\right)^n = x^{\frac{1}{n}\cdot n} = x^1 = x$$

Somit hebt der Exponent 1/n die Wirkung des Exponenten n auf, bzw. Exponent n hebt 1/n auf.
Daher ist x^n die **Umkehrfunktion** von $y^{1/n}$ (und umgekehrt).

$$x^{p/q} := x^{\frac{1}{q}\cdot p} = \left(x^{1/q}\right)^p = \left(x^p\right)^{1/q}$$

Ziel: Erweiterung des Potenzierens auf reelle Zahlen

Brüche (positive rationale Zahlen), schon geschafft.

Erweiterung jeweils so, dass die alten Regeln weiter gelten.

Negative Exponenten:

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ für m = 0: $x^0 \cdot x^n = x^{0+n} = x^n$

Daher muss $x^0 = 1$ sein.

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ für m = − n: $x^{-n} \cdot x^n = x^{-n+n} = x^0$

Daher muss $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$ sein wegen $x^{-n} \cdot x^n = 1$

Später soll natürlich auch x^y für $x, y \in R, x > 0$, definiert sein.

Polynome - Definitionen

Ein Term der Form x^n heißt **Monom** (in x);
x ϵ **IR**: Unbekannte; n ϵ **IN**: Potenz

Entsprechend heißt ein Term

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

ein **Polynom** (in x). Index i. Summenzeichen.

Die a_i , i=0,1,…,n, heißen Koeffizienten des Polynoms.

Das Summenzeichen Σ dient der einfacheren Notation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Polynom als Code

```
program  Polynom;
const
    n = 3;
var
   a:       array [0 . . n]  of  Real  =  (4.0 , 0.0 , 7.0 , 15.0 );
   x:       Real = 2.0;
   sum:  Real;
   i:       Integer;
begin
   sum  :=  0.0;
   for   i := 0   to  n  do
           sum  :=  sum  +  a[i] * (x ** i);
    WriteLn (sum);
end;
```

Diskussion

Das Programm wertet das Polynom aus.
Man gibt also eine Stelle x ein und erhält dafür
den Wert des Polynoms sum an dieser Stelle x.

Das Programm ist eigentlich ein schwerer Kunstfehler.
Aufwändig und teuer! Es geht wesentlich geschickter!

Beispiele für Polynome:

→ 1 (nach 0 das einfachste)

→ $7\,x + 3$

→ $15\,x^3 + 7\,x^2 + 4$ (ein „innerer“ Koeffizient ist 0)

Grad eines Polynoms

Der Grad eines Polynoms ist „das größte *i*“ mit $a_i \neq 0$

Notation: $\deg(x^n) := n$

Allgemein: $\deg\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \leq n$ (= n, falls $a_n \neq 0$).

Aufgabe: deg(1)=?, deg(7x+3)=?, deg($15x^3+7x^2+4$)=?

deg(1)=0; deg(7x+3)=1; deg($15x^3+7x^2+4$)=3;

deg(0)=?

deg(0)?

Rechenregeln für deg: Sei p_n Polynom vom Grad n.

$$\deg(p_n \cdot p_m) \;=\; n + m = \deg(p_n) + \deg(p_m)$$

$$\deg(p_n + p_m) \;<=\; \max\{n,m\} = \max\{\deg(p_n),\deg(p_m)\}$$

Speziell für $p_n=0$ soll daher auch gelten:

$$\deg(0 \cdot p_m) = \deg(0) + m = \deg(0)$$

$$\deg(0 + p_m) = \max\{\deg(0),m\} = m$$

Also $\deg(0) \leqslant m$, so dass $\deg(0)+1=\deg(0)$ $\rightarrow$ $\deg(0) = -\infty$

Manchmal auch $\deg(0) = -1$ in der Computeralgebra.

