Vorkurs Mathematik für Informatiker

-- 9 Analysis --

10.10.2018

Stetigkeit

Definition: Funktion f(x): R → R ist stetig bei a ∊ R, wenn gilt, dass der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich dem Funktionswert sind.

$$\lim_{h\to+0} f(a+h) = f(a) = \lim_{h\to-0} f(a+h)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(a+h_k) = f(a) \quad \textit{für alle } h_k \textit{ mit } \lim_{k\to\infty} h_k = \pm 0$$

Andere Definition für stetig bei a:
Zu gegebenem ε>0 gibt es ein δ>0 so dass gilt:

$$\forall \xi \in IR : |a-\xi| < \delta \Rightarrow |f(a)-f(\xi)| < \varepsilon$$

Anschaulich: Funktion macht keine Sprünge!

Unterscheidung: „Stetig bei a“ oder „stetig in Menge M“

Betrachtet man Stetigkeit der Funktion insgesamt, so ist der Definitionsbereich wichtig!

Zu gegebenem ε>0 gibt es ein δ>0 so dass gilt:

$$\forall \xi \in IR : | a - \xi | < \delta \Rightarrow | f(a) - f(\xi) | < \varepsilon$$

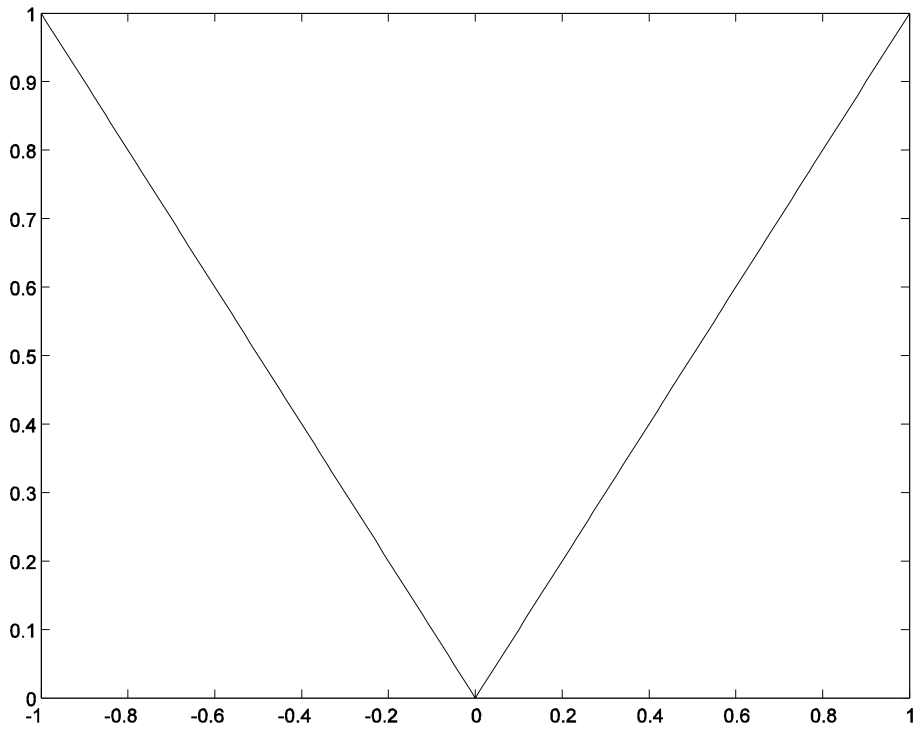
Beispiel: f(x) = 2x. Wahl zu beliebigem ε : δ:=ε/2

$$\forall \xi \in IR : | a - \xi | < \varepsilon / 2 \Rightarrow | 2a - 2\xi | = \left| f(a) - f(\xi) \right| < \varepsilon$$

Beispiel: f(x) = x^2 bei x=0. Wahl zu ε : δ:=$\sqrt{\varepsilon}$

$$\forall \xi \in IR : \left|\xi\right| = \left|0 - \xi\right| < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \left|0^2 - \xi^2\right| = \left|\xi^2\right| = \left| f(0) - f(\xi) \right| < \varepsilon$$

Beispiel 1

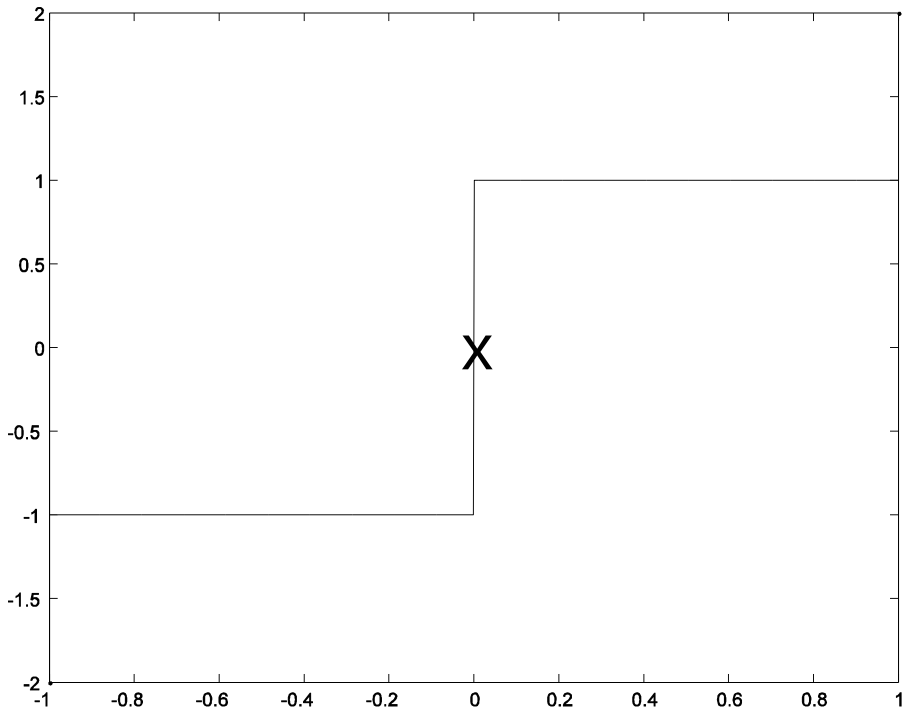


$$f(x) = abs(x) = |x|$$

$$f : IR \Rightarrow IR$$

Stetig? Ja oder Nein?

