# Vorkurs Mathematik für Informatiker

# -- 2 Logarithmen --

Thomas Huckle

Stefan Zimmer (Stuttgart)

4.10.2018

# Logarithmus - Definition

Umkehrfunktion der Potenzfunktion $y^n$:

$$f(x^a) = x$$

$$x = y^n \Rightarrow y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

oder

$$g(a^x) = x$$

Umkehrfunktion der Potenzfunktion $a^x$ ?

Definition: Zu $x > 0$ und $b > 0$, $b \neq 1$, sei der Logarithmus von x zur Basis b folgende Zahl $y \in$ IR:

$$y = \log_b(x) :\Leftrightarrow b^y = x$$

Drei spezielle Basen (Werte) b kommen so oft vor, dass sie eigene Symbole erhalten: b = 2, b = 10, und b = e

$$ld(x) := \log_2(x), \qquad \lg(x) := \log_{10}(x), \qquad \ln(x) := \log_e(x).$$

# Rechenregeln I

$$y = \log_b(x) :\Leftrightarrow b^y = x$$

Potenzieren und Logarithmieren (zur selben Basis) heben sich gegenseitig auf:

$x = \log_b(b^x)$ wegen $y = \log_b\left(b^x\right) \Leftrightarrow b^y = \left(b^x\right)$: $y = x$ und

$x = b^{\log_b(x)}$ wegen $b^y = x \Leftrightarrow y = \log_b x$: $b^{\log_b x} = x$

Aus „Mal“ wird „Plus“ :

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$\left.\begin{array}{lll} z = \log_b(xy) & \text{ist die Zahl mit} & b^z = xy \\ u = \log_b(x) & \text{ist die Zahl mit} & b^u = x \\ v = \log_b(y) & \text{ist die Zahl mit} & b^v = y \end{array}\right\} \text{Definitionen}$$

$b^{u+v} = b^u \cdot b^v = xy = b^z \rightarrow z = u + v \rightarrow \log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$

# Rechenregeln II

$\boxed{y = \log_b(x) :\Leftrightarrow b^y = x}$

Aus Bruch wird Minus:

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

$z = \log_b(x/y)$ ist die Zahl mit $b^z = x/y$

$u = \log_b(x)$ ist die Zahl mit $b^u = x$

$v = \log_b(y)$ ist die Zahl mit $b^v = y$

$b^{u-v} = b^u / b^v = x/y = b^z \rightarrow z = u - v \rightarrow \log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$

# Rechenregeln III

$$\boxed{\log_b(x\cdot y)=\log_b(x)+\log_b(y)}$$

$$\boxed{y=\log_b(x) :\Leftrightarrow b^y=x}$$

Aus Potenzieren wird „Mal“:

$$\log_b\left(x^n\right)=n\cdot\log_b(x)$$

$$\log_b\left(x^n\right)=\log_b\left(x\cdots x\right)=\underbrace{\log_b(x)+\cdots+\log_b(x)}_{\text{n-Mal}}=n\cdot\log_b(x)$$

$$\log_b\left(x^{1/n}\right)=\log_b(x)/n$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $t = \log_b(x^{1/n})$ | ist die Zahl mit | $b^t = x^{1/n}$ | Definition |
| $t = \log_b(x^{1/n})$ | ist die Zahl mit | $b^{nt} = x$ | Umformung |
| $nt = \log_b(x)$ | ist die Zahl mit | $b^{nt} = x$ | Definition |

$$\log_b(x^{1/n}) = t = \log_b(x)/n$$

$$\log_b\left(x^{r/q}\right)=\log_b\left(\left(x^{1/q}\right)^r\right)=r\cdot\log_b\left(x^{1/q}\right)=r\cdot\log_b(x)/q=\frac{r}{q}\log_b(x)$$

# Basis umrechnen

$$y = \log_b(x) :\Leftrightarrow b^y = x$$

Was tun, wenn ein Logarithmus aus einer Basis in eine andere Basis umzurechnen ist?

