Vorkurs

-- 4. Mengen –

5.10.2018

Was ist eine Menge?

Beispiele: IN, IR, Autos, Deutsche (Östereicher), Mann/Frau…

Saubere Definition einer Menge ist schwierig!
Erst Grundmenge definieren?

Pragmatischer Ansatz (als Informatiker):
Alles, was aussieht wie eine Menge, ist eine Menge,
z.B. Menge von Zahlen, …

Wichtig für uns: Wie geht man mit Mengen um, also
Definition einer Menge in Programm und Algorithmen.

Eigenschaften von Mengen

Mengen bekommen abkürzende Namen:

A, B, C, IN, IR, $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{P}, \ldots$

Für ein bestimmtes **„Ding“** x und eine Menge A können wir feststellen, ob x ein **Element** von A ist:

$$x \in A \qquad oder \qquad x \notin A$$

Offensichtliche Verwandtschaft zur Aussagenlogik:

$\in$ Ja oder Nein

wahr, true, 1 oder falsch, false, 0

Ev. unentschieden? Fuzzy? Z.B. Menge der Deutschen

Exkurs: Fuzzy-Menge

Menge der Deutschen:
Man kann 100% Deutscher sein, oder 0%, aber auch 50% usw..

d.h. die Mitgliedschaft eines Elementes x in der Menge D wird beschrieben z.B. durch die Werte

0=kein, 0.5 = unentschieden , 1=voll

oder allgemeiner durch eine Funktion

$m(x)$, mit $0 \le m(x) \le 1$

d.h. x ist Mitglied in der Menge D vom Grad $m(x)$

$m(x)$ als Grad der „Deutschheit“

Person:	Hans Müller	Wladimir Putin	Valery Miller
Grad:	1	0	0.5

Notation von Mengen

Einfache Mengen schreiben wir durch Angeben aller Elemente:

$$A := \{1,2,3\};$$

oder mittels Abkürzung

$$A := \{1,2,3,\cdots,10000\};$$

oder

$$\mathbb{Z} := \{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\};$$

Notation II

Zur besseren Eindeutigkeit:

$$B := \{x \in IN : \quad 1 \leq x \leq 10000\}$$

Doppelpunkt „:“ ist zu lesen als „für die gilt“

Menge der Zweierpotenzen:

$$C := \{x \in IN : \quad \exists i \in IN_0 : \quad x = 2^i\};$$

oder kürzer:

$$C := \{2^i : \quad i \in IN_0\};$$

Speziell die leere Menge $\varnothing = \{\ \}$ ist definiert durch

$$\forall x : \qquad x \notin \varnothing$$

Vergleich von Mengen

Die Anzahl der Elemente (Mächtigkeit) einer Menge A bezeichnen wir mit |A|

Beispiel:

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{1,2,4,6\}| = 4$$

Mächtigkeit von Mengen führt auf IN und Rechnen mit Integer:
$|\emptyset| = 0$, $|\{a\}| = 1$, $|\{a,b\}| = 2$, …

Zwei Mengen sind gleich, wenn sie genau dieselben Elemente enthalten:

$$\forall x: \quad \{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$$

Für alle x gilt: x ist in A genau dann wenn x ist in B

So sind die Mengen {1,2,3} und {2,3,1} gleich.

Teilmengen

A heißt Teilmenge von B, in Zeichen $A \subseteq B$, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind:

$$\forall x: \quad \{x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

Für alle x gilt: ist x in A dann ist x auch in B

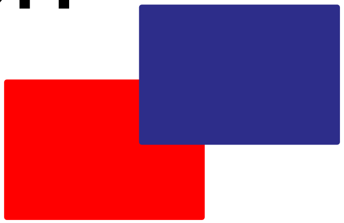
Beispiele:

$$\{1\} \subseteq IN$$

$$1 \in IN$$

$$1 \subseteq IN\,? \qquad \{1\} \in IN\,?$$

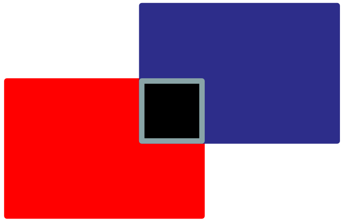
Mengenoperationen



Wir definieren

die Schnittmenge $A \cap B$:

$$x \in A \cap B :\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$



Die Vereinigungsmenge $A \cup B$:

$$x \in A \cup B :\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

Die Differenzmenge $A \setminus B$

$$x \in A \setminus B :\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg (x \in B))$$

Gesetze für Mengenoperationen

Für $\cap$ und $\cup$ gelten ähnliche Gesetze wir für $\wedge$ und $\vee$.

z.B.: $A \cap B = B \cap A$

$$(A \cap B) \cap C = B \cap (A \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

wobei der Strich das Komplement bezeichnet.

Grundmenge G: 

Das kartesische Produkt

Das kartesische Produkt A x B enthält alle Paare von Elementen aus A und B:

$$A \times B := \{(a,b): \quad a \in A, b \in B\}.$$

A x A geht natürlich auch

und A x B x C ist analog definiert als Triple aus A,B,C

Beispiel: Spielpaarungen in der Bundesliga
(natürlich ohne (a,a))
Tabelle

Wichtig für Funktionen (x,f(x)) und Relationen (x,y)
und für Tabellen (Teilmengen des kartesischen Produkts)

Potenzmenge

Mengen können auch wieder Elemente anderer Mengen sein:

$$A := \{\{1,2,3\},4,\emptyset\};$$

Beispiel: Die Potenzmenge P(A) einer Menge A,
d.h. die Menge aller Teilmengen von A:

$$P(A) := \{B : \qquad B \subseteq A\}$$

Beispiel: A={1,2} → P(A) = { Ø, {1}, {2}, {1,2} }

Mächtigkeit: |A| = n → |P(A)| = [redacted]. Beweis?

Abstruse Mengen

Menge aller irrationalen Zahlen

Menge aller Dezimalzahlen, bei denen 1 nur endlich oft als Ziffer vorkommt (oder bei denen 1 unendlich oft vorkommt!)

Ev. schwierig: Test auf Mitgliedschaft in der Menge

Widersprüche: Allmenge
Cantor, Auswahlaxiom

Mehr über Mächtigkeit

Mächtigkeit einer endlichen Menge A: $|A| = n$

Mächtigkeit von unendlichen Mengen durch Abzählen:

Abzählbar $\leftrightarrow$ IN, **Z**, **Q,** die geraden Zahlen,…

Nicht abzählbar, z.B. IR