Beispiel 2



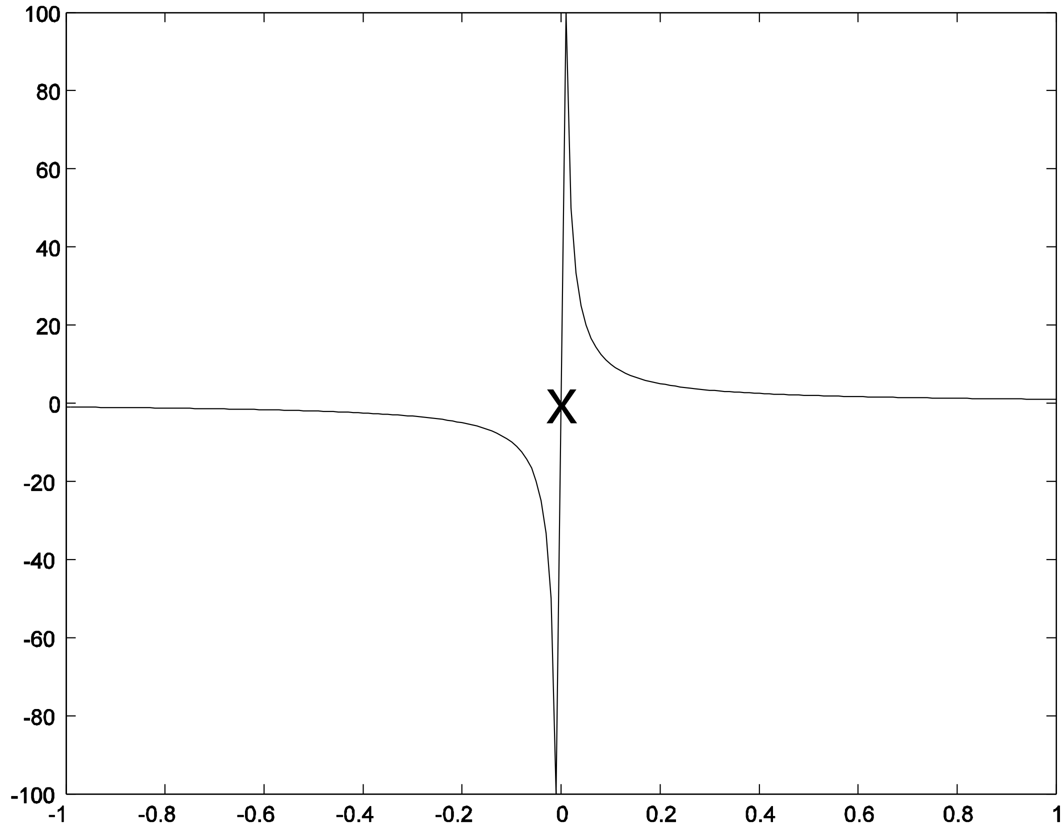
$$f(x) = sig(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f : IR \Rightarrow IR$$

Stetig? Ja oder Nein?

Beispiel 3

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x=0 \end{cases}$$

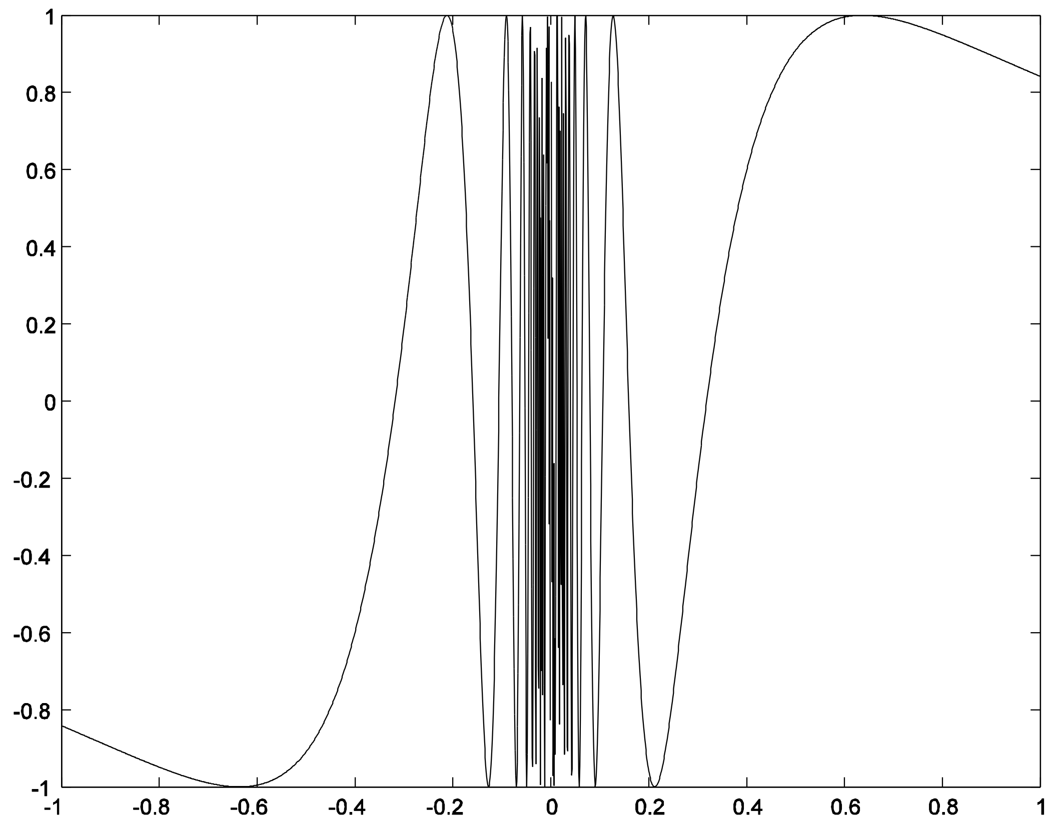


Stetig? Ja oder Nein?

Was ergibt sich, wenn man den Definitionsbereich als $x \neq 0$ festlegt?

