Vorkurs

-- 3. Aussagenlogik –

1.10.2015

Aussagenlogik

Rechnen mit Wahrheitswerten: **true** oder **false**, 1 oder 0

Digitalisieren und Berechnen, Beweisen –
Berechenbarkeit, Beweisbarkeit, Entscheidbarkeit:
Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit!

Objekte, die wir untersuchen, sind Aussagen nicht Zahlen.

Zur Bezeichnung für Aussagen nehmen wir Großbuchstaben
A, B, C, …

Verknüpfung (Kombination) von Aussagen liefert neue Aussagen.

Welche Art von Verknüpfungen kommen in Frage?
Wie können wir mit Aussagen rechnen?

Verknüpfungen - Operatoren

Verknüpfungen analog zu +, -, *, / für Zahlen

Aber hier wesentlich einfacher, da ja nur 0 und 1 zur Auswahl.

Beschreibung der Operatoren durch Tabellen = Wahrheitstafeln

Einfachste Operation: Negation (einstellig)

A	$\neg A$
false	*true*
true	*false*

oder

A	$\neg A$
0	1
1	0

oder

A	$\neg A$
falsch	*wahr*
wahr	*falsch*

Zweistellige Operationen auf {0, 1}

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Rechnen „modulo“: Wenn bei einer Operation der zulässige Zahlbereich verlassen wird, dann verschiebt man das Ergebnis wieder in den zulässigen Bereich. Mod m: $n=qm+r \rightarrow r$

Für {0,1} rechnet man praktisch „modulo 2“ (gerade-ungerade).

1 +1 = 2 = 0 modulo 2 (oder ist durch 2 teilbar mit Rest 0)

Diese Art zu rechnen ist für praktische Probleme meist nicht sehr hilfreich, aber mathematisch sehr nützlich!

So hat {0,1} die gleichen Eigenschaften wie IR (Körper).

Andere Operationen auf {0, 1}

max	0	1
0	0	1
1	1	1

min	0	1
0	0	0
1	0	1

Maximum und Minimum als Operator auf {0,1}:

z.B. $0 \; \mathit{max} \; 1 = \max(0,1) = 1$

$0 \; \mathit{min} \; 1 = \min(0,1) = 0$

„UND“ und „ODER“

„UND“-Verknüpfung heißt auch Konjunktion:

A	B	$A \wedge B$
false	*false*	*false*
false	*true*	*false*
true	*false*	*false*
true	*true*	*true*

„ODER“-Verknüpfung heißt auch Disjunktion:

A	B	$A \vee B$
false	*false*	*false*
false	*true*	*true*
true	*false*	*true*
true	*true*	*true*

Vgl. *, max und min auf {0,1}.
Vgl. + ?

Implikation und Äquivalenz

Implikation: „Aus A folgt B“

A	B	$A \Rightarrow B$
false	*false*	*true*
false	*true*	*true*
true	*false*	*false*
true	*true*	*true*

Äquivalenz: „A genau dann, wenn B“

A	B	$A \Leftrightarrow B$
false	*false*	*true*
false	*true*	*false*
true	*false*	*false*
true	*true*	*true*

Logik-Test

Peter Wason – Test:
Spielkarten mit Vorderseite Buchstabe, Rückseite Zahl.
Vermutete Regel (Implikation):
Wenn auf der einen Kartenseite ein Vokal steht, befindet sich auf der Rückseite eine gerade Zahl.

Gegeben 4 Karten:

E	K	4	7

Frage: Sie dürfen 2 Karten umdrehen, um die Regel zu testen.
Welche beiden Karten wählen Sie?

Zweistellige Verküpfungen

Wieviele zweistellige Verküpfungen gibt es?

A	B	$A \; op \; B$
false	*false*	a
false	*true*	b
true	*false*	c
true	*true*	d

mit $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}$ entweder 0 oder 1.

Also $2^4 = 16$ Möglichkeiten.

Neben ∧, ∨, $\Rightarrow, \Leftrightarrow, +, \cdot$, max, min, auch noch NAND, NOR, XOR, …

Umformungsgesetze und Rechenregeln I

Wiederholte Verknüpfung von mehreren Aussagen liefert Funktion von Aussagen.
Funktionswerte sind Wahrheitswerte für alle auftretenden Fälle
→ Wahrheitstafel.

Zwei Funktionen sind gleich, wenn sie identische Wahrheitstafeln haben.

Beispiel: $A \Leftrightarrow B$ gleichwertig mit $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
false	*false*	*true*	*true*	*true*	*true*
false	*true*	*true*	*false*	*false*	*false*
true	*false*	*false*	*true*	*false*	*false*
true	*true*	*true*	*true*	*true*	*true*

Umformungsgesetze und Rechenregeln II

Implikation $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \Rightarrow B$
false	*false*	*true*	*true*	*true*
false	*true*	*true*	*true*	*true*
true	*false*	*false*	*false*	*false*
true	*true*	*false*	*true*	*true*

Frage: Wieviele Operatoren braucht man, um alle logischen Operatoren darstellen zu können? Warum ist diese Frage interessant?

