Vorkurs Mathematik für Informatiker

-- 11 Lineare Gleichungssysteme --

11.10.2018

Lineare Gleichungen

Wir wollen lineare Gleichungen lösen, aber nicht nur in einer oder zwei Variablen sondern in $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$2x+1=5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$$

Eine (die i-te) Gleichung in $x_1,\ldots,x_n$ sieht so aus

$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

mit Koeffizienten $a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n}, b_i \in \mathrm{IR}$.

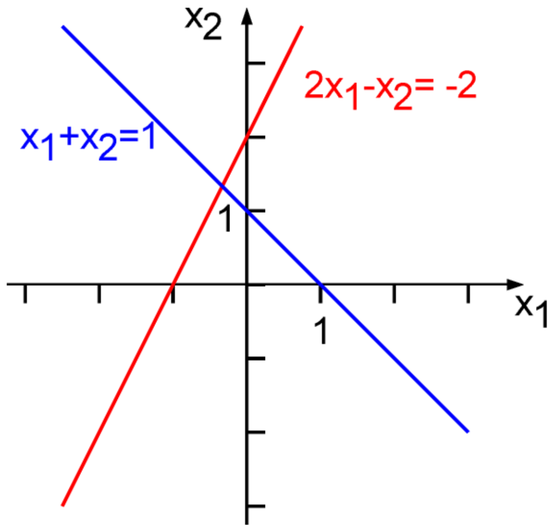
z.B. für n=2: $2x_1 - x_2 = -2$
beschreibt eine Gerade in der (x_1,x_2)-Ebene durch die Punkte (-1,0) und (0,2)

Lineare Gleichungssysteme

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten muss man auf jeden Fall n Gleichungen für n Unbekannte stellen. (Dadurch ist die eindeutige Lösbarkeit aber leider noch nicht garantiert!)

n=2:
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Graphisch suchen wir den Schnittpunkt zweier Geraden



Parallele Geraden?

Gestaffeltes LGS lösen

Recht einfach lässt sich das folgende LGS lösen

$$
\begin{aligned}
2x_1 \quad - x_2 \quad &= \quad -2 \\
\frac{3}{2} x_2 \quad &= \quad 2
\end{aligned}
$$

Aus der zweiten Gleichung sieht man $x_2 = 4/3$.
Dies kann man in die erste Gleichung einsetzen

$$2x_1 - \frac{4}{3} = -2 \qquad \Rightarrow 2x_1 = -\frac{2}{3}$$

also $x_1 = -1/3$.

Zeilenumformungen

Schön wäre es natürlich, wenn alle unsere LGS in einer solchen Dreiecksform vorliegen würden.

Glücklicher Weise können wir ein allgemeines LGS leicht in eine solche Form bringen.

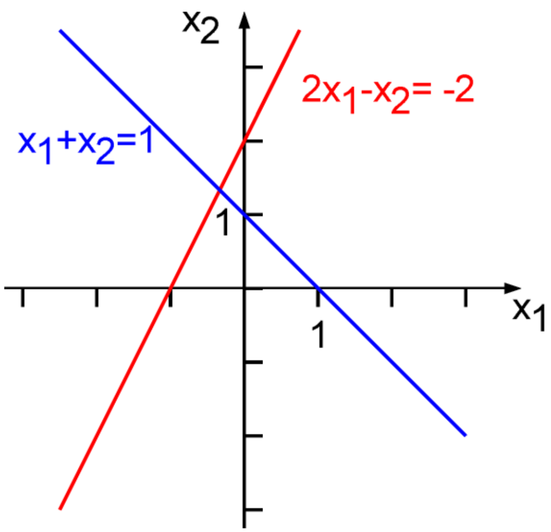
Multiplizieren wir die erste Zeile mit ½ und ziehen wir sie dann von der zweiten ab:

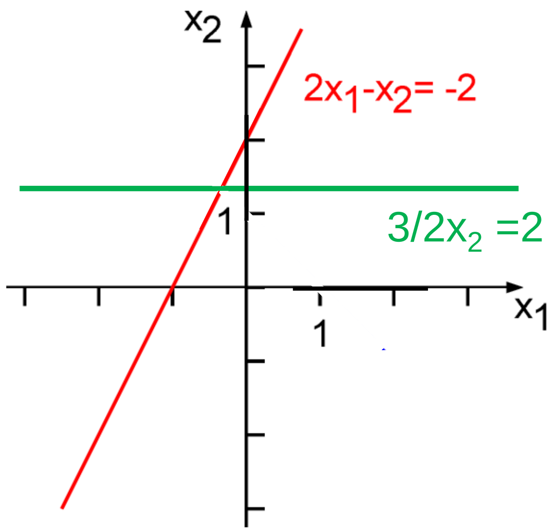
$$\begin{array}{rrcr} \tfrac{1}{2}\cdot \quad 2x_1 & -x_2 & = & -2 \\ - \quad x_1 & +x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & = & -2 \\ & \frac{3}{2}x_2 & = & 2 \end{array}$$

mit Lösung (-1/3, 4/3).

Altes – Neues Gleichungssystem:





Elimimationsschema

Wir wollen ein LGS äquivalent umformen (ohne Änderung der Lösungsmenge) durch folgende Strategie:

- Mittels der ersten Zeile eliminiere x_1 aus Zeilen 2,…,n
- Mittels der zweiten Zeile eliminiere x_2 aus Zeilen 3,…,n

  …
- Mittels der n-1-ten Zeile eliminiere x_{n-1} aus Zeile n

Aus dem so entstandenen gestaffelten Dreieckssystem kann man nacheinander x_n, x_{n-1},… bis x_1 leicht ausrechnen.