Beispiel 4

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

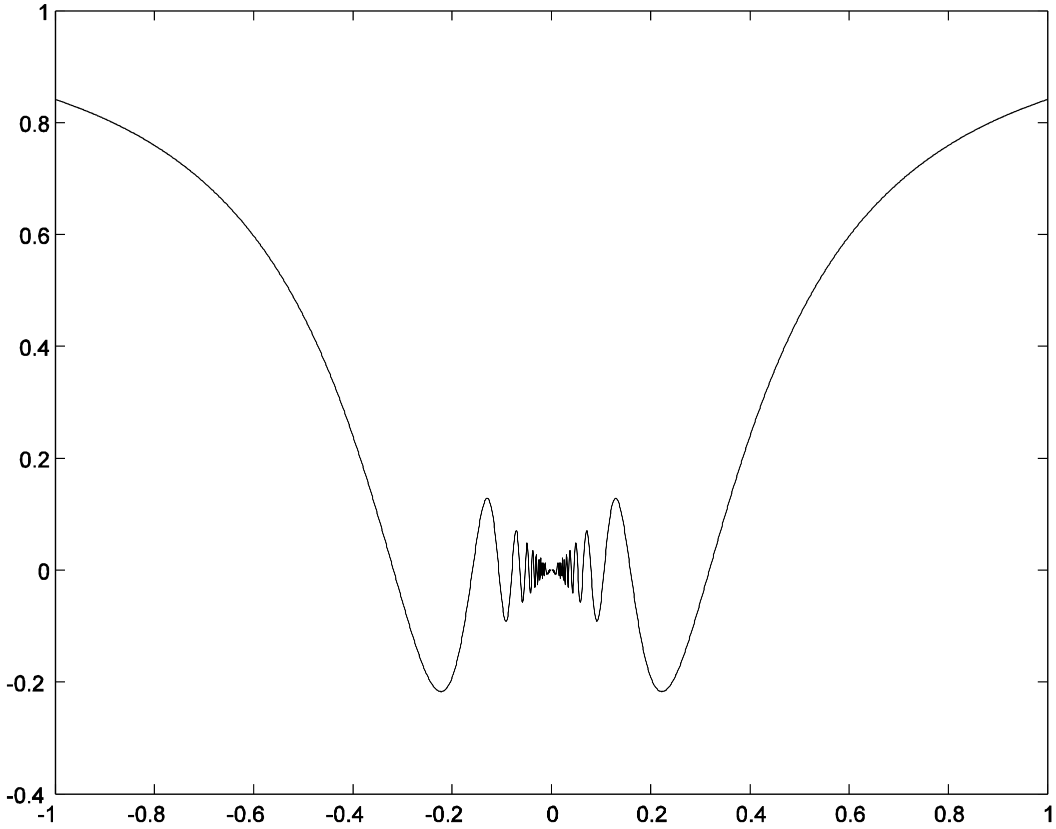


Stetig? Ja oder Nein?

Was ergibt sich, wenn man den Definitionsbereich als $x \neq 0$ festlegt?

Beispiel 5

$$f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

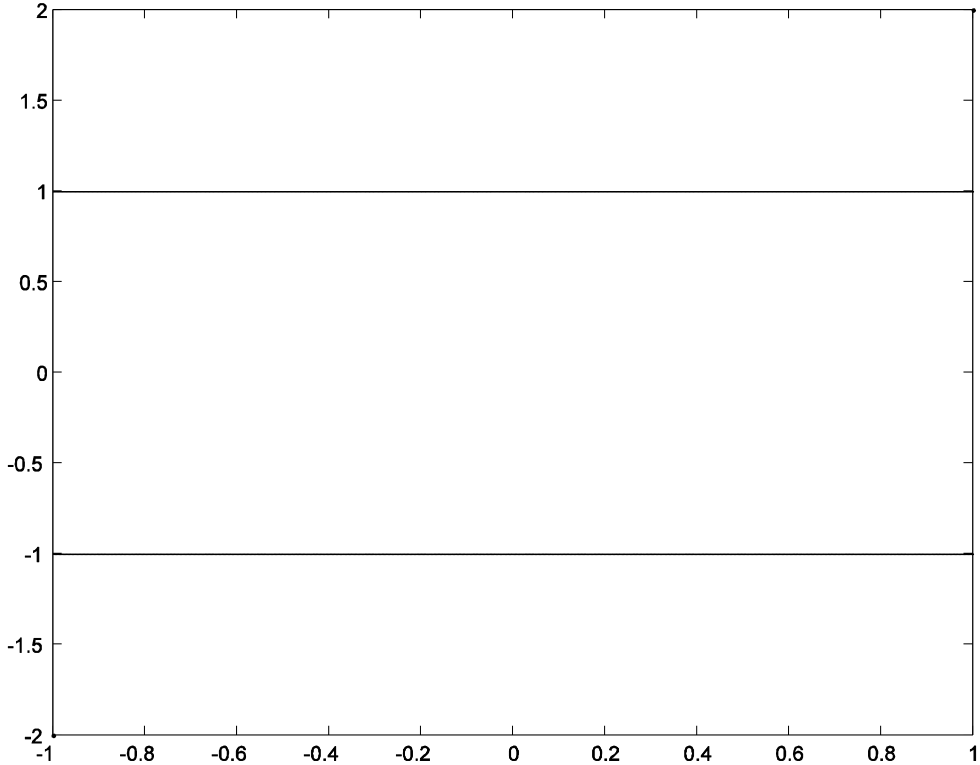


Definitionsbereich?

Stetig? Ja oder Nein?

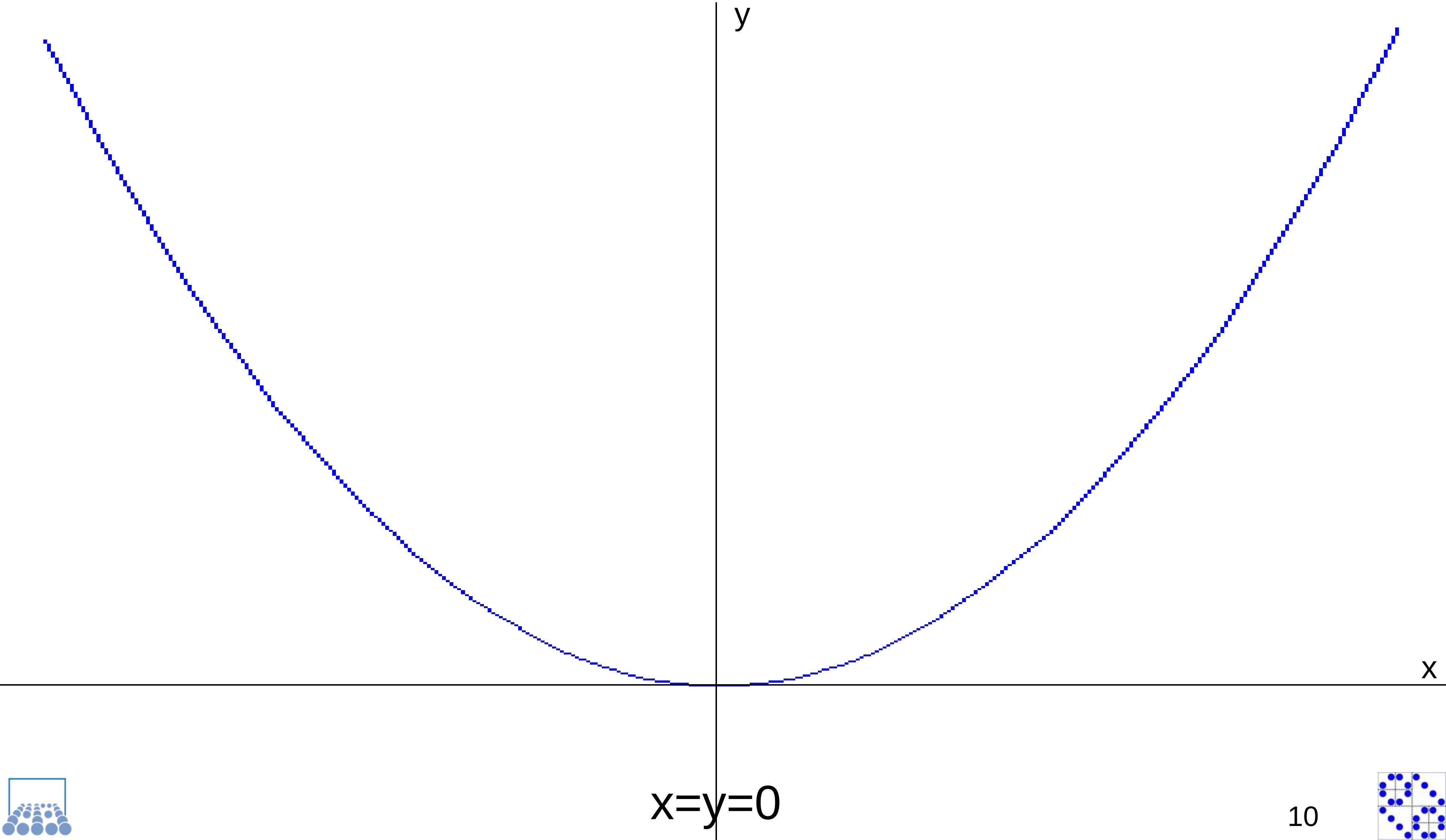
Beispiel 6

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in Q \\ -1 & \text{für} \quad x \in IR \setminus Q \end{cases}$$



