Vorkurs

-- 5. Relationen –

8.10.2018

Relationen

Mit Relationen können wir Beziehungen zwischen je zwei Dingen ausdrücken.
Seien dazu A und B zwei Mengen, etwa

$$A := \{Kuh, Schaf, Ziege, Fisch\}$$

und

$$B := \{"Muh", "Mäh", "\ \ "\}$$

Eine Relation R ist dann eine Menge mit den Paaren (a,b) mit einem a∊A und b∊B, von denen wir sagen wollen, dass a mit b in Beziehung steht.

Eine Relation ist daher eine Teilmenge des kartesischen Produkts $(R \subseteq A \times B)$: alle Paare (a,b)

Notation

Statt (a,b)$\in$R schreibt man meist aRb (insbesondere, wenn der Name der Relation kein Buchstabe wie R ist, sondern irgendein schönes Symbol, z.B.
$\leq$, $\blacktriangleleft$, $\equiv$, $\|$

Definieren wir z.B. die Relation $\blacktriangleleft$ als „kann sagen“, Können wir folgende Relation bilden:

$\blacktriangleleft$:= { (Kuh,“Muh“), (Kuh,“ “), (Schaf,“Mäh“), (Schaf,“ “), (Ziege,“Mäh“), (Ziege,“ “), (Fisch,“ “) }

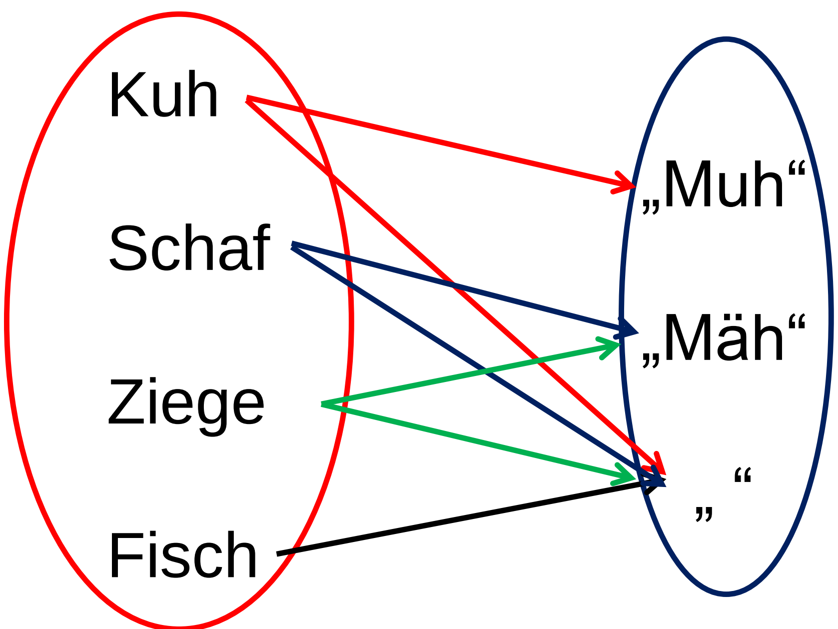
Damit haben wir z.B. folgendes:
Kuh $\blacktriangleleft$ „Muh“, Kuh $\blacktriangleleft$ „ “ , aber
Kuh $\not\blacktriangleleft$ „Mäh“ (will heißen: $\neg$(Kuh $\blacktriangleleft$ „Mäh“)).

Graphen

$$A := \{Kuh, Schaf, Ziege, Fisch\}$$

$$B := \{"Muh", "Mäh", "\ "\}$$

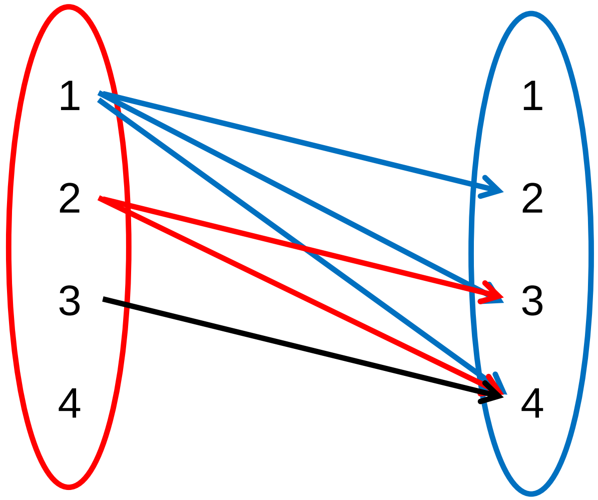
◀ := { (Kuh,“Muh“), (Kuh,“ “), (Schaf,“Mäh“), (Schaf,“ “), (Ziege,“Mäh“), (Ziege,“ “), (Fisch,“ “) }

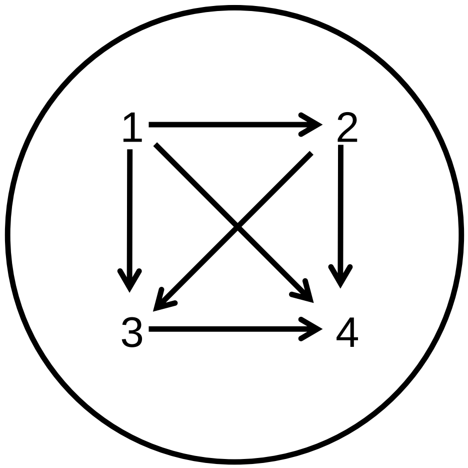


Gleich, Kleiner, …

Zwei Mengen A und B können dieselbe Menge, also gleich sein, z.B. A = B = {1,2,3,4}