Addieren und Multiplizieren von Polynomen

Funktioniert mit den üblichen Rechenregeln.

$$\left(x^2+2x+1\right)+\left(x^2-x+3\right)=?$$

$$\left(x^2+2x+1\right)+\left(x^2-x+3\right)=2x^2+x+4$$

Multiplizieren:

$$\left(x^2+2x+1\right)\cdot\left(x^2-x+3\right)=?$$

$$\left(x^2+2x+1\right)\cdot\left(x^2-x+3\right)=$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & x^4 & +2x^3 & +x^2 & & \\
 & & -x^3 & -2x^2 & -x & \\
 & & & +3x^2 & +6x & +3 \\
\hline
= & x^4 & +x^3 & +2x^2 & +5x & +3
\end{array}$$

Polynomdivision (mit Rest)

Naheliegend: (x+1) : (x+1) = 1 (Vorsicht mit x=-1)
oder p(x) = 2x+2 = 2(x+1) = 2q(x) → p:q=2

Ähnlich: $(x^2-1) : (x+1) = (x-1)$
oder $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Aus dem vorigen Beispiel

$$\left(x^4+x^3+2x^2+5x+3\right)=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-x+3\right)$$

sieht man

$$x^4+x^3+2x^2+2x+4=\left(x^4+x^3+2x^2+5x+3\right)+(-3x+1)=$$
$$=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-x+3\right)-3x+1$$

Formale Definition? Berechnung?

Division mit Rest für $\mathbb{N}$

Zu $n,m \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutig bestimmte $q,r \in \mathbb{N}$ mit $r<m$, so dass

$$n = q \cdot m + r$$

gilt. Dabei ist q das Ergebnis und r der Rest der ganzzahligen Division von n durch m: $n/m = q$ Rest r

Übertragung auf Polynome:

Zu zwei Polynomen N und M mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome Q, R mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ mit

$\deg(R) < \deg(M)$, so dass $N = Q \cdot M + R$.

Dabei ist Q das Ergebnis und R der Rest der Polynomdivision von N durch M, $N : M = Q$ Rest R

Beispiel

$$(\boxed{x^3} \qquad + x + 1) : (\boxed{x} + 1) = \boxed{x^2} \boxed{-x} \boxed{+2} \boxed{-1/(x+1)}$$

$$\underline{-(x^3 + x^2)}$$

$$\boxed{-x^2}$$

$$\underline{-(-x^2 - x)}$$

$$\boxed{2x}$$

$$\underline{-(2x + 2)}$$

$$\boxed{-1}$$

(-1 ist der Rest)

Lineare Polynome

Wichtige Spezialfälle: Polynome von kleinem Grad

Im Fall $\deg(P) \leq 1$ heißt P linear und ist eine Gerade.

P von der Form

$$P = P(x) = a \cdot x + b$$

z.B. in linearen Gleichungen: $a \cdot x + b = 0$

Ist leicht zu lösen, so lange $a \neq 0$ ist.

Quadratische Polynome

Im Fall deg(P) ≤ 2 heißt P quadratisch, ist also von der Form

$$P = P(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad \text{(eine Parabel)}$$

Dazu gehören die quadratischen Gleichungen (oBdA a=1):

$$x^2 + px + q = 0$$

mit den Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

so lange $p^2 \geq 4q$ ist (andernfalls komplexe Lösungen!)

Aufgabe: $2x^2 - 14x + 24 = 0$. Lösungen? x=3, x=4.

Nullstellensuche

Die Nullstellen x_1 , x_2 eines quadratischen Polynomes liefern eine Zerlegung in Linearfaktoren:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Sei P ein beliebiges Polynom vom Grad n mit Nullstelle x_1. Dann kann man den Linearfaktor $x - x_1$ abspalten durch Polynomdivision:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - x_1)$$

mit einem Polynom Q vom Grad n-1.

Die Nullstellen von P sind nun x_1 und die Nullstellen von Q.

Hauptsatz der Algebra: Polynom zerfällt in n Linearfaktoren.

Beispiele

Polynome P und rationale Funktionen P/Q sind wichtige Klassen von Beispielfunktionen und dienen als Baukasten, um kompliziertere Funktionen anzunähern (Potenzreihe, Computergraphik, Bildverarbeitung)

Annäherung der Exponentialfunktion bei x=0 durch Polynome wachsenden Grads.