Vorkurs

-- 10. Kombinatorik –

10.10.2018

Urnenmodell

In der Kombinatorik interessiert man sich dafür, wie viele Möglichkeiten es für die Ergebnisse bestimmter Versuchs-anordnungen gibt (z.B. Kopf oder Zahl).
Damit kann dann z.B. die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines solchen Ereignisses berechnet werden.

Viele Probleme dieser Art lassen sich auf Urnenmodelle zurückführen.

Wir stellen uns dazu *n unterscheidbare Kugeln* (nummerierte Lottokugeln) in einer Urne vor, aus denen nun nacheinander *k Kugeln gezogen werden*.

„blind ziehen“: bei jedem Zug soll die Wahrscheinlichkeit für jede Kugel gleich sein; es kommt also nur auf die Anzahl der Kugeln an.

Im Folgenden seien $n,k \in \mathbb{N}_0$, wobei $0^0 = 0! = 1$ ist.

Varianten

Für den Versuchsaufbau sind zwei Entscheidungen zu treffen:

- man kann die gezogene Kugel wieder in die Urne zurück legen (nachdem man ihre Nummer notiert hat) **oder nicht**

- man kann sich bei Ergebnis dafür interessieren, in welcher Reihenfolge die Kugeln gezogen wurden **oder nicht** (letzteres wie beim Lotto, wo die Zahlen am Schluss sortiert werden)
  Menge oder Folge?

Wir wollen nun alle vier möglichen Fälle analysieren.

Ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihen*folge*

Wenn wir die Kugeln wieder zurückwerfen, haben wir in jedem der k Züge n Möglichkeiten.

Ziehungnr.	1	2	3	4	5	....	k
Möglichkeiten:	n	n	n	n	n	....	n

Bei jedem der k Züge n Möglichkeiten, also insgesamt $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$ verschiedene Möglichkeiten.

Beispiel

n=3 Kugeln 1,2,3   und k=2 Ziehungen

Ziehung 1 kann liefern 1,2, oder 3
Ziehung 2 kann liefern 1,2, oder 3

Damit haben wir mögliche Ergebnisse
(1,1), (1,2), (1,3)
(2,1), (2,2), (2,3)
(3,1), (3,2), (3,3)
$9 = 3 * 3 = 3^2$ Möglichkeiten:
an erster Position 3, an zweiter Position 3 für jede erste Pos.

Ziehen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihen*folge*

Dann haben wir im ersten Zug n Kugeln, im zweiten aber nur noch n-1, im k-ten nur noch n-k+1 Kugeln. $k \leq n$

Ziehungnr.	1	2	3	4	5	……………….	k
Möglichkeiten:	n	n-1	n-2	n-3	n-4	…………………	n-k+1

Beim j-ten der k Züge also n-j+1 Möglichkeiten, also insgesamt n·(n-1)·…·(n-k+1) verschiedene Möglichkeiten.

Lässt sich schreiben als $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Wichtiger Spezialfall k=n:

n! Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen. Menge←→Folge

Beispiel

n=3 Kugeln 1,2,3   und k=2 Ziehungen

Ziehung 1 kann liefern 1,2, oder 3, also ein z
Ziehung 2 kann liefern 1,2, oder 3, aber nicht z

Damit haben wir mögliche Ergebnisse
(1,2), (1,3)
(2,1), (2,3)
(3,1), (3,2)
6 = 3 * 2 = 3! = 3!/1! Möglichkeiten:
an erster Position 3, an zweiter Position 2 für jede erste Pos.

Ergebnis für: n=3 Kugeln 1,2,3   und k=3 Ziehungen?

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Jetzt sortieren wir die Kugeln nach ihrer Nummerierung, bevor wir das Ergebnis verkünden; dann zählen z.B. (15,4,8) und (4,8,15) als ununterscheidbar gleich (wie beim Lotto).
Wie viele Möglichkeiten gibt es nun noch?

