Vorkurs

-- 8. Abbildungen –

5.10.2015

Abbildungen

Eine Abbildungen oder Funktion $f: A \rightarrow B$ ist eine Relation, bei der es für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, das mit a in Relation steht.
Wir schreiben dann $b = f(a)$ oder $a \longmapsto b$

Wir können z.B. aus der Kuh/Mäh-Relation eine Abbildung machen durch Entfernen von Paaren:

x	Kuh	$Schaf$	$Ziege$	$Fisch$
$f(x)$	"Muh"	"$Mäh$"	"$Mäh$"	" "

Definitionsbereich, Bild

Für eine Funktion $f: A \to B$ heißt A der Definitionsbereich und B der Wertevorrat.
Beide gehören daher untrennbar zur Funktion!

Daher sind $f(x)=x$ mit $A=[0,1]$, $B=\mathbb{R}$ oder
$A=[0,1]=B$ oder
$A=\mathbb{R}=B$
drei verschiedene Abbildungen f_1, f_2, f_3 !!!

Der Wertevorrat muss nicht ausgeschöpft werden (vgl. f_1).
Daher definieren wir einen weiteren Begriff:
Für $A' \subseteq A$ nennen wir

$$f(A') := \{f(x), x \in A'\}$$

die Bildmenge (das Bild) von A' (unter f)

Für $A' = A$ ist daher $f(A) \subseteq B$ genau die Elemente, die als Bild von f auftreten.

Urbild

Zu einem b ϵ B ist $f^{-1}(b) := \{a \in A : f(a) = b\}$

die Urbildmenge (das Urbild) von b.

Vorsicht: b ist Element, aber $f^{-1}(b) \subseteq A$ ist eine Menge mit ev. mehreren oder keinen Elementen!

Verallgemeinerung auf B‘ $\subseteq$ B, Menge von Elementen:

$$f^{-1}(B') := \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$$

(Vereinigung aller einelementig definierten Urbilder)

Injektiv

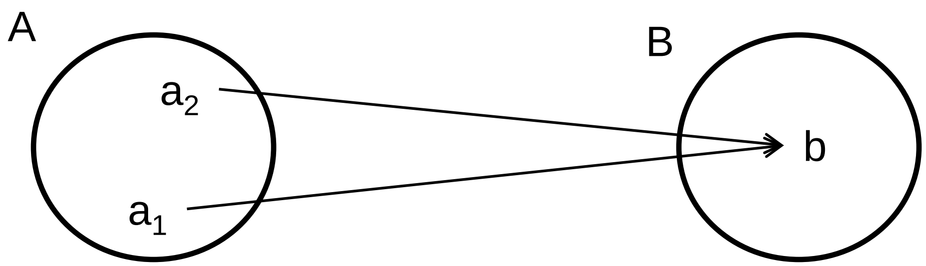
Jetzt kommen mathematisch anspruchsvolle Begriffe, die aber eigentlich nicht so kompliziert sind, wie sie klingen!

Eine Abbildung f: A → B heißt injektiv, wenn gilt:

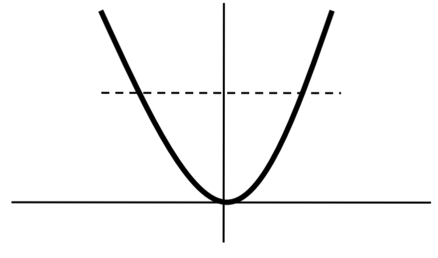
$$\forall b \in B : \left| f^{-1}(b) \right| \leq 1.$$

d.h. jedes b aus dem Wertevorrat hat höchstens ein Urbild.

