Vorkurs Mathematik für Informatiker

-- 3 Aussagenlogik und Beweisen --

Thomas Huckle
Stefan Zimmer

5.10.2018

Aussagenlogik

Rechnen mit Wahrheitswerten: **true** oder **false**, 1 oder 0

Digitalisieren und Berechnen, Beweisen

Objekte, die wir untersuchen, sind jetzt Aussagen.

Zur Bezeichnung für Aussagen nehmen wir Großbuchstaben
A, B, C, …

Verknüpfung (Kombination) von Aussagen liefert neue Aussagen.

Welche Art von Verknüpfungen kommen in Frage?

Verknüpfungen - Operatoren

Verknüpfungen analog zu +, -, *, / für Zahlen

Aber hier wesentlich einfacher, da ja nur 0 und 1 zur Auswahl.

Beschreibung der Operatoren durch Tabellen = Wahrheitstafeln

Einfachste Operation: Negation

A	$\neg A$
false	*true*
true	*false*

oder

A	$\neg A$
0	1
1	0

oder

A	$\neg A$
falsch	*wahr*
wahr	*falsch*

Andere Operationen auf {0, 1}

+	0	1
0	0	1
1	1	0

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Rechnen „modulo“: Wenn bei einer Operation der zulässige Zahlbereich verlassen wird, dann verschiebt man das Ergebnis wieder in den zulässigen Bereich.

Für {0,1} rechnet man praktisch „modulo 2“ (gerade-ungerade).

1 +1 = 2 = 0 modulo 2

Diese Art zu rechnen ist für praktische Probleme meist nicht sehr hilfreich, aber mathematisch sehr nützlich!

So hat {0,1} die gleichen Rechen-Eigenschaften wie IR.

Andere Operationen auf {0, 1}

max	0	1
0	0	1
1	1	1

min	0	1
0	0	0
1	0	1

Maximum und Minimum als Operator auf {0,1}:

z.B. $0 \; \mathit{max} \; 1 = \max(0,1) = 1$

$0 \; \mathit{min} \; 1 = \min(0,1) = 0$

„UND“ und „ODER“

„UND“-Verknüpfung heißt auch Konjunktion:

A	B	$A \wedge B$
false	*false*	*false*
false	*true*	*false*
true	*false*	*false*
true	*true*	*true*

„ODER“-Verknüpfung heißt auch Disjunktion:

A	B	$A \vee B$
false	*false*	*false*
false	*true*	*true*
true	*false*	*true*
true	*true*	*true*

Vgl. *, max und min auf {0,1}. Vgl. + ?

Implikation und Äquivalenz

Implikation: „Aus A folgt B“

A	B	$A \Rightarrow B$
false	*false*	*true*
false	*true*	*true*
true	*false*	*false*
true	*true*	*true*

Äquivalenz: „A genau dann, wenn B“

A	B	$A \Leftrightarrow B$
false	*false*	*true*
false	*true*	*false*
true	*false*	*false*
true	*true*	*true*

Logik-Test

Peter Wason – Test:
Spielkarten mit Vorderseite Buchstabe, Rückseite Zahl.
Vermutete Regel:
Wenn auf der einen Kartenseite ein Vokal steht, dann befindet sich auf der Rückseite eine gerade Zahl.

Gegeben 4 Karten:

E	K	4	7

Frage: Sie dürfen 2 Karten umdrehen, um die Regel zu testen.
Welche beiden Karten wählen Sie?

Zweistellige Verküpfungen

Wieviele zweistellige Verküpfungen gibt es?

A	B	$A\ op\ B$
false	*false*	a
false	*true*	b
true	*false*	c
true	*true*	d

mit $\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}$ entweder 0 oder 1.

Also $2^4 = 16$ Möglichkeiten.

Neben $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow, \Longleftrightarrow, +, \cdot$, max, min, auch noch NAND, NOR, XOR, …

Umformungsgesetze und Rechenregeln I

Wiederholte Verknüpfung von mehreren Aussagen liefert Funktion von Aussagen.
Funktionswerte sind Wahrheitswerte für alle auftretenden Fälle → Wahrheitstafel.

Zwei Funktionen sind gleich, wenn sie identische Wahrheitstafeln haben.