Wir haben vorhin gesehen, dass es bei k Objekten k! verschiedene Anordnungen gibt. Daher müssen wir das vorherige Ergebnis einfach durch k! dividieren:

$$\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right) : k! = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Die Anzahl der verschiedenen Anordnungsmöglichkeiten ist also genau durch die Binomialkoeffizienten gegeben.

Funktioniert nur, da alle gezogenen Kugeln verschieden!

Beispiel

n=3 Kugeln 1,2,3   und k=2 Ziehungen

Ziehung 1 kann liefern 1,2, oder 3, also ein z
Ziehung 2 kann liefern 1,2, oder 3, aber nicht z

Damit haben wir mögliche Ergebnisse
(1,2), (1,3)
(2,1), (2,3)
(3,1), (3,2)
6 = 3 * 2 = 3! Möglichkeiten:

Aber (1,2) und (2,1) sind dieselbe Lösung, (1,3) und (3,1), und (2,3) und (3,2), daher bleiben
(1,2), (1,3), (2,3), also 3 Möglichkeiten.
Da wir für 2 Positionen 2!=2 Vertauschungen haben: 3!/2! = 3

Ziehen mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Wir werfen die Kugeln also wieder in die Urne zurück und zählen Zugfolgen, die sich nur in der Reihenfolge unterscheiden, nur als eine Möglichkeit.
Wir interessieren uns also nur dafür, wie oft eine Kugel jeweils gezogen wird, aber nicht in welchem Zug!

Dies ist der schwierigste Fall; er wird daher in den meisten Büchern ignoriert. Deshalb wollen wir ihn hier analysieren.

Beispiel

n=3 Kugeln 1,2,3   und k=2 Ziehungen

Ziehung 1 kann liefern 1,2, oder 3
Ziehung 2 kann liefern 1,2, oder 3

Damit haben wir mögliche Ergebnisse
(1,1), (1,2), (1,3)
(2,1), (2,2), (2,3)
(3,1), (3,2), (3,3)
$9 = 3 * 3 = 3^2$ Möglichkeiten:
an erster Position 3, an zweiter Position 3 für jede erste Pos.

Aber wieder sind (1,2) und (2,1) usw. gleich, also bleiben
(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3) sind 6 Möglichkeiten.

Ziehen mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Zum Beweis ersetzen wir das ursprüngliche Modell mit n Kugeln und k Zellen durch ein anderes Modell:

n+k-1 Positionen
Verteile n-1 Striche auf diese Positionen.
Alle Positionen ohne Strich erhalten automatisch *

n=5, k=4

|	*	|	*	*	|	|	*

n-1=4,   n+k-1=8.

Neue Interpretation/Modell für dasselbe Problem!

n+k-1 Positionen
Verteile n-1 Striche auf diese Positionen.
Alle Positionen ohne Strich erhalten *

Beispiel: n=5, k=3, n+k-1=7: | | * * | * |
7 Positionen, 4 Striche

Interpretation:
keine Kugel 1, keine 2, 2 Kugeln 3, eine 4, keine 5

Auf diese Art und Weise kann jedes mögliche Ereignis des ursprünglichen Urnenmodels eindeutig codiert werden.

Nun interpretieren wir dieses Strich/*-Modell wieder als ein Urnenmodell:
Mögliche Kugelnr. = mögliche Positionen von 1,2,…,n+k-1
Gezogen werden n-1 Kugeln ohne Zurücklegen mit Nummern von 1 bis n+k-1 und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.
Jede gezogene Kugel markiert eine Position der n-1 Striche.

Daher gibt es $$\binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)\,!}{(n-1)!\cdot k!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Möglichkeiten,
nämlich so viele, wie es Möglichkeiten gibt, aus den Zahlen 1,2,…,n+k-1 genau n-1 zu ziehen (ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).