$$\log_c(x) = \log_b(x) \cdot \log_c(b)$$

$z = \log_c(x)$ ist die Zahl mit $c^z = x$

$u = \log_b(x)$ ist die Zahl mit $b^u = x$

$v = \log_c(b)$ ist die Zahl mit $c^v = b$

$c^z = x = b^u \rightarrow \log_c(c^z) = \log_c(b^u) \rightarrow z \cdot \log_c(c) = u \cdot \log_c(b) \rightarrow$

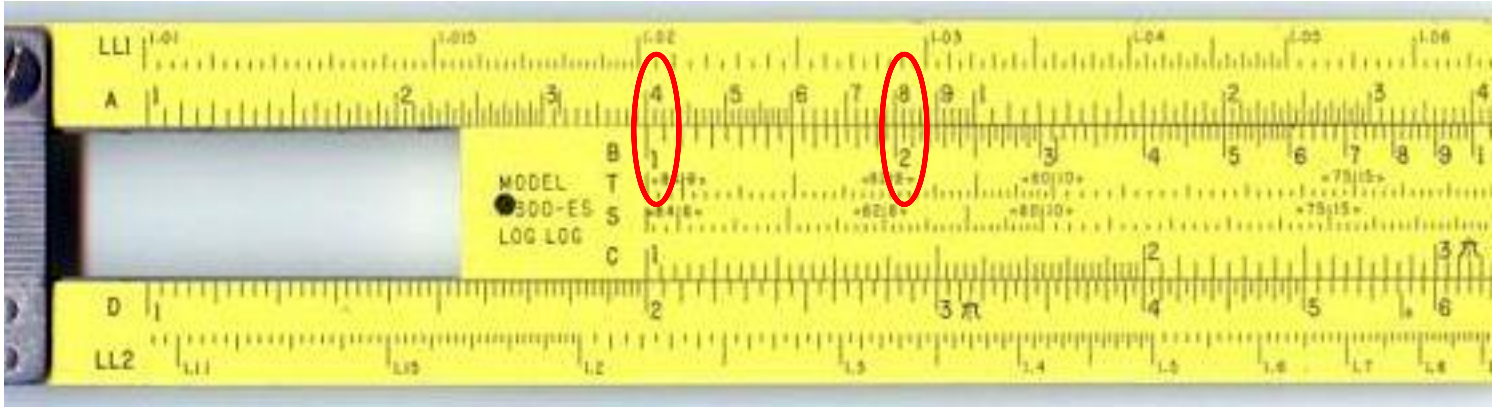
$\rightarrow z \cdot 1 = \log_b(x) \cdot \log_c(b)$.

Aufgabe: Was ist $\log_b(1) = ?;\ \log_b(ld(\lg(100))) = ?$ Lösung: 0

# Anwendung: Rechenschieber

Addieren ist viel einfacher als Multiplizieren!
Logarithmus bietet die Möglichkeit, das Multiplizieren auf das Addieren zurückzuführen!

Verwende logarithmische Skala:
Abstand zwischen zwei Beschriftungen $x_1$ und $x_2$ ist dabei gegeben durch $\log(x_1) - \log(x_2) = \log(x_1/x_2)$