Kommutativität und Assoziativität

Zwei Kommutativgesetze:

Vgl. a·b = b·a, a+b=b+a

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

Zwei Assoziativgesetze:

Vgl. (a·b)·c= a·(b·c)
(a+b)+c= a+(b+c)

$$\left(A \wedge B\right) \wedge C = A \wedge \left(B \wedge C\right)$$

$$\left(A \vee B\right) \vee C = A \vee \left(B \vee C\right)$$

Distributivgesetze und De Morgan

Zwei Distributivgesetze: Vgl. (a+b)·c=a·c+b·c

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

De Morgan‘sche Regeln: Vgl. ????

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Beweis durch Wahrheitstafel!

Weitere Regeln

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A \qquad A \vee \neg A = true \qquad A \wedge true = A$$

$$A \vee A = A \qquad A \wedge \neg A = false \qquad A \vee false = A$$

Anwendung der Regeln als Ersatz für Wahrheitstafeln:

$$(A \wedge B) \vee (\neg A) = (A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg A) =$$
$$= true \wedge (B \vee (\neg A)) = B \vee (\neg A) = (\neg A) \vee B = (A \Rightarrow B)$$

Konjunktive/Disjunktive Normalform.

$(. \wedge .) \vee (. \wedge .) \vee \ldots$ oder $(. \vee .) \wedge (. \vee .) \wedge \ldots$

KNF aus Wahrheitstafel

A	B	C	
0	0	0	1
.	.	.	1
1	0	0	0 ←
.	.	.	1
1	1	0	0 ←
.	.	.	1

$$f(A,B,C) = (\neg A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

DNF aus Wahrheitstafel

A	B	C	
0	0	0	0
.	.	.	0
0	1	0	1
.	.	.	0
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Halbaddierer

$$S(A, B)$$
$$\ddot{U}(A, B)$$

A	B	S	$\ddot{U}$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$\ddot{U} = A \wedge B,$$
$$S = A + B = \neg(A \Leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) =: A \oplus B$$

Reicht das schon zum Addieren?

Volladdierer

$$\ddot{U}_{out}(A, B, \ddot{U}_{in})$$

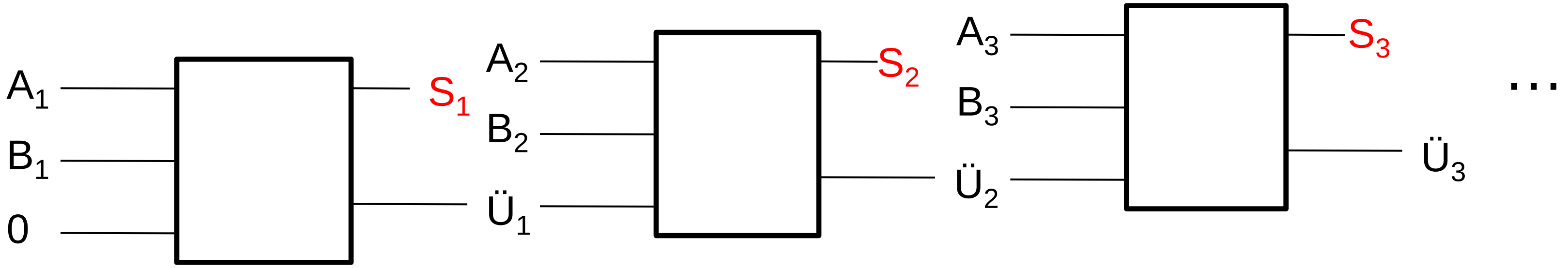
$$S(A, B, \ddot{U}_{in})$$

A	B	$\ddot{U}_{in}$	$\ddot{U}_{out}$	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$$S = A \oplus B \oplus \ddot{U}_{in}, \qquad \ddot{U}_{out} = (A \wedge B) \vee (A \wedge \ddot{U}_{in}) \vee (\ddot{U}_{in} \wedge B)$$

Addition zweier Zahlen

Eingabe: … $A_3\ A_2\ A_1$ und … $B_3\ B_2\ B_1$



Ausgabe: Summe von … $A_3\ A_2\ A_1$ und … $B_3\ B_2\ B_1$
in … $S_3\ S_2\ S_1$.

Logik: Widersprüche

Hans ist Friseur in Garching.
Er rasiert jeden Morgen nur genau diejenigen in Garching, die sich nicht selbst rasieren.
Rasiert er sich selbst oder nicht?

Hans der Friseur sagt: Alle Friseure lügen immer.

Widerspruch durch Selbstbezüglichkeit.
Anwendung in der Mathematik und Informatik.

Allmenge sei die Menge, die alle Mengen enthält.
Enthält sich die Allmenge dann auch selbst?

Goedel Escher Bach