Beispiel: $A \Leftrightarrow B$ gleichwertig mit $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
false	*false*	*true*	*true*	*true*	*true*
false	*true*	*true*	*false*	*false*	*false*
true	*false*	*false*	*true*	*false*	*false*
true	*true*	*true*	*true*	*true*	*true*

Umformungsgesetze und Rechenregeln II

Implikation $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $(\neg A) \vee B$:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$	$A \Rightarrow B$
false	*false*	*true*	*true*	*true*
false	*true*	*true*	*true*	*true*
true	*false*	*false*	*false*	*false*
true	*true*	*false*	*true*	*true*

Frage: Wieviele Operatoren braucht man, um alle logischen Operatoren darstellen zu können?

Kommutativität und Assoziativität

Zwei Kommutativgesetze: Vgl. $a \cdot b = b \cdot a$, $a+b=b+a$

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

Zwei Assoziativgesetze: Vgl. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(a+b)+c = a+(b+c)$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Distributivgesetze und De Morgan

Zwei Distributivgesetze: Vgl. (a+b)·c=a·c+b·c

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$
$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

De Morgan'sche Regeln: Vgl. ????

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Beweis durch Wahrheitstafel!

Weitere Regeln

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A \qquad A \vee \neg A = true \qquad A \wedge true = A$$

$$A \vee A = A \qquad A \wedge \neg A = false \qquad A \vee false = A$$

Anwendung der Regeln als Ersatz für Wahrheitstafeln:

$$(A \wedge B) \vee (\neg A) = (A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg A) =$$
$$= true \wedge (B \vee (\neg A)) = B \vee (\neg A)$$

Konjunktive/Disjunktive Normalform.

$(.\wedge.) \vee (.\wedge.) \vee \ldots$ oder $(.\vee.) \wedge (.\vee.) \wedge \ldots$

KNF aus Wahrheitstafel

A	B	C	
0	0	0	1
.	.	.	1
1	0	0	0 ⟵
.	.	.	1
1	1	0	0 ⟵
.	.	.	1

$$f(A,B,C)=\left(\neg A\vee B\vee C\right)\wedge\left(\neg A\vee\neg B\vee C\right)$$

DNF aus Wahrheitstafel

A	B	C	
0	0	0	0
.	.	.	0
0	1	0	1
.	.	.	0
1	1	1	1

$$f(A,B,C) = (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Halbaddierer

$$S(A, B)$$

$$\ddot{U}(A, B)$$

A	B	S	$\ddot{U}$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

$$\ddot{U} = A \wedge B,$$

$$S = A + B = \neg(A \Leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) =: A \oplus B$$

Reicht das schon zum Addieren?

Volladdierer

$\ddot{U}_{out}(A, B, \ddot{U}_{in})$

$S(A, B, \ddot{U}_{in})$

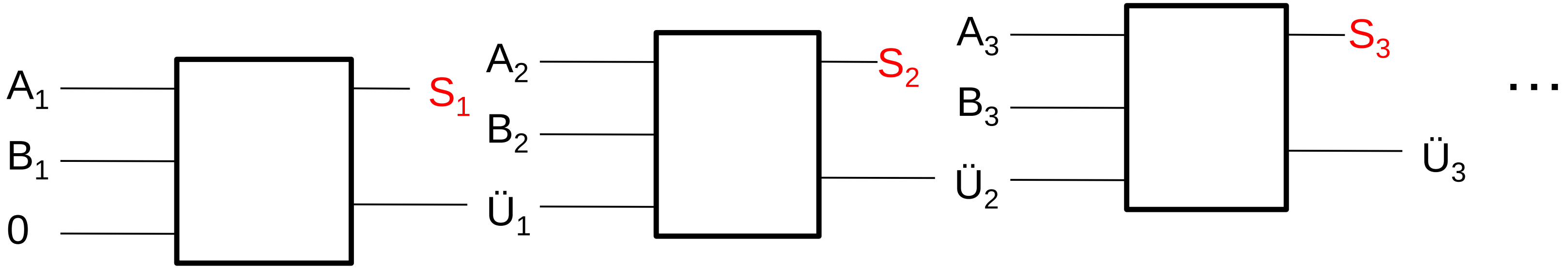
A	B	$\ddot{U}_{in}$	$\ddot{U}_{out}$	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

$S = A \oplus B \oplus \ddot{U}_{in}$

$\ddot{U}_{out} = (A \wedge B) \vee (\ddot{U}_{in} \wedge (A \oplus B))$

Addition zweier Zahlen

Eingabe: … $A_3\, A_2\, A_1$ und … $B_3\, B_2\, B_1$



Ausgabe: Summe von … $A_3\, A_2\, A_1$ und … $B_3\, B_2\, B_1$
in … $S_3\, S_2\, S_1$.