Verboten:



$f(x) = x^2$, **IR**→IR



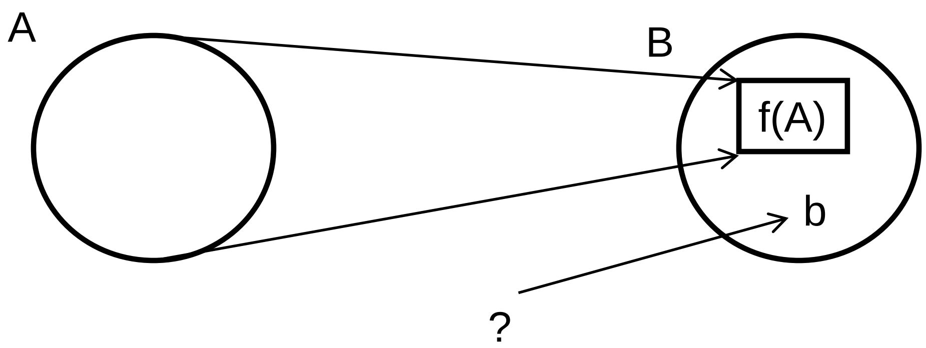
Surjektiv

Eine Abbildung f: A → B heißt surjektiv, wenn gilt:

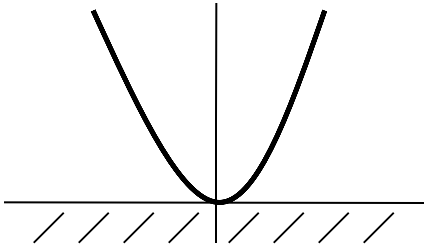
$$\forall b \in B : \left| f^{-1}(b) \right| \geq 1.$$

d.h. jedes b aus dem Wertevorrat hat mindestens ein Urbild.

Verboten:



$f(x) = x^2$, IR→**IR**



Bijektiv

Eine Abbildung f: A → B heißt bijektiv, wenn gilt:

$$\forall b \in B : \left| f^{-1}(b) \right| = 1.$$

d.h. jedes b aus dem Wertevorrat hat genau ein Urbild.

Also bijektiv ←→ injektiv und surjektiv ←→ eineindeutig

Beispiele

$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\ldots\}$

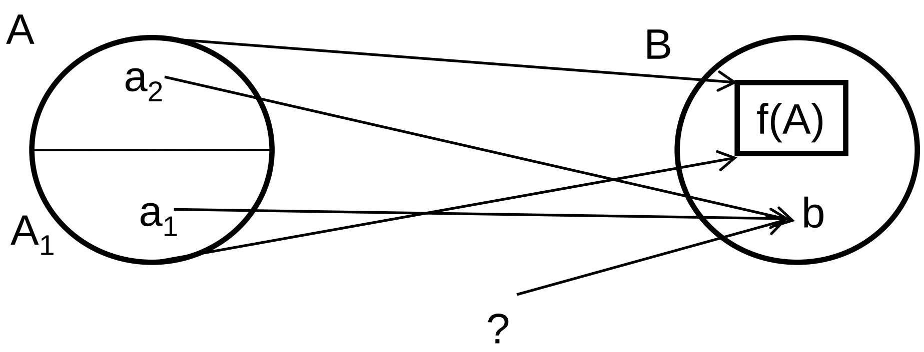
Die Funktion f: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f(n) = n+1$, ist nicht surjektiv.
Wir können sie aber surjektiv machen durch Beschränkung des Wertevorrats auf den eigentlichen Bildbereich:
Die Funktion g: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$, $g(n) = n+1$, ist surjektiv

Das funktioniert immer: Ist f nicht surjektiv, beschränke den Wertevorrat auf den eigentlichen Bildbereich $\to$ surjektiv

Die Funktion f: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f(n) = |n-1|$, ist nicht injektiv.
Wir können sie aber injektiv machen durch Beschränkung des Definitionsbereichs:
Die Funktion g: $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\} \to \mathbb{N}_0$, $g(n) = |n-1|$, ist injektiv

Das funktioniert immer: Ist f nicht injektiv, beschränke den Definitionsbereich, um Mehrfachwerte zu vermeiden $\to$ injektiv