Auf diese Menge kann man die Relation „ist echt kleiner“ untersuchen. Sie enthält 6 Paare:





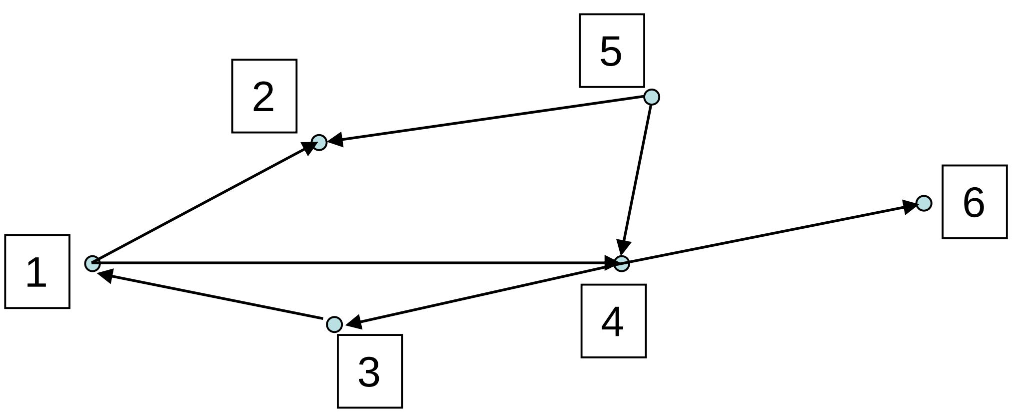
Weitere Beispiele

Teilmengen: Betrachte zu Grundmenge E alle Teilmengen
Relation: „ist Teilmenge von"

Hierachie: Vergleiche Elemente einer Menge nach ihrer wechselseitigen Priorität
Relation: „hat höhere Priorität als"

Funktionen: xRy $\leftarrow\rightarrow$ f(x)=y
Relation: „ist Funktionswert von"

Internet:



{(1,2),(1,4),(3,1),(3,4),(4,3),(4,6),(5,2),(5,4)}

Eigenschaften von Relationen

Relationen lassen sich klassifizieren anhand möglicher Eigenschaften.

Typisches Vorgehen von Mathematikern:

1) Definiere etwas, z.B. Mengen, Relationen
2) Untersuche, welche Eigenschaften diese „Dinge“ haben können. Suche Struktur.

Eine Relation R heißt

Reflexiv, wenn gilt $\forall x \in A: \quad xRx$

Symmetrisch, wenn gilt $\forall x, y \in A: \quad xRy \Rightarrow yRx$

Asymmetrisch, wenn gilt $\forall x, y \in A: \quad xRy \Rightarrow \neg yRx$

Antisymmetrisch, wenn gilt $\forall x, y \in A: \quad (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$

Transitiv, wenn gilt $\forall x, y, z \in A: \quad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$

Total, wenn gilt $\forall x, y \in A: \quad xRy \vee yRx$

Reflexiv

„rückbezüglich": Jedes Element steht mit sich selbst in Relation, oder

Für alle a gilt: aRa

Beispiel: A = {1,2,3}, R = { (1,2), (2,1), (1,1), (2,2) } ?

Beispiel: „hat am gleichen Tag Geburtstag"? Ja

Beispiel: „liebt" oder „ist verliebt in"? Nein

Beispiel: „ist echt größer" ? Nein

Beispiel: „=„ ? Ja

Beispiel: Bundesligapaarungen ? Nein

Symmetrisch

$$\forall x, y \in A: \qquad xRy \Rightarrow yRx$$

Beispiel: „liebt“ ? Nein

Beispiel: „ist verheiratet mit“ ? Ja

Beispiel: „ist älter als“ ? Nein

Beispiel: Bundesligapaarungen ? Ja

Typisch: $(x = y) \Rightarrow (y = x)$

Asymmetrisch

$$\forall x, y \in A: \qquad xRy \Rightarrow \neg yRx$$

Beispiel: „liebt“ ? Nein

Beispiel: „ist verheiratet mit“ ? Nein

Beispiel: „ist älter als“ ? Ja

Typisch: $(x < y) \Rightarrow \neg(y < x)$

Antisymmetrisch

$$\forall x, y \in A: \qquad (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$$

Beispiel: „liebt“ ? Nein

Beispiel: „ist größer gleich“ ? Ja

Beispiel: „ist echt größer als“ ? ?

Beispiel: Bundesligapaarungen ? Nein

Typisch: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

Transitiv

$$\forall x, y, z \in A: \qquad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

Beispiel: „liebt“ ? Nein

Beispiel: „ist älter als“ ? Ja

Ähnlichkeitsrelation bei Dreiecken Ja

Typisch: $((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \Rightarrow (x \leq z)$

Total

$$\forall x, y \in A: \qquad xRy \vee yRx$$

Beispiel: „liebt“ ? Nein

Beispiel: „ist Teilmenge von“ ? Nein

Beispiel: Bundesligapaarungen ? Nein: (a,a)

Total heißt, die Relation hat keine “Löcher”.
Jeder steht irgendwie mit jedem in Relation!

Typisch: IR und “>=”

Finde den Fehler!

Sei R symmetrisch und transitiv → R ist reflexiv

$$\forall x, y \in A: xRy \Rightarrow yRx$$

$$\forall x, y, z \in A: (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in A: xRx$$

„Beweis“:
Sei aRb → bRa wegen sym. → aRa wegen tans.
Also gilt stets aRa → reflexiv! ?