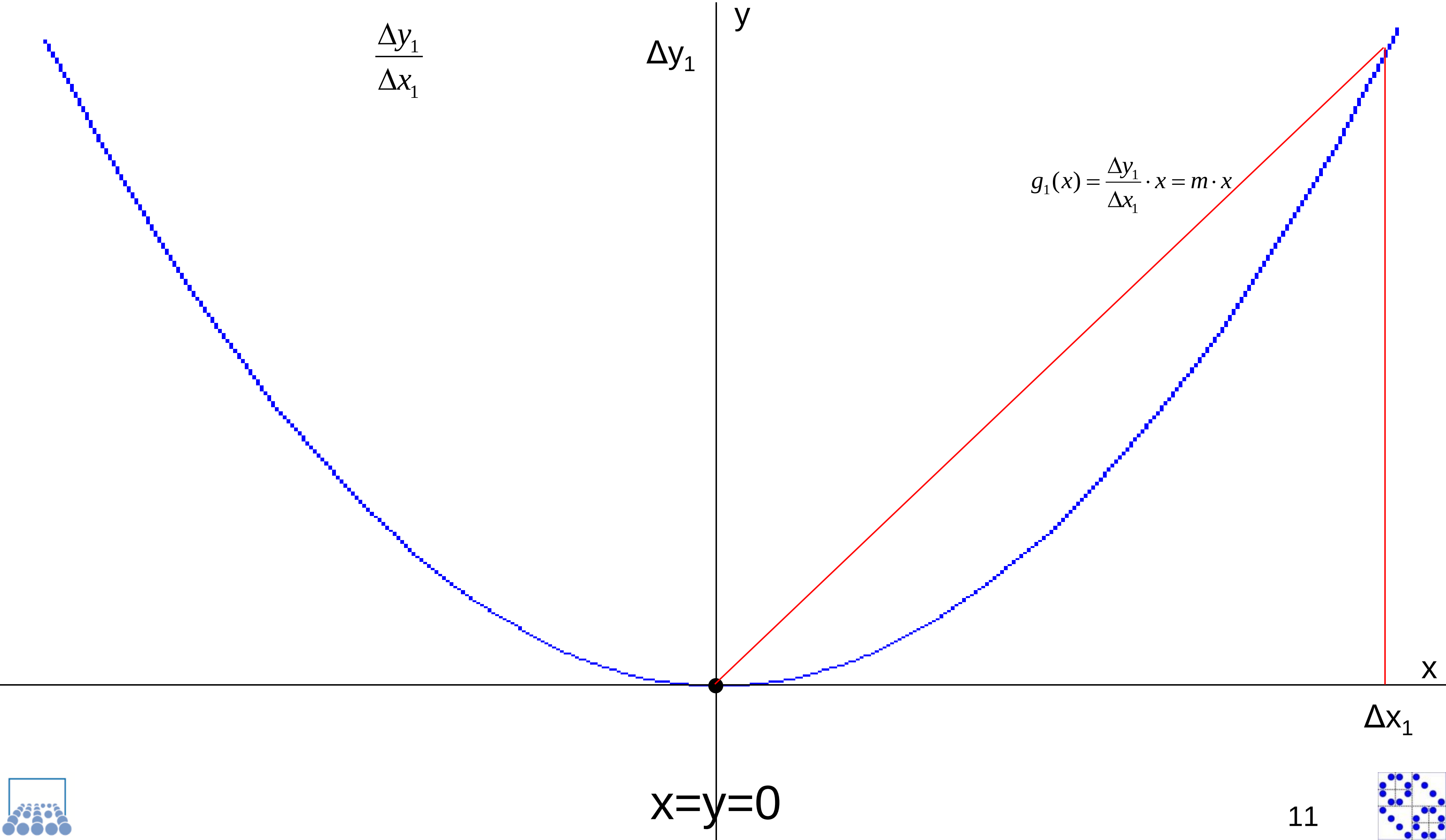
Stetig? Ja oder Nein?