Für n=3, k=2: $$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2} = 6$$

Cowboys, Indianer, Federn:

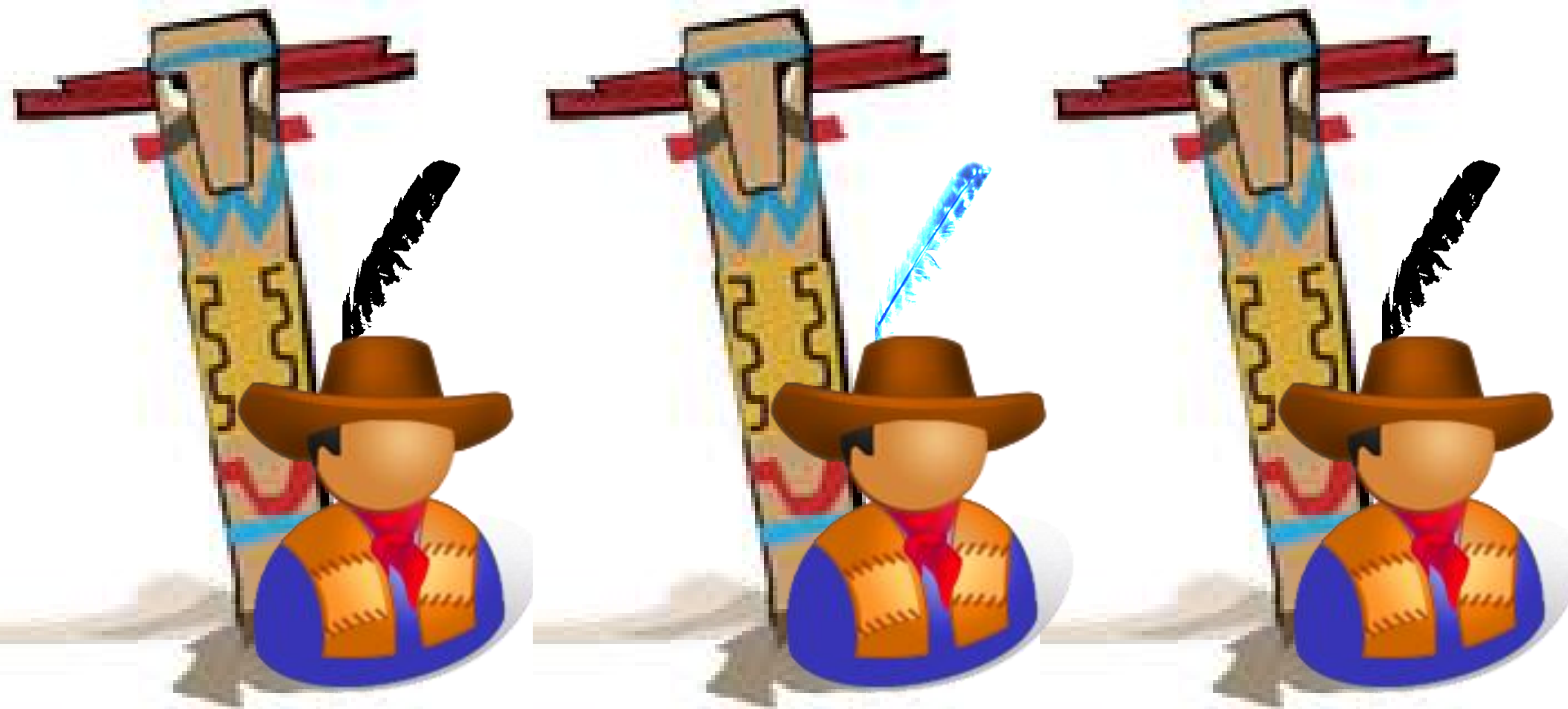
Drei Cowboys wurden von Indianern gefangen genommen und an drei Marterpfählen gefesselt. Die Marterpfähle stehen in einer Reihe und die Cowboys sind jeweils so angebunden, dass der am hinteren Marterpfahl angebundene Cowboy seine zwei Vordermänner von hinten sehen kann. Der am mittleren Pfahl angebundene Cowboy kann lediglich seinen Vordermann von hinten sehen. Der am vorderen Marterpfahl gefesselte Leidensgenosse kann keinen seiner zwei Mitgefangenen sehen.