Aus jeder Abbildung lässt sich durch Beschränkung des Wertevorrats und des Definitionsbereichs eine bijektive Abbildung gewinnen.



f: A → B nicht surjektiv und nicht injektiv, aber

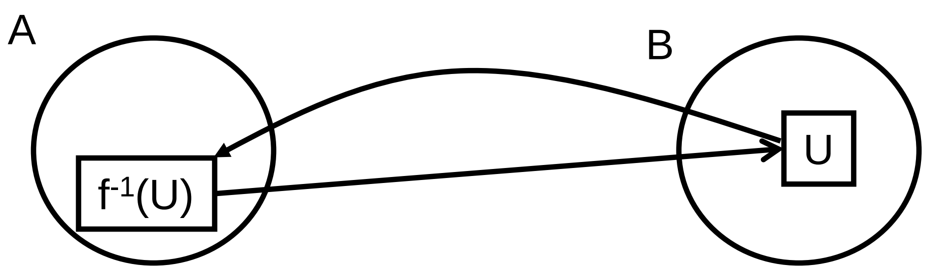
g: A_1 → f(A) surjektiv und injektiv, also bijektiv!

Sätze

$\forall U \subseteq B: f\left(f^{-1}(U)\right) \subseteq U$

Das Bild vom Urbild von U ist in U.

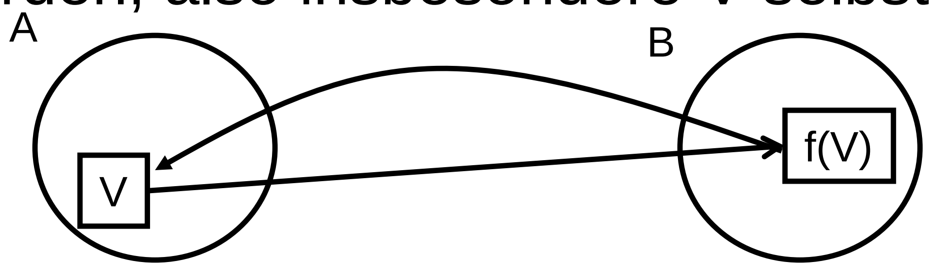
$f^{-1}(U)$, das Urbild von U, sind alle Punkte, die nach U abgebildet werden. Daher gilt $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$



$\forall V \subseteq A: f^{-1}\left(f(V)\right) \supseteq V$

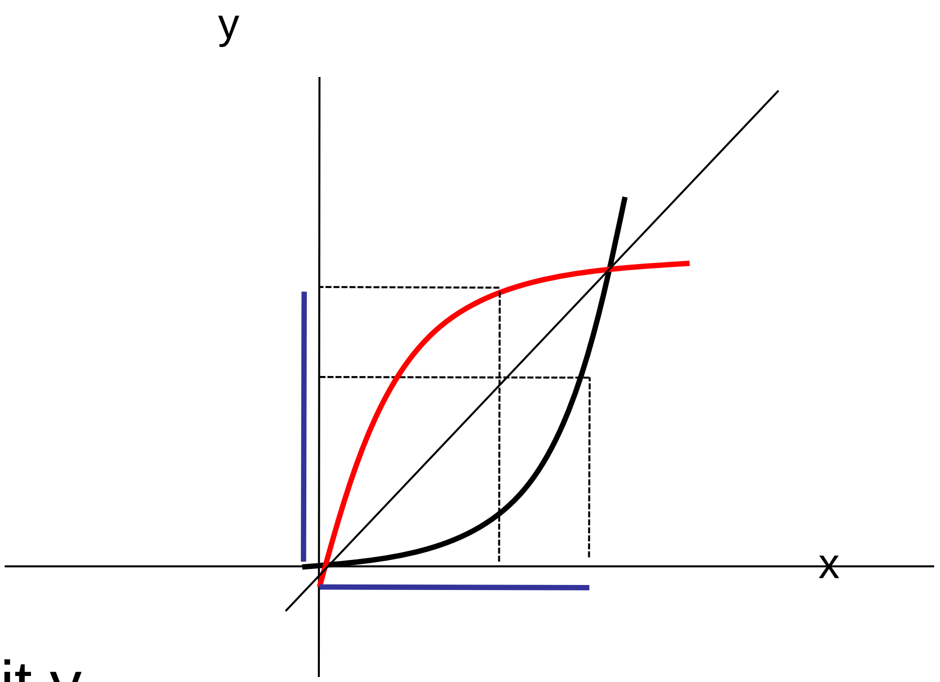
Das Urbild vom Bild von V enthält V.