Differentialrechnung



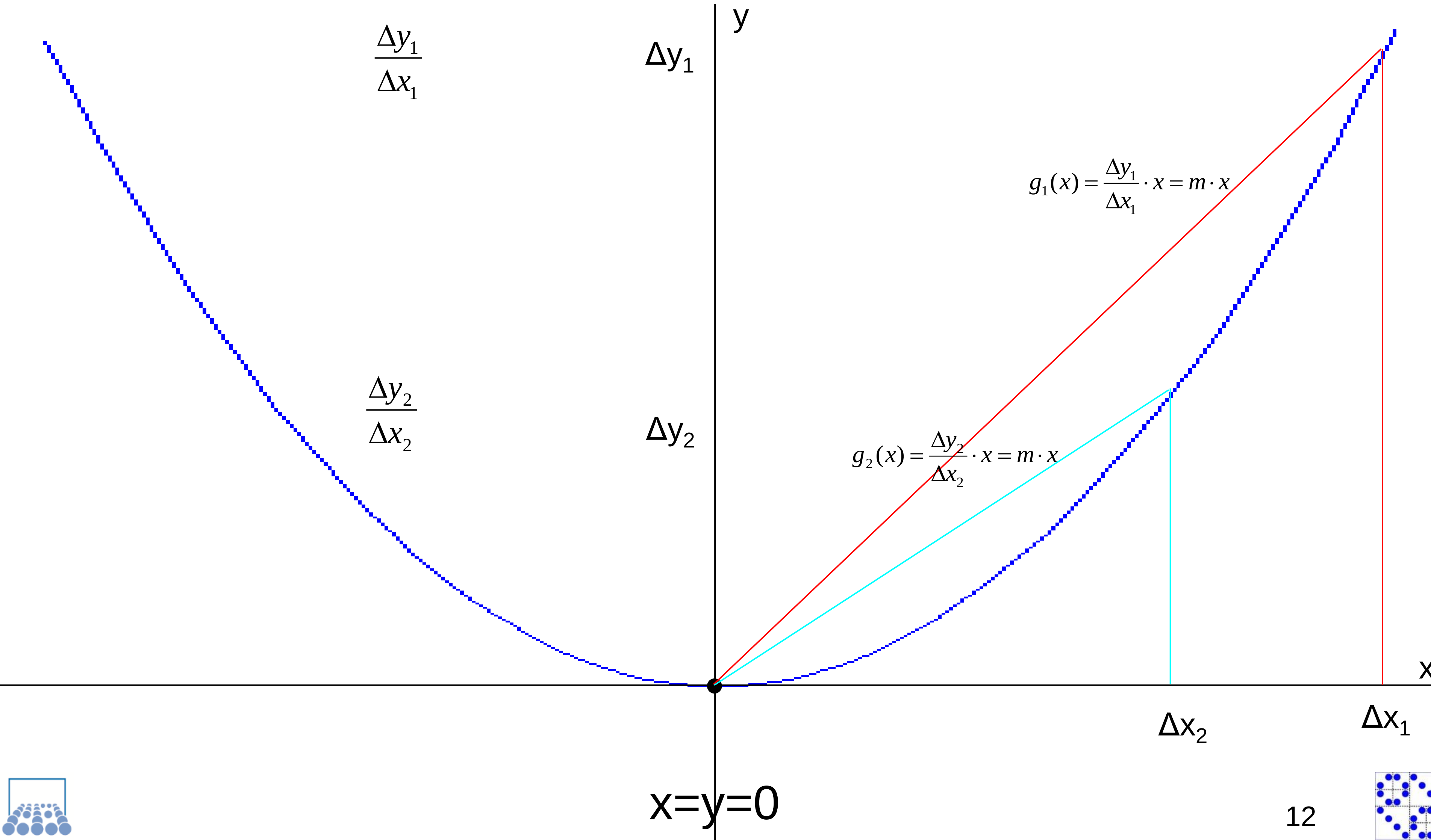
x=y=0

Differentialrechnung

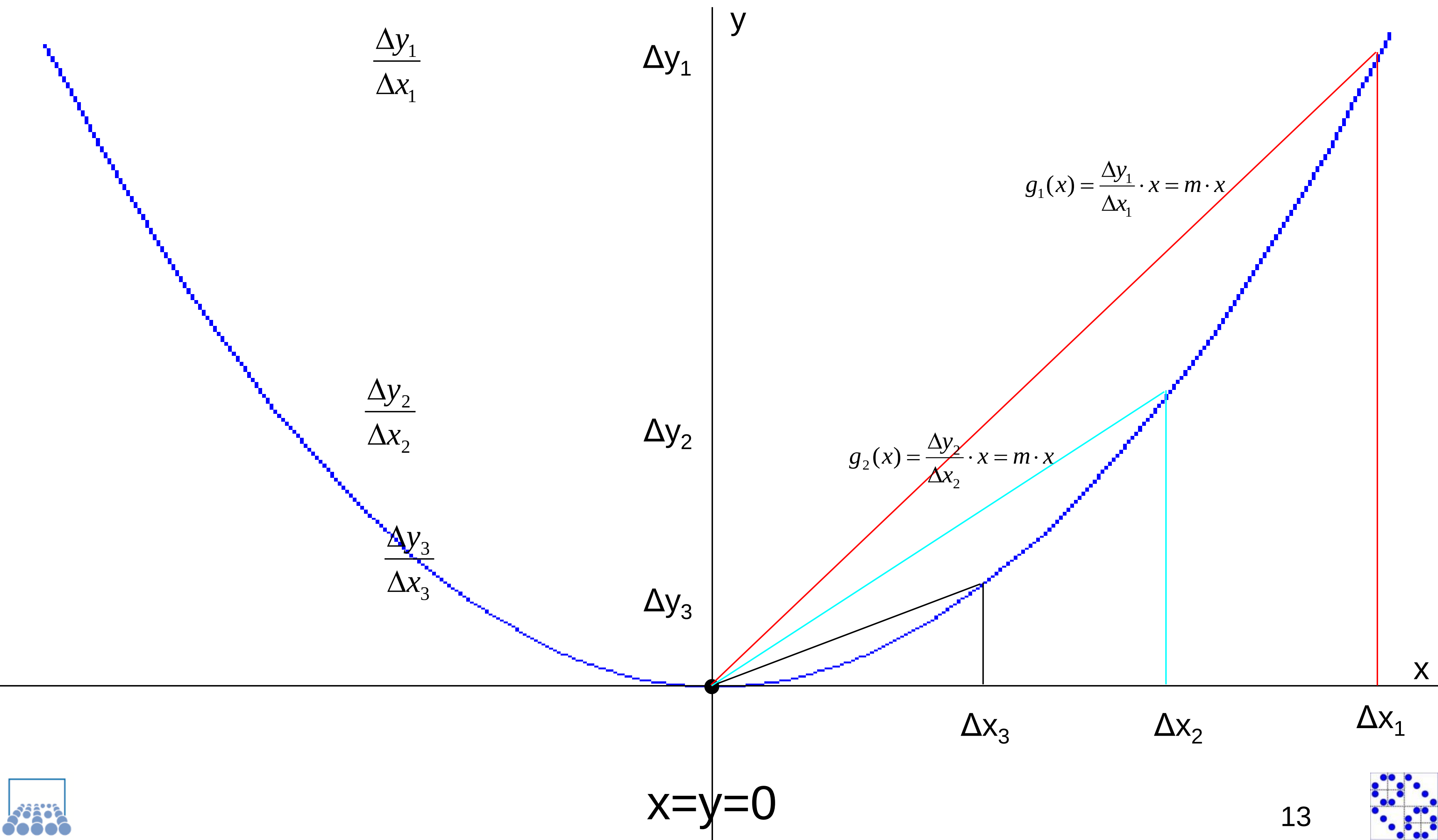


x=y=0

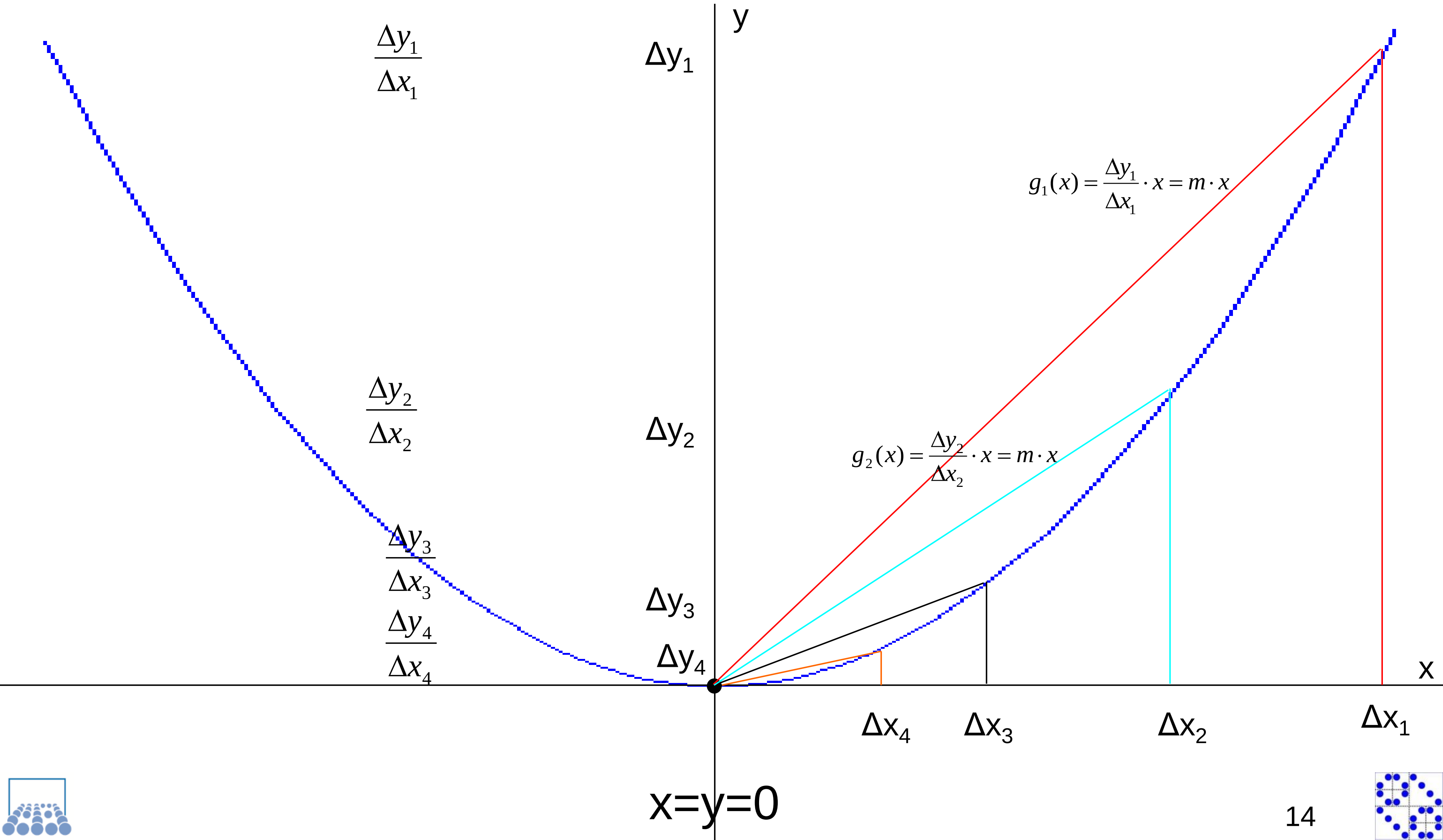
Differentialrechnung



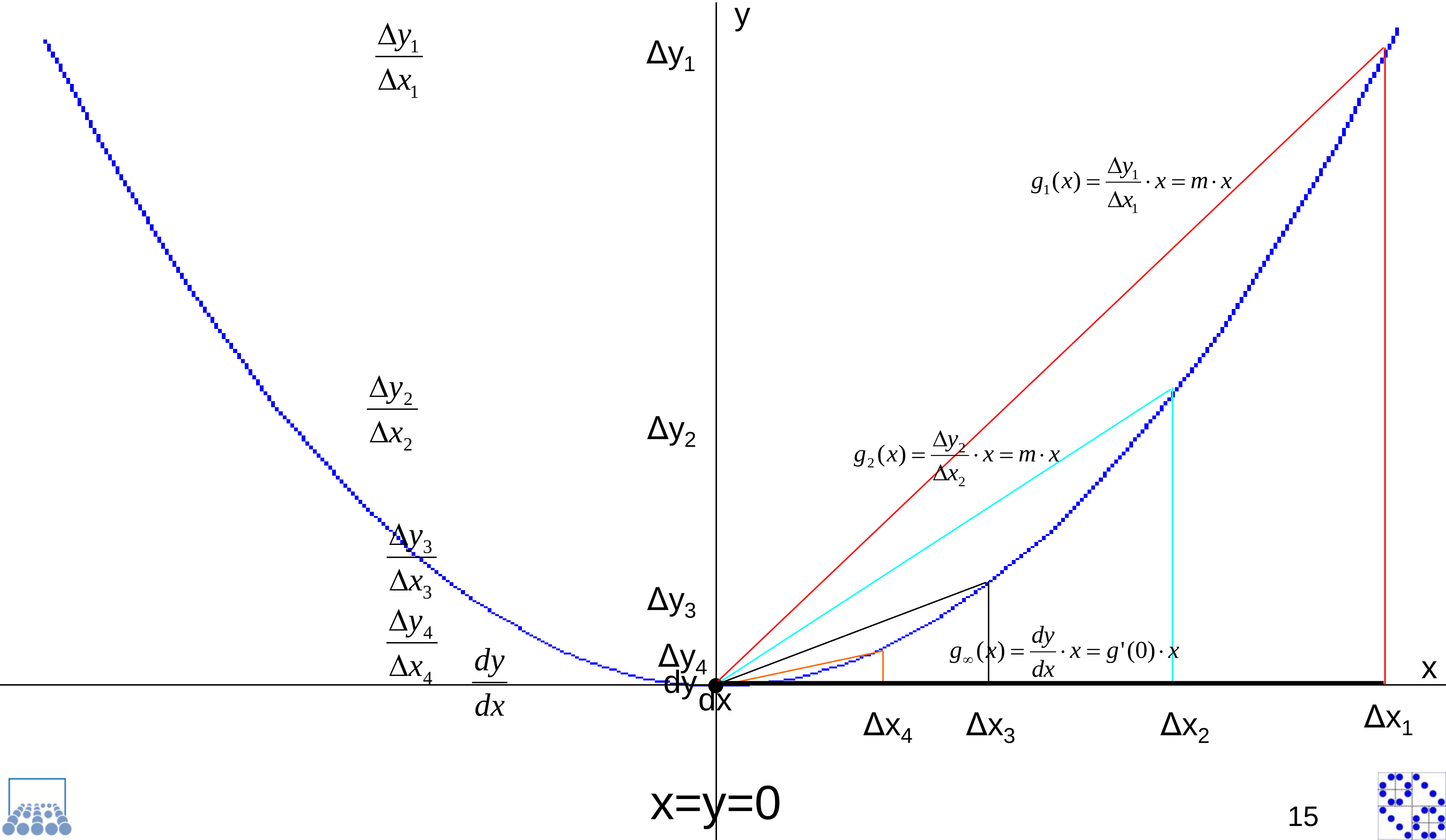
Differentialrechnung



Differentialrechnung



Differentialrechnung



x=y=0

Ableitungen

Ableitung von f(x) an der Stelle a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ableitung an allen Stellen a ergibt eine neue Funktion f´(a)

Beispiel: Ableitung von f(x)=x^n:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(a^n + nha^{n-1} + \cdots + h^n\right) - a^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nha^{n-1} + \cdots + h^n}{h} = n \cdot a^{n-1} \Rightarrow \frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Weitere Ableitungen