Widersprüche

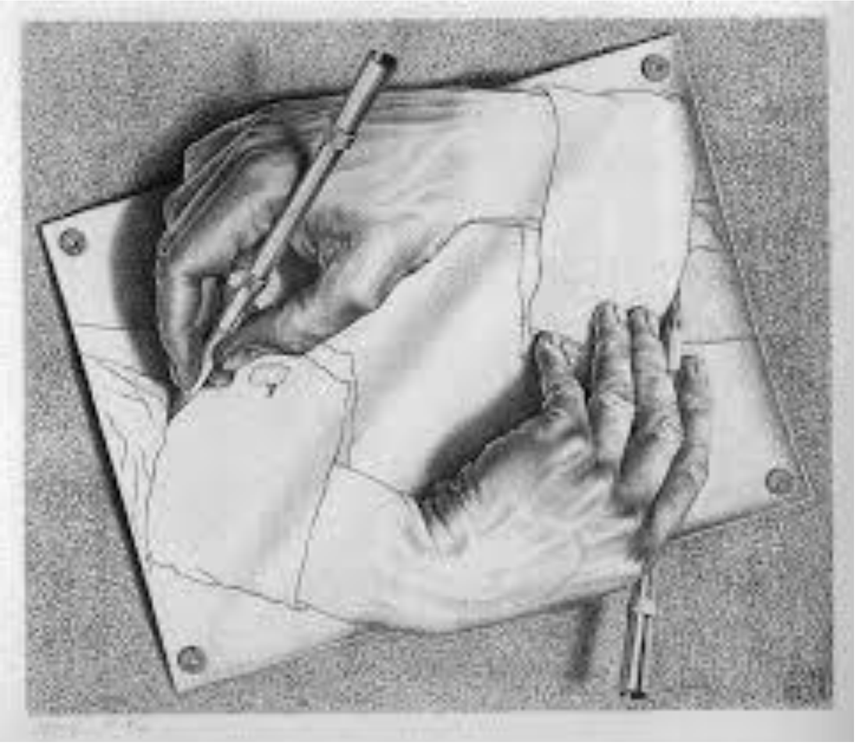
Hans ist Friseur in Aubing.
Er rasiert jeden Morgen genau alle Männer in Aubing, die sich nicht selbst rasieren!
Rasiert er sich selbst oder nicht?

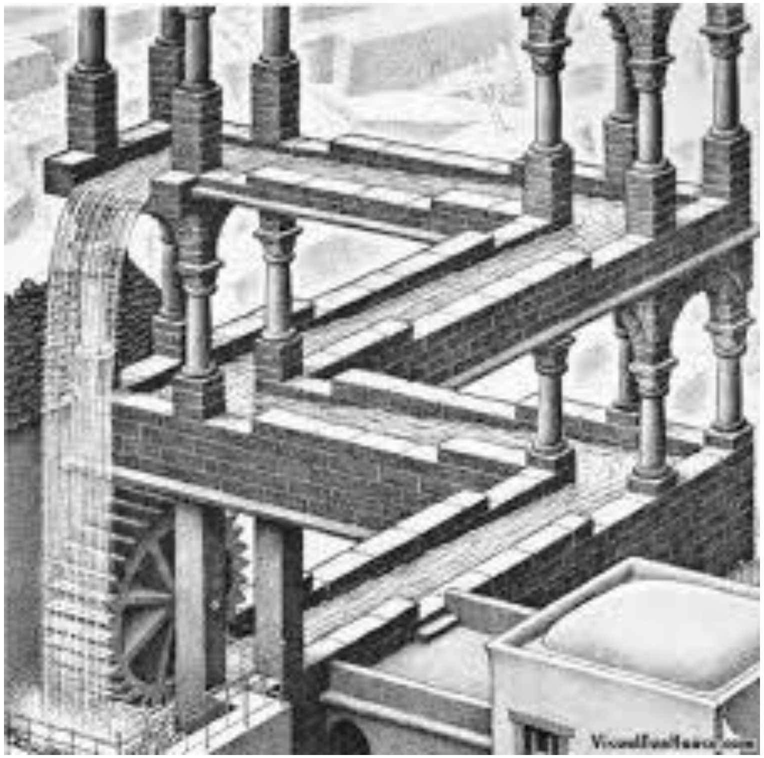
Epimenides der Kreter sagte: „Alle Kreter sind Lügner“
„Ich lüge jetzt!“ oder „Diese Aussage ist falsch!“