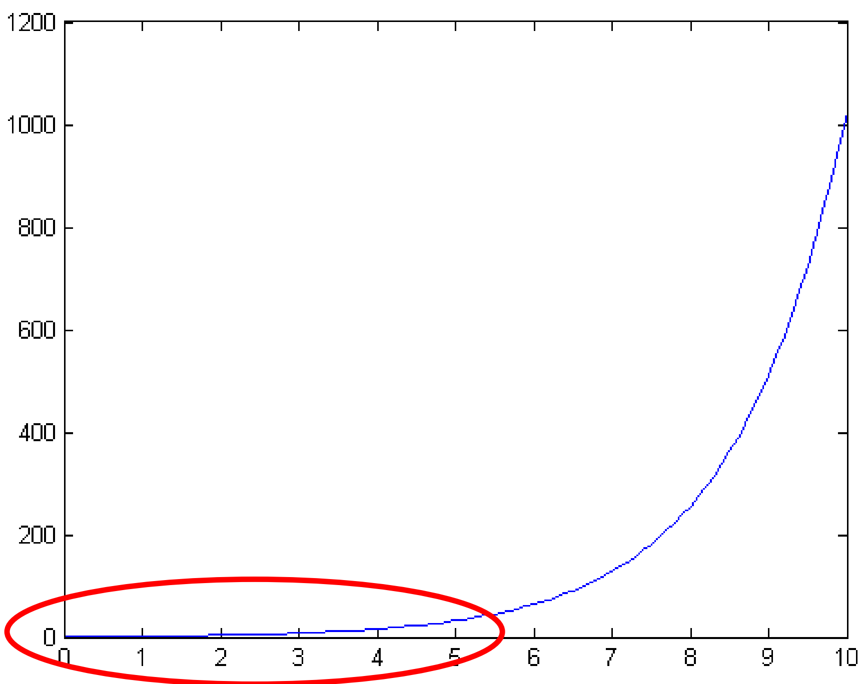


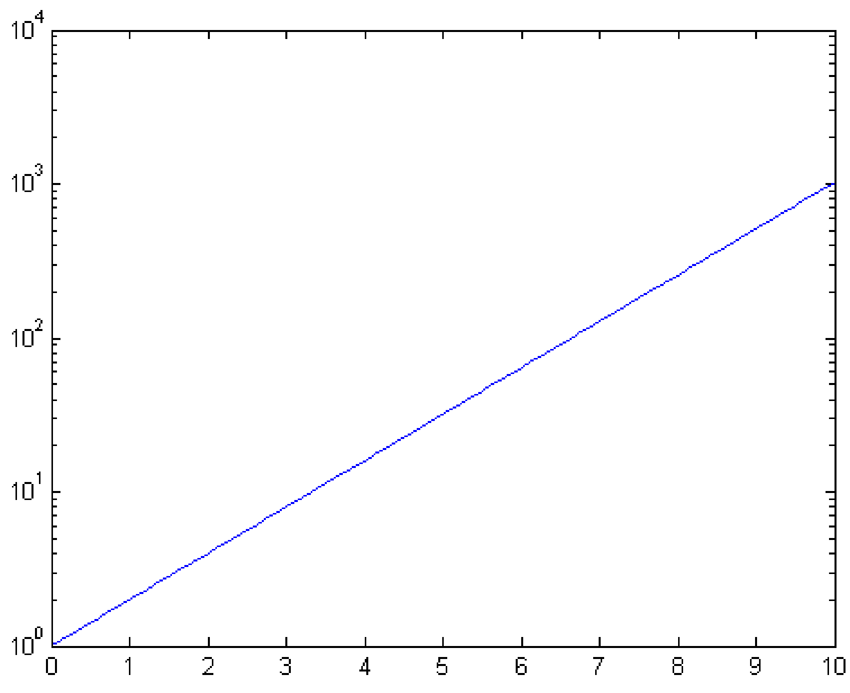

$4 \cdot 2 = 8$: Addieren von log(4) und log(2) ergibt log(8)

# Anwendung: Diagramme

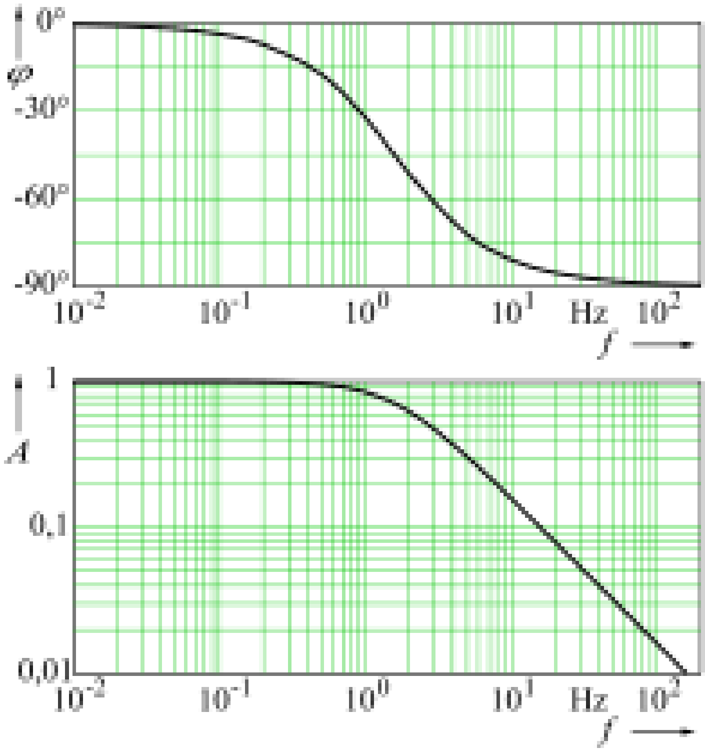
Zur Beschreibung von Wachstumsprozessen mit z.B. exponentiellem (rasanten) Wachstum bietet es sich an, die Achsen logarithmisch einzuteilen, damit man in den verschiedenen Größenordnungen überhaupt das Verhalten sichtbar macht, und ev. Gesetzmäßigkeiten ablesen kann:

$y=2^x$ einmal normal gezeichnet und einmal mit log-Skala



# log-log-Diagramm




Phase/Frequenz

Amplitude/Frequenz

Beispiel: Schwingung

Hier sind sogar beide Skalen logarithmisch:

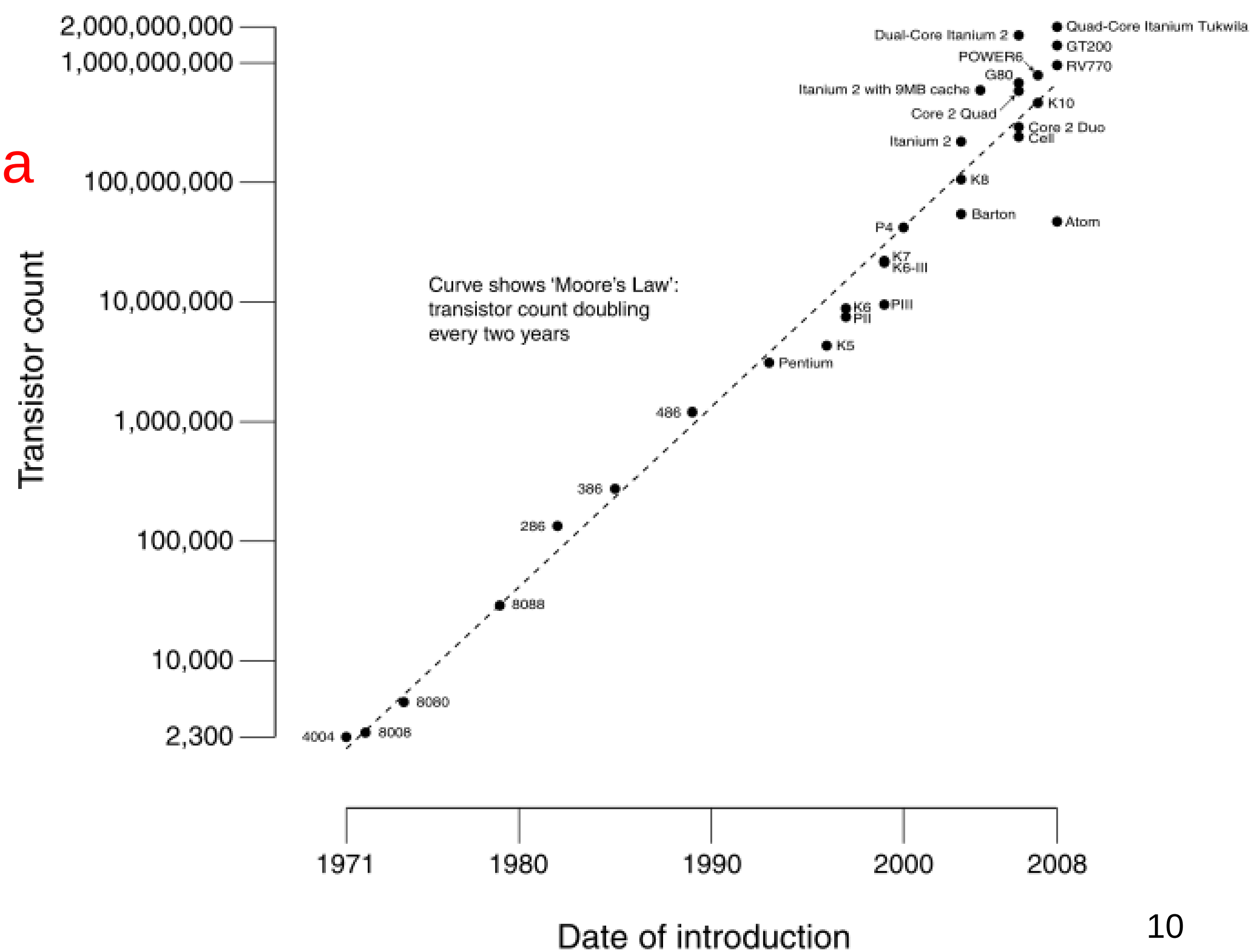
# Logarithmische Skalen

Solche Skalen bieten sich an bei Werten sehr unterschiedlicher Größenordnung,

z.B.:

- ph-Wert
- Dezibel
- Richter-Skala

### CPU Transistor Counts 1971-2008 & Moore's Law



# Diagramm

Für die Funktion $y = a \cdot x^b$

setzen wir $X := \log(x)$ und $Y := \log(y)$

Dann ergibt sich die Funktion

$Y = \log(y) = \log(a \cdot x^b) = \log(a) + b \cdot \log(x) = \log(a) + b \cdot X$

als einfache Gerade mit Steigung b und Nulldurchgang log(a).

b und a lassen sich daraus leicht graphisch bestimmen.

# Potenzen

SI prefixes

| Prefix | Symbol | $1000^m$ | $10^n$ | Decimal | Short scale | Long scale | Since |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| yotta | Y | $1000^8$ | $10^{24}$ | 1000000000000000000000000 | Septillion | Quadrillion | 1991 |
| zetta | Z | $1000^7$ | $10^{21}$ | 1000000000000000000000 | Sextillion | Trilliard | 1991 |
| exa | E | $1000^6$ | $10^{18}$ | 1000000000000000000 | Quintillion | Trillion | 1975 |
| peta | P | $1000^5$ | $10^{15}$ | 1000000000000000 | Quadrillion | Billiard | 1975 |