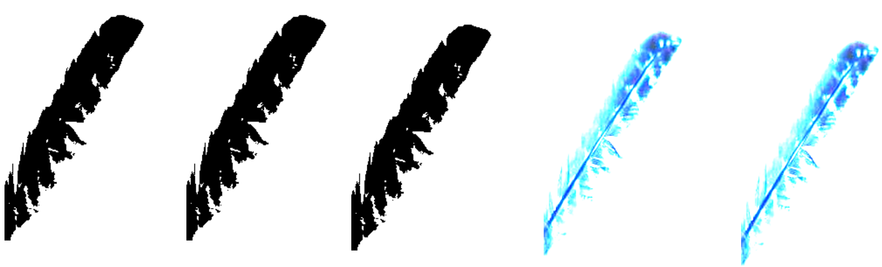
Der Häuptling zieht fünf Adlerfedern aus einer Felltasche. Drei Schwarze und zwei Weiße. Er zeigt die fünf Federn den drei Cowboys. Dann steckt er jedem der drei Gefangenen eine der Federn so an den Hut, dass die Farbe der Feder von hinten zwar erkennbar ist, der Hutträger aber selbst die Feder nicht sehen kann. Die restlichen zwei Federn steckt der Häuptling wieder ein, ohne dass einer der Cowboys erkennen kann welche Farbe diese zwei Federn haben.

Der Häuptling spricht zu den Gefangenen: "Wenn einer von Euch herausfinden kann, welche Farbe die Feder auf seinem eigenen Hut hat, lasse ich Euch alle frei. *(Absprachen zwischen den Cowboys sind nicht gestattet !)*

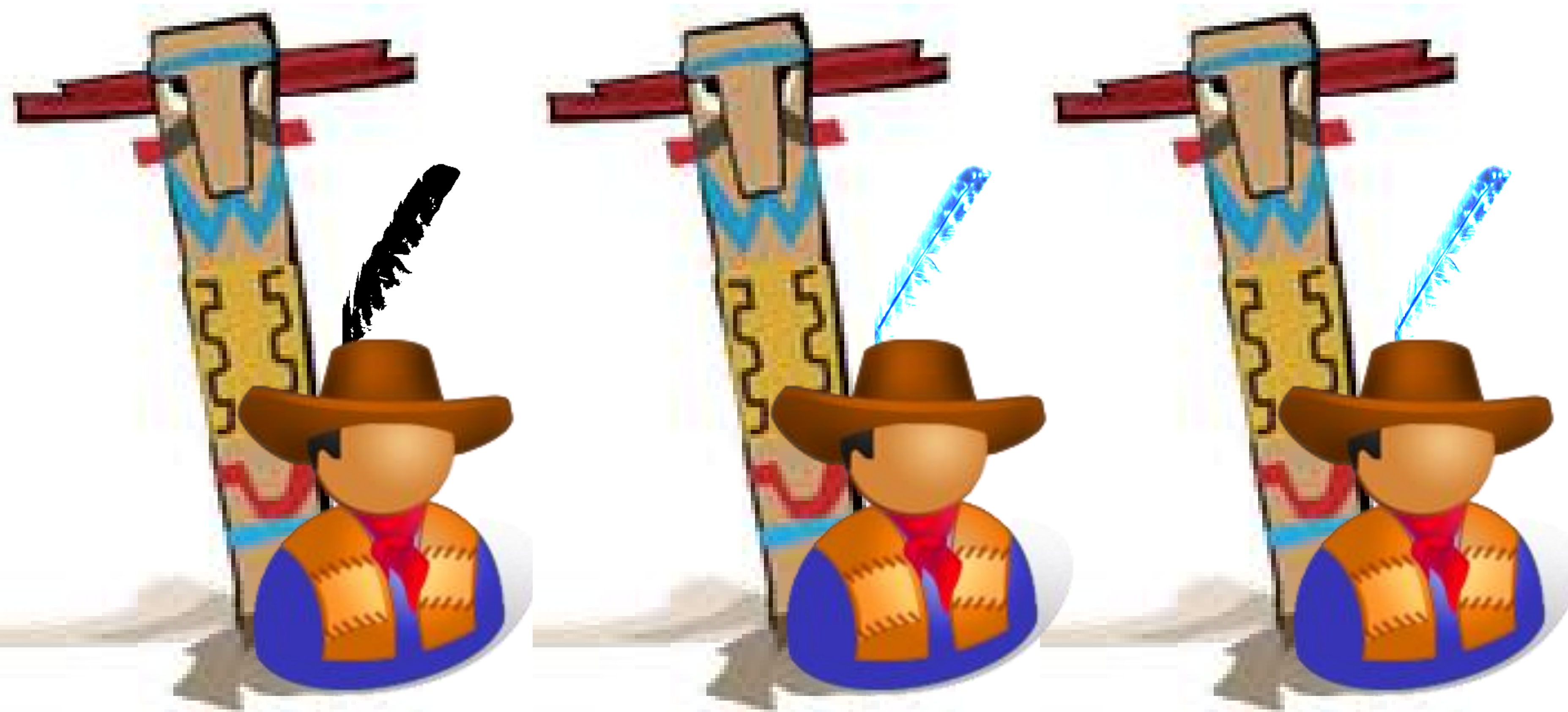
Sehr lange schweigen die Cowboys. Dann verkündet einer von ihnen die rettende Antwort.

