Vorkurs Mathematik für Informatiker

-- 9 Folgen --

6.10.2015

Folgen: Definition

Eine (unendliche) **Folge** im herkömmlichen Sinne entsteht durch „Hintereinanderschreiben" von Zahlen

$$1,2,3,4,5,\cdots$$

Dabei ist die Reihenfolge wichtig, jede Zahl hat ihre feste Position.
Die Folge 2,1,4,3,… ist eine andere als 1,2,3,4,…

Eine Folge ist daher eine Abbildung IN → IR:
Jeder Position i wird eine reelle Zahl r_i zugeteilt.

Die Abbildung $f(n) = 2n$ erzeugt so die Folge der geraden Zahlen: 2,4,6,8,….

Schreibweise

f: $n \longmapsto f(n)$ als Schreibweise für Folge

f: $n \longmapsto f_n$ als Indexschreibweise

1	2	3	4	5	6	…	n	…	…
f(1)	f(2)	f(3)	f(4)	f(5)	f(6)	…	f(n)	…	…

Meist einfacher: $(f_n)_{n \in IN}$ oder einfach (f_n)

Die Klammer ist nötig zur Unterscheidung der Folge zu einem einzelnen Element f_n.

Reihen

Oft ist man an den Differenzen der Folgenglieder interessiert $s_n := f_n - f_{n-1}$.

s_n definiert dann selbst eine Folge und es gilt

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} s_k = (f_n - f_{n-1}) + (f_{n-1} - f_{n-2}) + \ldots + (f_1 - 0) \qquad (f_0 := 0)$$

Die f_n sind dann die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{n} s_k$

Beispiel einer Reihe: $f_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$

Rekursiv definierte Folgen

Speziell in der Informatik treten (bei Kostenanalysen) oft rekursiv definierte Folgen auf, bei denen jede Zahl f_n nach einer festen Vorschrift aus dem Vorgänger f_{n-1} (oder weiteren Vorgängern) berechnet wird.

Wichtig: Festlegen der Anfangs(Start)-Werte,
damit die Folge überhaupt eindeutig definiert ist.

Beispiele: $g_1 = 1$, $g_n = 2 g_{n-1}$ für $n=2,3,4,\dots$ (Verdoppeln)

$f_0=1$, $f_1=1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n=2,3,..$ (Fibonacci-F.)

$h_1=1$, $h_n = n h_{n-1}$ für $n=2,3,\dots$ (Fakultät)

g: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, … , also $g_{n+1} = 2^n$

f: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

h: 1, 2, 6, 24, … , also $h_n = n!$

Wachstum

Typisch Anwendung von Folgen: Bestimmung der Laufzeit eines Programms für verschiedene Eingaben.

Beispiel: Anzahl der Vergleiche v_n zwischen je zwei Elementen, die in einem Sortierprogramm erfolgen, um n Elemente zu sortieren (Insert-Sort).

Bei Laufzeitvergleichen ist insbesondere interessant, wie sich die Laufzeiten für immer größere n verhalten. Wachsen? Fallen? Wie stark?

Eine Folge heißt **monoton wachsend**, wenn jedes Element größer als sein Vorgänger ist: $f_n \geq f_{n-1}$ für $n \geq 2$.
Streng monoton wachsend, falls $f_n > f_{n-1}$.

Entsprechend (streng) monoton fallend für $\leq$ und $<$.

Schranken

Mindest- oder Maximallaufzeiten sind wichtig, daher sind wir an oberen/unteren Schranken für unsere Folgenelemente interessiert:

Gibt es eine Zahl $C \in \mathbb{R}$ mit $C \geq f_n$ für alle n, so nennt man C eine **obere Schranke**.
Alle Zahlen größer als C sind dann natürlich auch obere Schranken. Am interessantesten ist natürlich die kleinste obere Schranke = Supremum: $\sup f_n$

Entsprechend heißt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c \leq f_n$ für alle n untere Schranke, insbesondere die größte untere Schranke = Infimum: $\inf f_n$

Hat eine Folge sowohl eine obere, als auch eine untere Schranke, so nennt man sie beschränkt:

$$-\infty < \inf_{k=1,2,..} f_k \leq f_n \leq \sup_{k=1,2,..} f_k < \infty \quad \text{für } n=1,2,...$$

Konvergenz I

Interessant ist vor allem, was mit f_n für große n im Grenzwert passiert.