| tera | T | $1000^4$ | $10^{12}$ | 1000000000000 | Trillion | Billion | 1960 |
| giga | G | $1000^3$ | $10^9$ | 1000000000 | Billion | Milliard | 1960 |
| mega | M | $1000^2$ | $10^6$ | 1000000 | Million | | 1960 |
| kilo | k | $1000^1$ | $10^3$ | 1000 | Thousand | | 1795 |
| hecto | h | $1000^{2/3}$ | $10^2$ | 100 | Hundred | | 1795 |
| deca | da | $1000^{1/3}$ | $10^1$ | 10 | Ten | | 1795 |
| | | $1000^0$ | $10^0$ | 1 | One | | – |
| deci | d | $1000^{-1/3}$ | $10^{-1}$ | 0.1 | Tenth | | 1795 |
| centi | c | $1000^{-2/3}$ | $10^{-2}$ | 0.01 | Hundredth | | 1795 |
| milli | m | $1000^{-1}$ | $10^{-3}$ | 0.001 | Thousandth | | 1795 |
| micro | µ | $1000^{-2}$ | $10^{-6}$ | 0.000001 | Millionth | | 1960 |
| nano | n | $1000^{-3}$ | $10^{-9}$ | 0.000000001 | Billionth | Milliardth | 1960 |
| pico | p | $1000^{-4}$ | $10^{-12}$ | 0.000000000001 | Trillionth | Billionth | 1960 |
| femto | f | $1000^{-5}$ | $10^{-15}$ | 0.000000000000001 | Quadrillionth | Billiardth | 1964 |
| atto | a | $1000^{-6}$ | $10^{-18}$ | 0.000000000000000001 | Quintillionth | Trillionth | 1964 |
| zepto | z | $1000^{-7}$ | $10^{-21}$ | 0.000000000000000000001 | Sextillionth | Trilliardth | 1991 |
| yocto | y | $1000^{-8}$ | $10^{-24}$ | 0.000000000000000000000001 | Septillionth | Quadrillionth | 1991 |