Widerspruch durch Selbstbezüglichkeit.
Anwendung in der Mathematik und Informatik.

Allmenge sei die Menge, die alle Mengen enthält.
Enthält sich die Allmenge dann auch selbst?

Goedel Escher Bach





Aussageformen

Aussagen können auch Parameter enthalten (z.B. x)

Wahr oder falsch hängt dann vom Parameter x ab.

Können natürlich auch mehrere Parameter sein.

Beispiel einer solchen Aussage: A = „x > 0“

Für welche gegebene x ist dann diese Aussage wahr?
Für x=2 würde daher gelten: A = true

Ist eine solche Aussage überhaupt erfüllbar?

$(x > 0) \wedge (x < 2)$ oder $(x < 0) \wedge (x > 2)$

Quantoren

z.B. der Allquantor:

$$\forall x \in \mathrm{IR} : x^2 \geq 0,$$

Ist nur wahr, wenn wirklich **für alle** x ϵ IR gilt: $x^2 \geq 0$.

Der Existenzquantor:

$$\exists x \in \mathrm{IR} : x^2 = 5,$$

Es gibt ein xϵIR mit $x^2=5$

Nur wahr, wenn es
ein (oder mehrere) x in IR gibt mit $x^2 = 5$.

Wir „wissen", dass $x = \pm\sqrt{5}$ eine solche reelle Zahl ist.

Beweisen

Wesentlicher Inhalt der Mathematik:
Aussagen und ihre Beweise

Mit den vorgestellten Mitteln sind wir nun in der Lage, Behauptungen formal aufzuschreiben.

Um diese formalen Behauptungen zu beweisen, bzw. die Aussagen auf Wahrheit zu prüfen, gibt es nun verschiedene Beweistechniken, die wir uns anschauen wollen.

(1) Direkter Beweis: Man startet mit einer Aussage, deren Richtigkeit als angenommen/bewiesen/offensichtlich gilt, und leitet daraus neue Aussagen her, die dann auch gelten, bis man in einer letzten Ableitung bei der Aussage ankommt, die man eigentlich beweisen wollte.

Widerspruchsbeweis I

Dabei nimmt man das Gegenteil der Behauptung an, die man zeigen will, und leitet daraus einen Widerspruch her zu anderen, schon als wahr erkannten Aussagen.

$A \Rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$ wird bewiesen,

indem wir $\neg(\neg A \vee B) = A \wedge \neg B \overset{!}{=} false$ zeigen!

Beispiel: $\sqrt{2}$ ist irrational (kein Bruch).

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$, p und q teilerfremd

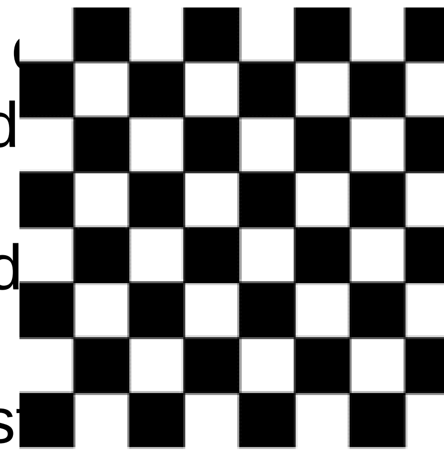
Dann muss p gerade sein, p=2r → $q^2 = 2r^2$ → q gerade

Konstruktivismus!

Widerspruchsbeweis II

Aussage;
Ein Schachbrett, dem zwei gegenüber liegende Ecken fehlen, kann nicht mit 1 x 2 – Dominosteinen lücken- und überschneidungslos ausgefüllt werden.