Das Urbild von f(V) enthält laut Definition alle Punkte, die nach f(V) abgebildet werden, also insbesondere V selbst.



Ist eine Abbildung bijektiv, so existiert eine Umkehrabbildung:
$y=f(x)$, $f^{-1}(y)=x$: $f^{-1}(f(x))=x$ und $f(f^{-1}(y)=y$

$$(x,y)\rightarrow(y,x)$$



Vertausche x mit y.

$y=f(x)=x^2$, $x\geq 0$ → $x=f^{-1}(y)=y^{1/2}$: Umbenennung $f^{-1}(x)=x^{1/2}$

Abzählbarkeit

Eine Menge ist abzählbar genau dann, wenn eine Bijektion existiert zwischen M und IN.
Die Bijektion ist quasi eine Nummerierung von M.

Satz: Q, die Menge der rationalen Zahlen, ist abzählbar:

Tableau der positiven Brüche

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	.
1/2	2/2	3/2	4/2	.	
1/3	2/3	3/3	.		
1/4	2/4	.			
1/5	.				
.					

Nummerierung

1	2	6	7	15	.
3	5	8	14	.	
4	9	13	.		
10	12	.			
11	.				
.					

Satz: IR ist nicht abzählbar

Sei z_i eine Aufzählung aller reellen Zahlen in [0,1].

$$z_1 = 0.z_{11}z_{12}z_{13}\ldots$$
$$z_2 = 0.z_{21}z_{22}z_{23}\ldots$$
$$z_3 = 0.z_{31}z_{32}z_{33}\ldots$$
$$z_4 = 0.z_{41}z_{42}z_{43}\ldots$$
$$\vdots$$

Wir definieren eine neue reelle Zahl $x=0.x_1x_2x_3\ldots$ indem wir jedes $x_i \neq z_{ii}$ wählen.
Dann kann x nicht in obiger Aufzählung stehen! Widerspruch!

IR ist überabzählbar!

Mächtigkeit von [0,1] und [0,1]x[0,1]

Sind und  gleichmächtig?

Satz: Es gibt keine Bijektion von M → P(M)

Beweis: Annahme,es gibt Bijektion f, a → f(a) $\subseteq M$

Sei C die Menge der Elemente x aus M, die selbst nicht in f(x) liegen.

Wegen f Bijektion gibt es ein c mit f (c) = C

$c \in C = f(c) \rightarrow c \notin C$

$c \notin C = f(c) \rightarrow c \in C$

Widerspruch, Annahme falsch!

Hierarchie der Mächtigkeiten

Endliche Menge M: $|M| = n$

Abzählbar unendliche Menge: IN

Überabzählbare unendliche Menge, z.B. IR

Frage: Gibt es eine Menge zwischen IN und IR mit echt unterschiedlicher Mächtigkeit? Kontinuumshypothese.

Konstruktion mächtigerer Mengen durch Potenzmenge.

Es gilt:IR=P(IN):

Beweis: Jede reelle Zahl entspricht einer Abbildung IN→ {0,1}.
$r=0.x_1x_2x_3\ldots$ binär ←→ Abb.: $1 \rightarrow x_1$, $2 \rightarrow x_2$, $3 \rightarrow x_3$, …
Die Menge all dieser Abbildungen ist die Potenzmenge von IN.
Denn an jeder Stelle kann 0 oder 1 stehen..