„Gutmütiger“ Fall: die Folgenglieder konvergieren gegen einen Grenzwert y, d.h. dass für hinreichend großes n alle Folgenglieder beliebig nahe bei y liegen:

$$\forall \varepsilon > 0: \; \exists n_0(\varepsilon) \in IN : n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| f_n - y \right| < \varepsilon$$

Für alle ε>0 gibt es ein n_0, so dass gilt: aus $n \geq n_0$ folgt $|f_n - y| < \varepsilon$

Zur Erklärung: definiere ε-Umgebung von y

$$U_\varepsilon(y) := \left\{ x \in IR : \left| x - y \right| < \varepsilon \right\}$$

„Beliebig nahe bei y“ heißt nun, dass für jedes noch so kleine ε>0 die Folgenglieder ab einem $n_0(\varepsilon)$ alle in $U_\varepsilon(y)$ liegen.

Konvergenz II

Es dürfen also insbesondere nur endlich viele Folgenglieder außerhalb von U_ε liegen!
Für kleineres ε muss man dann meist ein größeres $n_0(\varepsilon)$ nehmen.

Konvergenz heißt also:

$$\exists y \in IR : \forall \varepsilon > 0 : \ \exists n_0(\varepsilon) \in IN : \forall n \geq n_0(\varepsilon) : f_n \in U_\varepsilon(y)$$

Es gibt ein y, so dass es für alle ε>0 ein n_0 gibt mit der Eigenschaft:
für alle $n \geq n_0$ gilt $f_n \in U_\varepsilon(y)$

Dann heißt y der Grenzwert der Folge:

$$y = \lim_{n \to \infty} f_n$$

Konvergenz III

Beispiele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(Wähle $n_0(\varepsilon) := \lceil 1/\varepsilon + 1 \rceil$.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

(Umformen zu 1 + 1/n → 1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$$

(| $(-1)^n/n$ | = 1/n → 0)

Konvergenzkriterium

Es gibt verschiedene Sätze, die sich mit Konvergenz-kriterien beschäftigen, z.B.:

Eine beschränkte, monotone (wachsend oder fallend) Folge reeller Zahlen ist konvergent.
Der Grenzwert ist dann genau das Supremum, bzw. Infimum!

Beispiele

3n+1-Folge:

Start mit irgendeinem k>0.
  Ist k gerade: $k \rightarrow k/2$
  Ist k>1 ungerade: $k \rightarrow 3k+1$
  Ist k=1: STOP

Beobachtung: Folge endet stets irgendwann mit STOP
MATLAB-Programm

Fibonacci-Folge beschreibt natürliche Wachstumsprozesse:
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$: Größe der n-ten Generation ergibt sich aus den beiden Vorgängergenerationen!

Geometrische Reihe: $\sum_{j=1}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ oder $|q|<1: \sum_{j=1}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$

Häufungspunkt

Die Folge (f_n) mit $f_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$

konvergiert nicht gegen einen Grenzwert, aber die Werte 1 und -1 haben ähnliche Eigenschaften wie ein Grenzwert: In jeder Umgebung sind unendlich viele Folgenglieder enthalten, aber eben für beide Werte!

Einen Wert mit dieser Eigenschaft (in jeder Umgebung sind unendlich viele Folgenglieder enthalten) nennt man einen **Häufungspunkt** der Folge.

Man beachte den Unterschied zwischen „nur endlich viele Folgenglieder liegen außerhalb der Umgebung“ (Grenzwert) und „unendlich viele sind in der Umgebung“ (Häufungspunkt)!

Existenz

Eine beschränkte, unendliche Folge reeller Zahlen besitzt immer mindestens einen Häufungspunkt!

Beweis durch Intervallschachtelung:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege die Folge in [0,1].

Daher enthält das Intervall [0,1] unendlich viele Folgenelemente

Dann muss eines der beiden Teilintervalle [0,0.5] oder [0.5,1] auch unendlich viele Glieder enthalten!
Dieses Intervall können wir dann wieder halbieren mit demselben Ergebnis.

Daher erzeugen wir auf diese Art und Weise eine geschachtelte Folge immer kleinerer Intervalle, deren Obergrenzen eine monoton fallende, beschränkte, also konvergente Folge bilden.
Grenzwert dieser Folge ist ein Häufungspunkt!