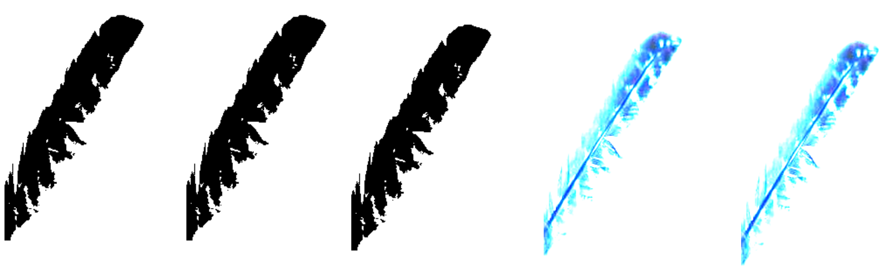
Welcher der drei Cowboys kann schließlich das Rätsel lösen, und welche Farbe hat die Feder an seinem Hut?





Nicht möglich!





Also 3 Möglichkeiten:

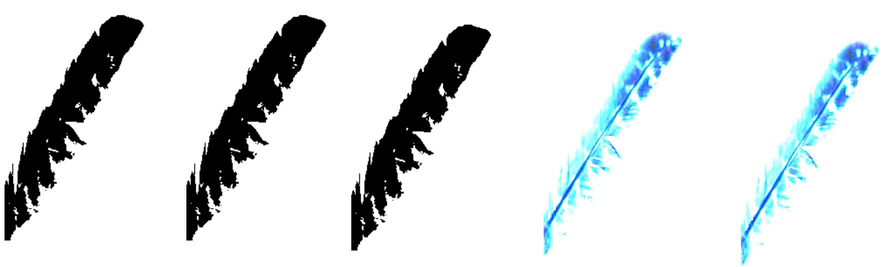
S/W – S – S

S/W – W – S

S/W – S – W

~~S/W – W – W~~

Nicht möglich!



Aus den 3 Möglichkeiten:

S/W – S – S

S/W – W – S

~~S/W – S – W~~

Bleibt nur

S/W – S/W – S