Zeilenvertauschungen

Eine Komplikation kann auftreten, wenn im i-ten Schritt bei der Elimination von x_i in den unteren Gleichungen der Koeffizient $a_{i,i} = 0$ ist, d.h. x_i taucht in der i-ten Zeile gar nicht auf. Dann gelingt diese Elimination nicht!

Ausweg: x_i muss dann aber in einer anderen Zeile $j > i$ auftauchen. Daher ändern wir einfach die Reihenfolge der Gleichungen $i \leftrightarrow j$.

Gäbe es keine andere Zeile mit x_i wäre das LGS nicht eindeutig lösbar!

Um Schreibarbeit zu sparen und zur Implementierung auf dem Computer lässt man die x_i und das = weg. Speichere nur Koeffizienten $a_{i,j}$ und b_i.

Beispiel 1

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & & = & 2 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & -x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{rcl} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 3 \end{array}$$

A	b
Matrix	Vektor

Beispiel 2

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_2 \quad \quad &= 2 \\ 2x_2 \quad - x_3 &= -1 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Lösung:

$$x_3 = 3$$

$$2x_2 = -1 + x_3 = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$x_1 = 2 + x_2 = 2 + 1 = 3$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Probe!

Matrix, Vektor

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_2 \qquad\quad &= \quad 2 \\ 2x_2 \quad - x_3 &= -1 \\ x_3 &= \quad 3 \end{aligned}$$

Matrix　　　　Vektor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ?$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = b \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matrix bijektive Abbildung? Umkehrfunktion! Operationen?

Matrix·Matrix-Produkt

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + a_{13} b_3} \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + a_{23} b_3 \\ a_{31} b_1 + a_{32} b_2 + a_{33} b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31}} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j3} \end{pmatrix}$$

Vektorraum, Matrizen

Vektoren: IR^n, Matrizen: IR^{nxm}

Matrix definiert eine Abbildung des IR^m in den IR^n .

y = f(x) durch:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y = f(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung

Vektoren: IR^n, Matrizen: IR^{nxm}

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Umkehrabbildung:

$$x = A^{-1} y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Diagonalmatrix

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = b$$

$$x = A^{-1}y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

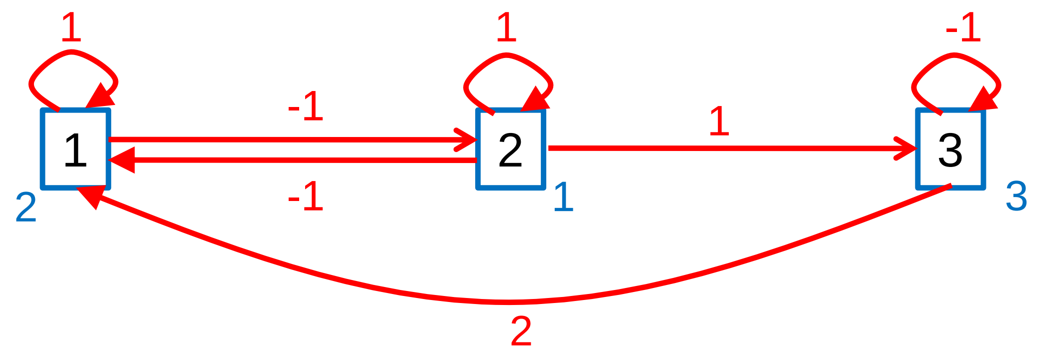
Graph und Matrix

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

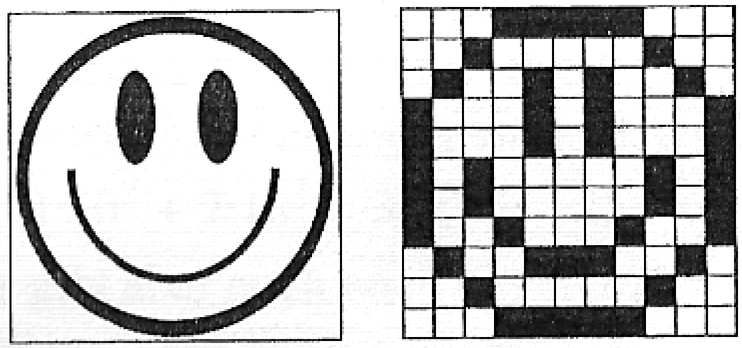
a_{11}=1: 1→ 1 und a_{12}=-1: 1→2

2→ 1, 2→2 und 2→3

3→ 1 und 3→3



Anwendungen



0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0

Bild 4 Ein Bild, seine diskretisierte und seine digitalisierte Darstellung

Pixelwerte z.B. 0,…,255 zur Darstellung eines Schwarz-Weiß-Bildes ergibt Matrix.

Zweidimensionale Daten werden eindimensional
Abgespeichert, z.B. zeilenweise.
Reduktion der Zugriffszeit!
Matrix/Bild gespeichert als Vektor.

Operationen mit Bildern

Operationen auf Bildern:
- Drehen
- Skalieren …
- Komprimieren (JPEG)
- Filtern
- Analysieren

- Zum effizienten Abspeichern
- Selbstfahrende Autos
- Gesichtserkennung
- Bildrekonstruktion

Da Bilder als Vektoren dargestellt sind, sind alle diese Operationen und Anwendungen mit Matrixoperationen verbunden!

Andere Anwendungen

- Google Pagerank: Web→Graph→Matrix
- Computergraphik: Kameraposition, Koordinatensystem,..
- Lösung physikalischer Gleichungen: Diskretisierung
- MP3: Audiosignal digitalisieren→Vektor→Filtern
- Neuronale Netze: KI, Deep Learning

Umgang mit riesigen, hoch-dimensionalen Daten: Big Data

Viel Erfolg im Studium!