Wir nehmen das Gegenteil an, nämlich, dass es (
Anordnung von Dominosteinen gibt, die das Feld



→Jeder Dominostein belegt genau ein weißes und
schwarzes Feld

→Dann belegt eine beliebige Menge von Dominost
gleich viele schwarze wie weiße Felder

→Das reduzierte Schachbrett hat aber 30 weiße und 32 schwarze Felder (oder umgekehrt), da gegenüber liegend Felder die gleich Farbe haben.

Vollständige Induktion I

Idee: Ist eine Aussage A(n)
für n = 1 wahr, und
ist für alle ganzen Zahlen n ≥ 1 die Folgerung:
A(n) → A(n+1)
gültig, dann ist A(n) wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel-Aussage A(n): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

Induktionsanfang n=1:

$$\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = (2 \cdot 1 - 1) = 1 = 1^2$$

Vollständige Induktion II

Induktionsschritt n → n+1:

Sei für n ≥ 1 die Behauptung wahr, also

Induktionsvoraussetzung $$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

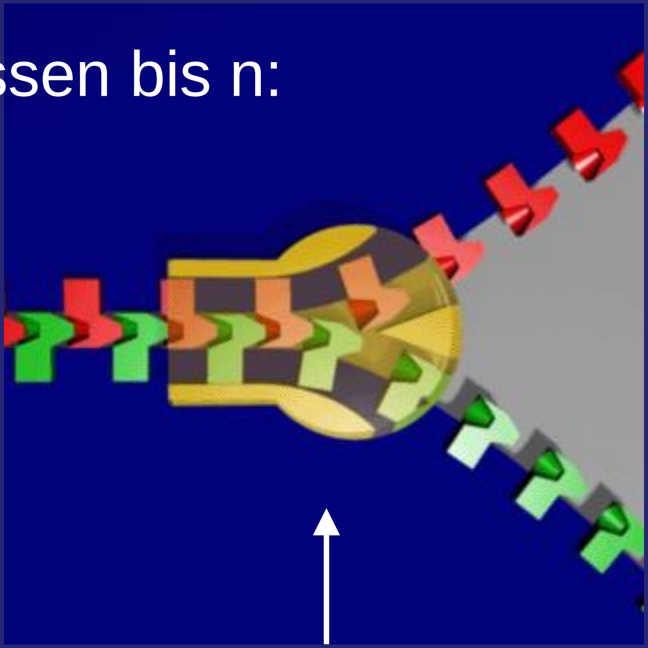
Dann folgt für n+1

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)}_{\text{Ind.Voraussetzung,}}+\underbrace{(2(n+1)-1)}_{\text{Term n+1}}=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Weitere Beispiele: geometrische Reihe, Binomial

Geschlossen bis n:

Einfädeln:
Induktionsanfang



Beliebig weit.

Zipper: Schluss von n nach n+1

Induktion Pferde

Alle Pferde haben dieselbe Farbe:

Induktionsbeweis für Behauptung: Jede Menge von Pferden
hat dieselbe Farbe

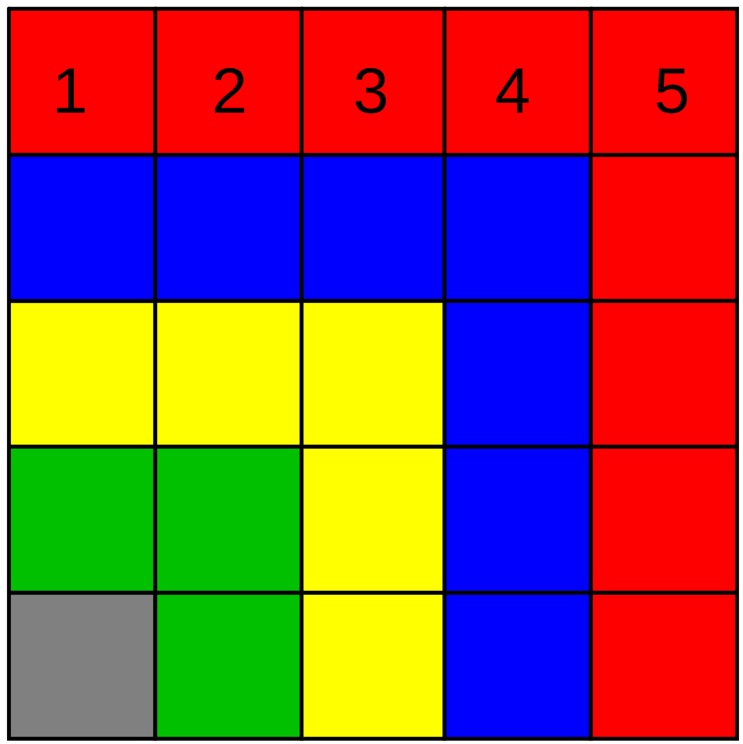
Induktionsanfang: 1 Pferd. OK

Induktionsschritt: Alle n Pferde-mengen haben dieselbe Farbe

n+1 Pferdemengen haben Überlapp.
Daher auch hier dieselbe Farbe

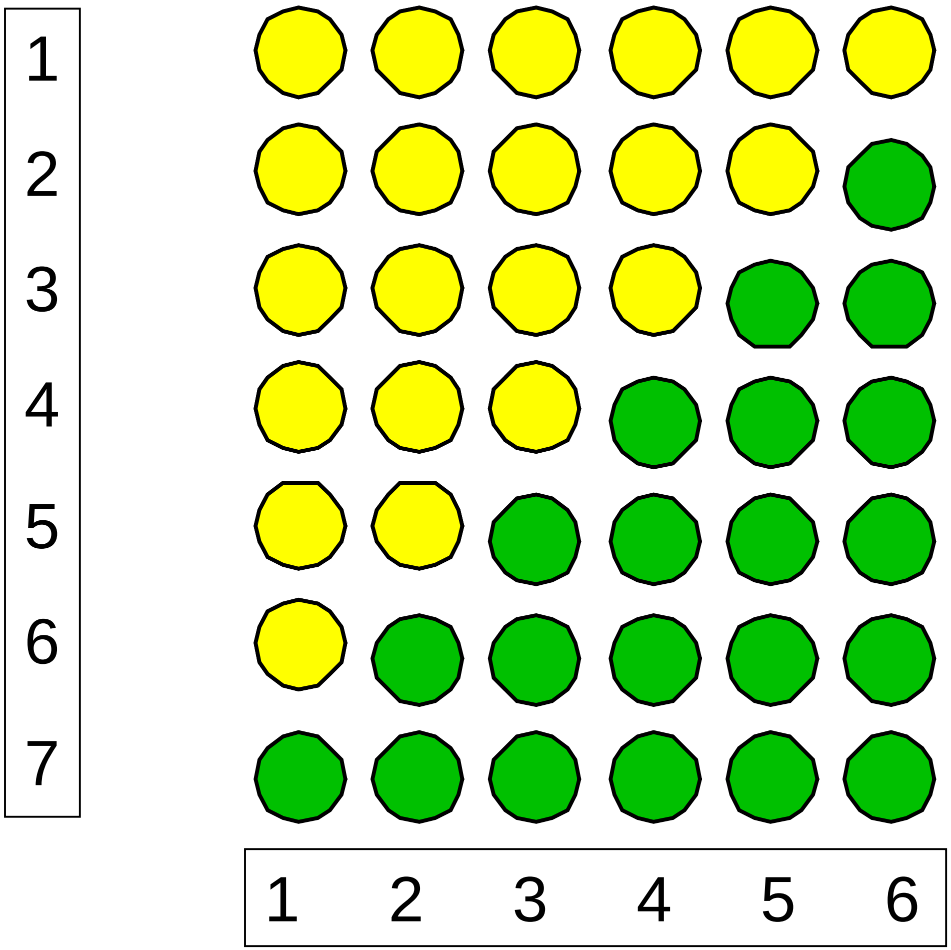
Beweis ohne Worte

Direkter Beweis: Die Summe der ungeraden Zahlen bis $2n-1$ ist gleich dem Quadrat von n:



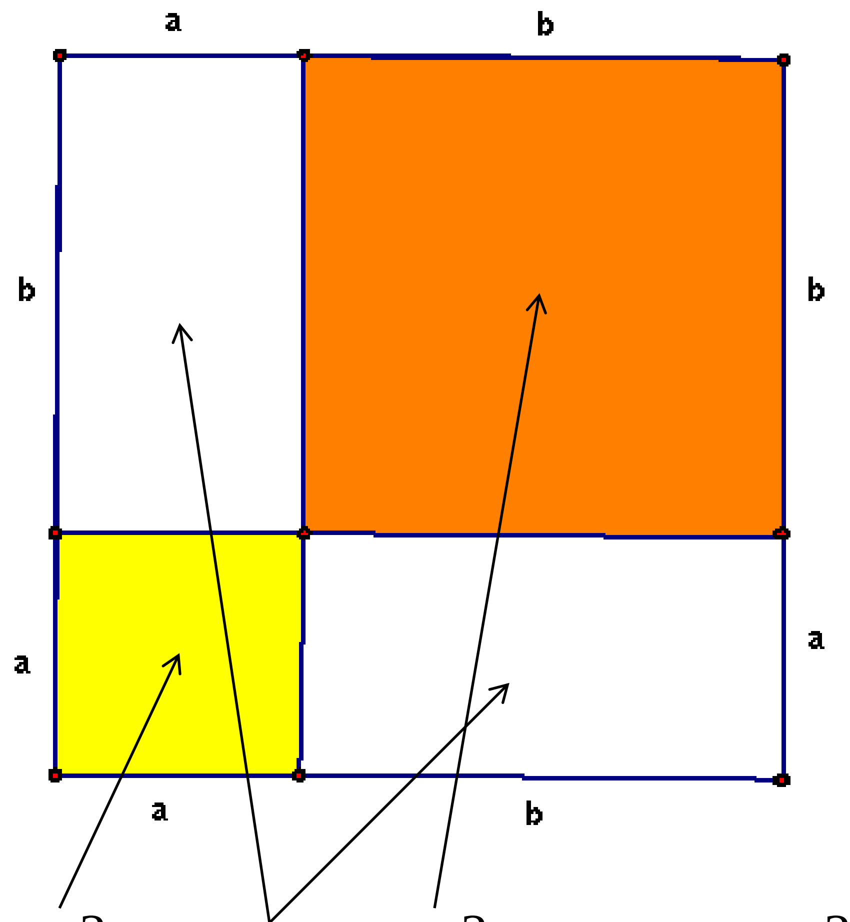
$1 \quad +3 \quad +5 \quad +7 \quad +9 \qquad = 5^2$

$$1+2+3+\ldots+n=?$$



$$=(n+1)\cdot n/2$$

?



$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$sum = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} = 4/3 \qquad 3 \cdot sum = 4$$