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \qquad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$$

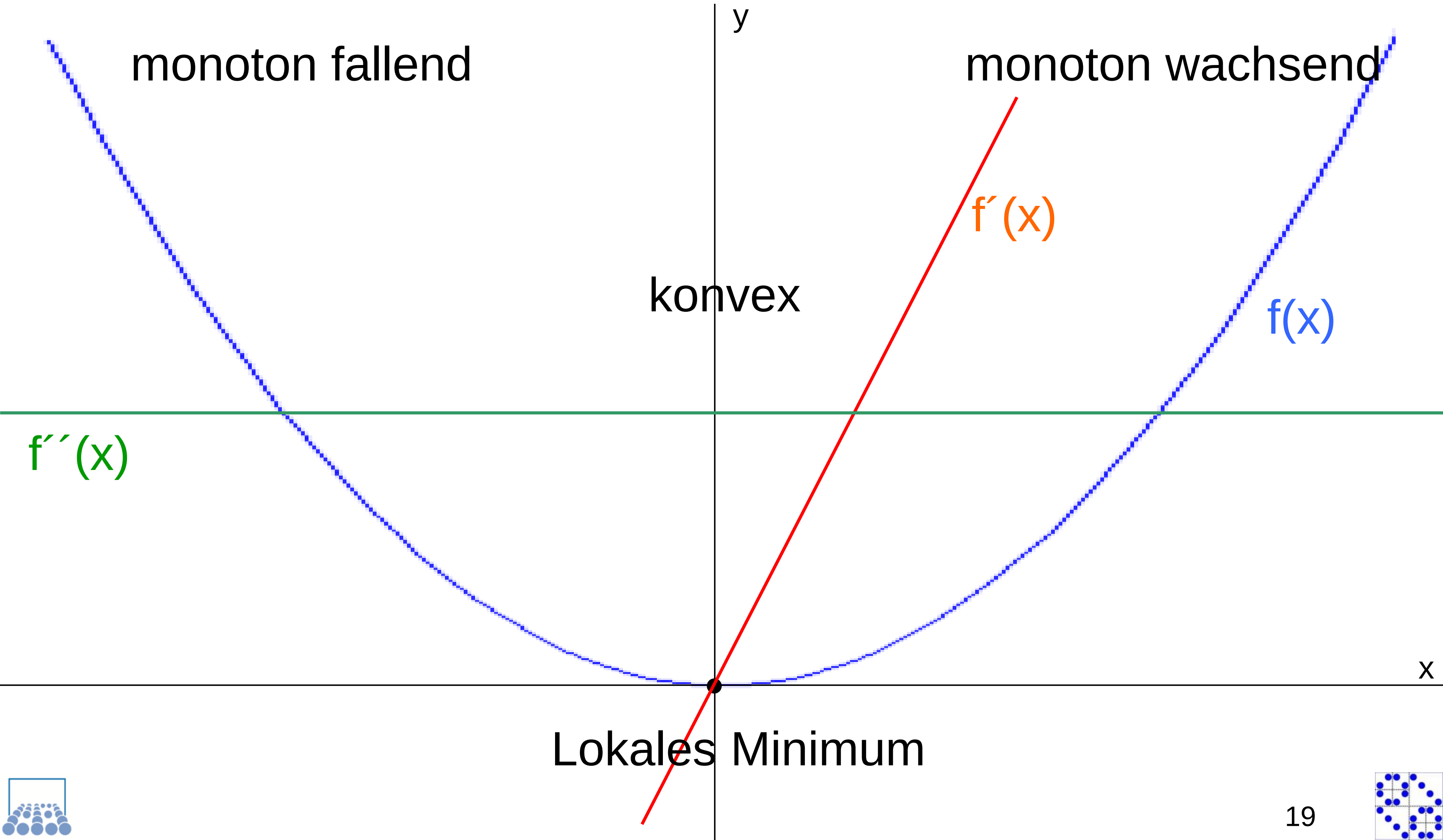
Monotonie

Ist die Ableitung an einer Stelle a größer 0, so weist die Tangente nach oben und die Funktion selbst ist bei a monoton wachsend.

Ist die Ableitung an einer Stelle a gleich Null, so hat die Funktion bei a eine waagrechte Tangente →
- lokales Maximum oder Minimum
- Sattelpunkt

Ist die zweite Ableitung an einer Stelle a größer 0, so weist die Tangente der Ableitung nach oben und die Ableitung selbst ist monoton wachsend.
Die Funktion selbst ist dann bei a konvex gekrümmt.
Vgl. Parabel x^2 oder $-x^2$

$f(x)=x^2$, $f'(x)=2x$, $f''(x)=2$



Produktregel

$$\frac{d}{dx}\big(g(x)\cdot f(x)\big)=g(x)\cdot f'(x)+g'(x)\cdot f(x)$$

Beweis:

$$\lim \frac{g(a+h)f(a+h)-g(a)f(a)}{h}=$$

$$\lim \frac{g(a+h)f(a+h)-g(a+h)f(a)+g(a+h)f(a)-g(a)f(a)}{h}=$$

$$\lim g(a+h)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}f(a)=g(a)f'(a)+g'(a)f(a)$$

Kettenregel

$$y = g(x), \qquad z = f(y), \qquad z = f(g(x))$$

$$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Beweis:

$$\lim \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} = \lim \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{\boxed{g(a+h) - g(a)}} \cdot \frac{\boxed{g(a+h) - g(a)}}{h} =$$

$$\lim \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \cdot \lim \frac{g(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$\lim \frac{f(g(a) + \tilde{h}) - f(g(a))}{\tilde{h}} \cdot \lim \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)$$

Kurvendiskussion

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}: \qquad x \neq 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2\frac{1}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 2\frac{1}{x^3} - 6\frac{1}{x^4} = \frac{2x-6}{x^4}$$

Nullstellen von f: $x_0 = 1$ $\quad x > 1 \rightarrow f(x) > 0$ und $\quad x < 1 \rightarrow f(x) < 0$.