Größter Häufungspunkt I

Von besonderem Interesse ist wieder der größte Häufungspunkt oder Limes superior der Folge.

Dazu betrachten wir zunächst für eine beschränkte Folge (f_n) die Folge (g_n) mit

$$g_n := \sup_{m \geq n} f_m .$$

Wegen der Beschränktheit von (f_n) ist auch (g_n) beschränkt. Weiter ist (g_n) monoton fallend(!), also konvergent mit Grenzwert

$$\limsup_{n \to \infty} f_n := \lim_{n \to \infty} g_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{m \geq n} f_m$$

Dieser Grenzwert ist der größte Wert, für den in jeder Umgebung unendlich viele f_n liegen, also der größte Häufungspunkt.

Größter Häufungspunkt II

Zum Beweis sind zwei Eigenschaften zu zeigen:

In jeder Umgebung liegen unendlich viele Glieder

Kein größerer Wert hat diese Eigenschaft.

Dazu überlegen wir uns, dass für $C := \limsup x_n$ für eine beschränkte Folge (x_n) gilt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele x_n größer als $C+\varepsilon$ sind.

Wären unendlich viele Glieder größer als $C+\varepsilon$, so könnte man daraus eine unendliche Folge definieren mit Häufungspunkt!

Divergenz

Was passiert, wenn keine Konvergenz vorliegt? Divergenz:

$$\forall y \in IR : \exists \varepsilon > 0 : \ \forall n_0(\varepsilon) \in IN : \exists n \geq n_0(\varepsilon) : f_n \notin U_\varepsilon(y)$$

Für alle y ex. ein $\varepsilon>0$, so dass für alle n_0 gilt: es ex. $n \geq n_0$ mit $f_n \notin U_\varepsilon(y)$

als Negation der Konvergenz:

$$\exists y \in IR : \forall \varepsilon > 0 : \ \exists n_0(\varepsilon) \in IN : \forall n \geq n_0(\varepsilon) : f_n \in U_\varepsilon(y)$$

Es ex. ein y, so dass für alle $\varepsilon>0$ gilt: es ex. ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $f_n \in U_\varepsilon(y)$

Es gibt zwei verschiedene Formen der Divergenz:

(1) Divergenz als „Konvergenz“ gegen Unendlich (+ oder -)

$$\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty :\Leftrightarrow \forall C \in IR : \exists n_0(C) \in IN : \forall n \geq n_0(C) : f_n > C$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = -\infty :\Leftrightarrow \forall C \in IR : \exists n_0(C) \in IN : \forall n \geq n_0(C) : f_n < C$$

(2) Divergenz durch mehr als einen Häufungspunkt:

$f_n := (-1)^n$ (1 und -1) oder $g_n := n\,(-1)^n$ ($+\infty$ und $-\infty$)

O-Notation

Wir schreiben eine Folge (f_n) jetzt kurz und einfach z.B. als n^2 an Stelle von $n \longmapsto n^2$.

In einer Klasse von Folgen $O(n^2)$ wollen wir Folgen zusammenfassen, mit einem bestimmten Divergenzverhalten, z.B.:

n, weil $n \leq n^2$,

$16\,n^2$, weil uns ein konstanter Faktor egal ist, aber

$n^2 \leq n^2$.

n^2+n+1, weil das kleiner ist als $3n^2$.

Aber nicht 2^n, weil man für jedes konstantes $C \in \mathbb{R}$ ein n finden kann mit $2^n > C\,n^2$.

Definition

Mathematisch schreibt man das so:

$$f_n \in O(g_n) :\Leftrightarrow \exists C > 0, n_0 \in IN : \forall n > n_0 : | f_n | \leq C \cdot g_n$$

Es ex. C>0 und n_0, so dass für alle $n>n_0$ gilt: $|f_n|\leq Cg_n$

Neu ist das n_0: Die Ungleichung muss nicht für alle Glieder gelten, sondern erst ab einem bestimmten Index (also für sehr große n); endlich viele Ausnahmen sind erlaubt.

Unter der Voraussetzung $\forall n : g_n > 0$ kann man dies umschreiben

$$f_n \in O(g_n) :\Leftrightarrow \exists C > 0, n_0 \in IN : \forall n > n_0 : \frac{| f_n |}{g_n} \leq C$$

In dieser Form ist das n_0 überflüssig: die Folge $|f_n|/g_n$ muss einfach nur beschränkt sein.