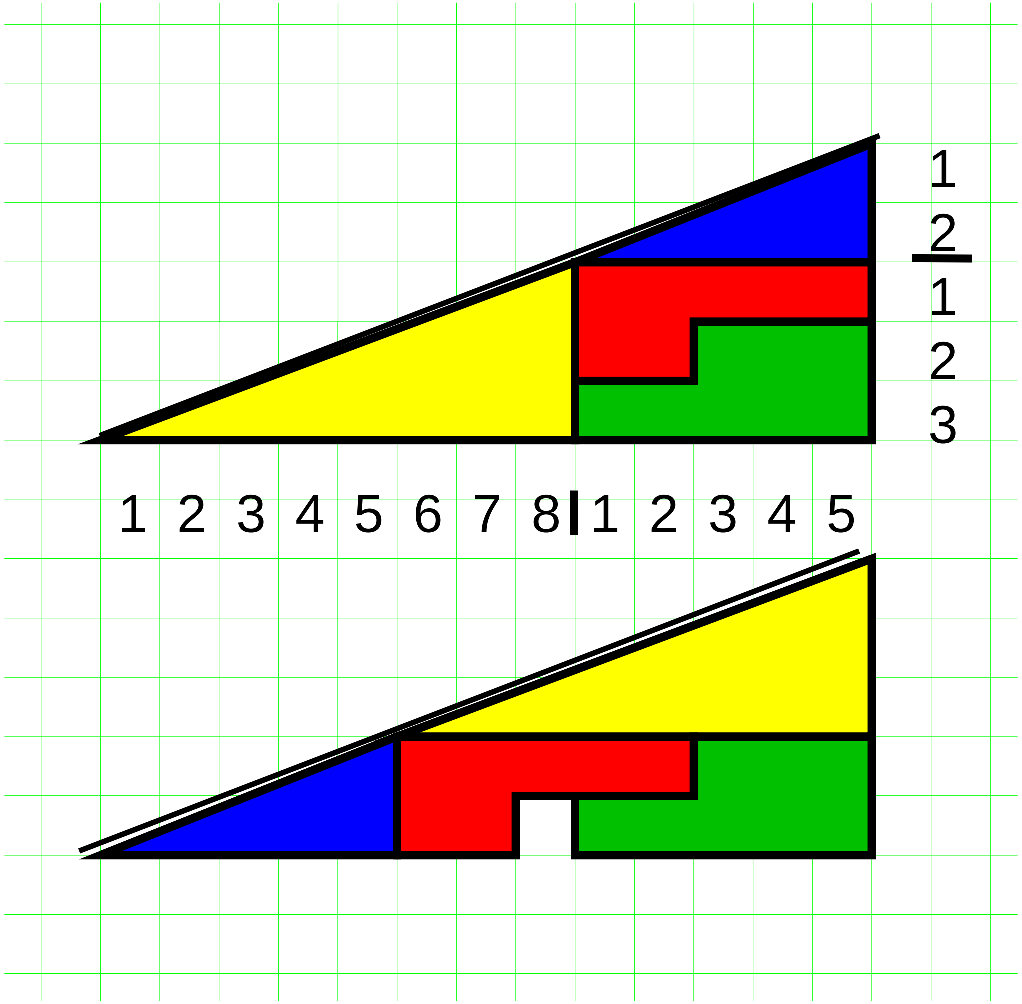
1

1

1

Ist das möglich?

8/3 ≠ 5/2



Von Pólya stammen folgende Forderungen:

- *Man muss einen mathematischen Satz erraten, ehe man ihn beweist;*
- *man muss die Idee eines Beweises erraten, ehe man die Details ausführt;*
- *man muss Beobachtungen kombinieren und Analogien verfolgen;*
- *man muss immer und immer wieder probieren.*

Das Resultat der schöpferischen Tätigkeit eines Mathematikers ist demonstratives Schließen, ist ein Beweis;
aber entdeckt wird der Beweis durch plausibles Schließen, durch Erraten.

Vorgehensweise beim Lösen von Übungsaufgaben?

Klassische Beweistechniken

Beweis durch Hinschauen: „Diese Aussage ist trivial?!“

Beweis durch Delegation:
„Machen Sie das mal als Übungsaufgabe!“

Beweis durch Ermüdung:
Solange Umformen, bis jeder den Überblick verloren hat.

Beweis durch Pause:
„ Das schaffen wir vor der Pause nicht mehr ….“
„Wie wir vor der Pause bewiesen haben …“

Beweis durch Beispiele:
Die Aussage gilt für n=1 und n=2 also für alle n

Beweis durch Wischen:
Die Aussage und Beweis an die Tafel schreiben und sofort wieder weg wischen

„Klassische“ Beweise

Behauptung: *Alle natürlichen Zahlen sind interessant.*

Beweis: *Angenommen, es wäre nicht so. Dann existiert eine kleinste natürliche Zahl, die nicht interessant ist. Diese Zahl ist offensichtlich interessant, was der Annahme, dass sie nicht interessant ist, widerspricht. Dies ist ein Widerspruch, also muss die Annahme falsch sein, womit die Behauptung gezeigt ist.*

Behauptung: *In jedem Zimmer gibt es unendlich viele Fliegen.*

Beweis: *Offensichtlich existiert in jedem Raum mindestens eine Fliege. Egal, wie viele Fliegen in einem Zimmer eliminiert werden, wird immer mindestens eine Fliege übrig bleiben!*

Behauptung: *In einen Koffer passen unendlich viele Taschentücher.*

Beweis: *Offensichtlich passt ein Taschentuch in jeden Koffer. Egal, wie voll der Koffer schon ist, wird es immer möglich sein, noch ein weiteres Taschentuch hinein zu quetschen.*

Behauptung: *Mathematiker sind konvergent.*

Beweis: *Mathematiker sind monoton und beschränkt. q.e.d.*