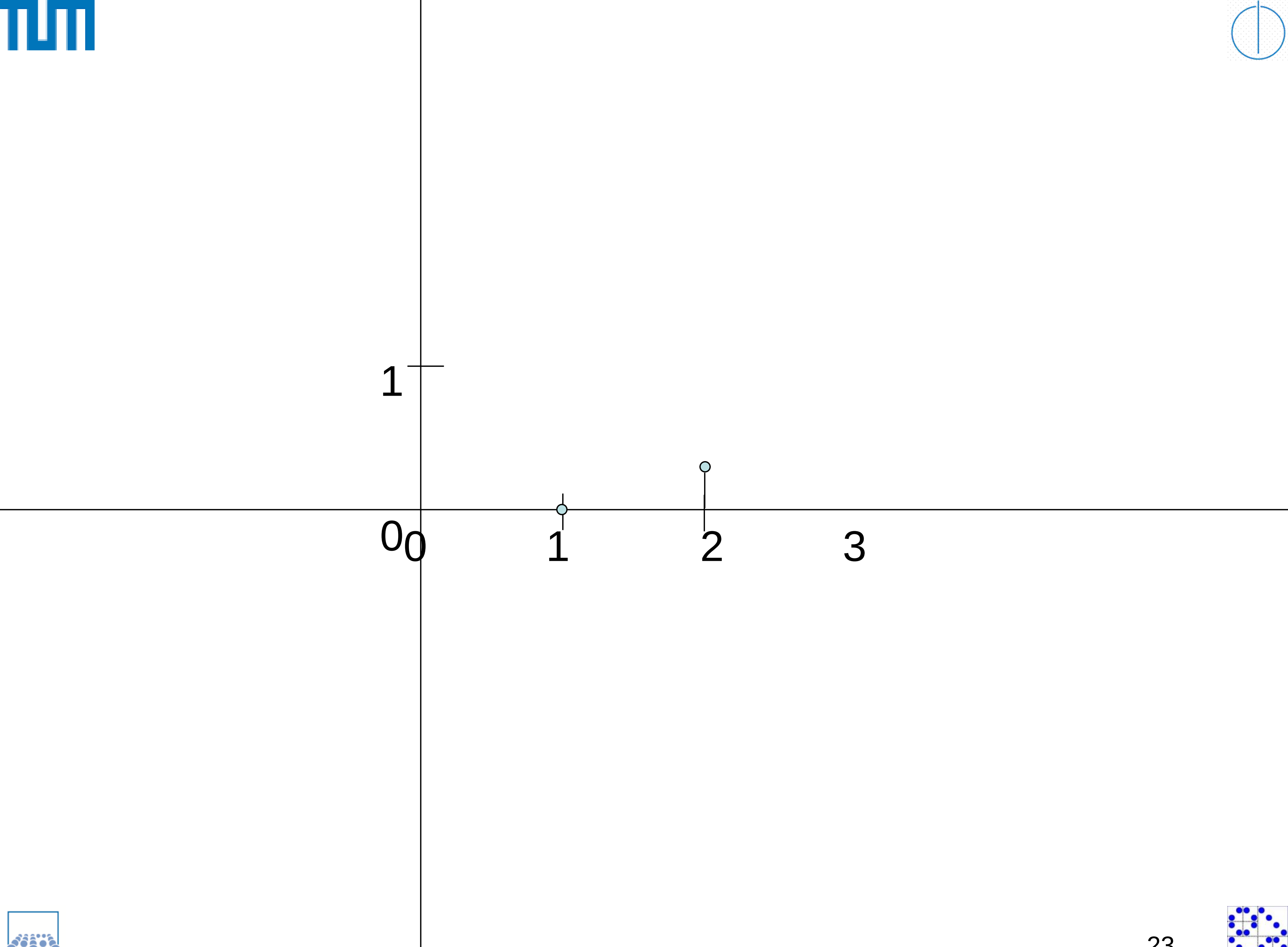
Polstellen von f: $x_1 = 0$

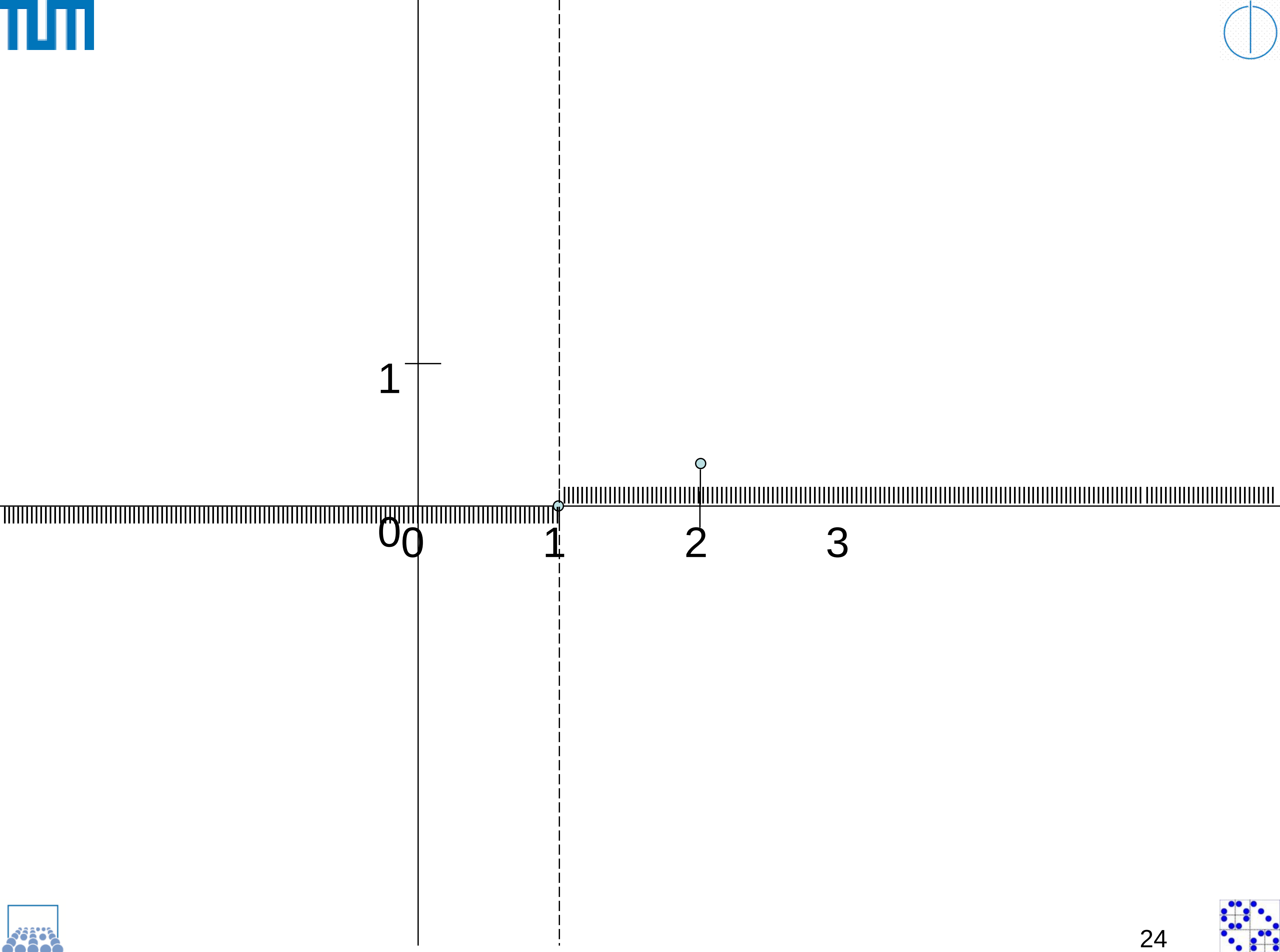
Nullstellen von f´: $x_2 = 2$, f(2)=1/4

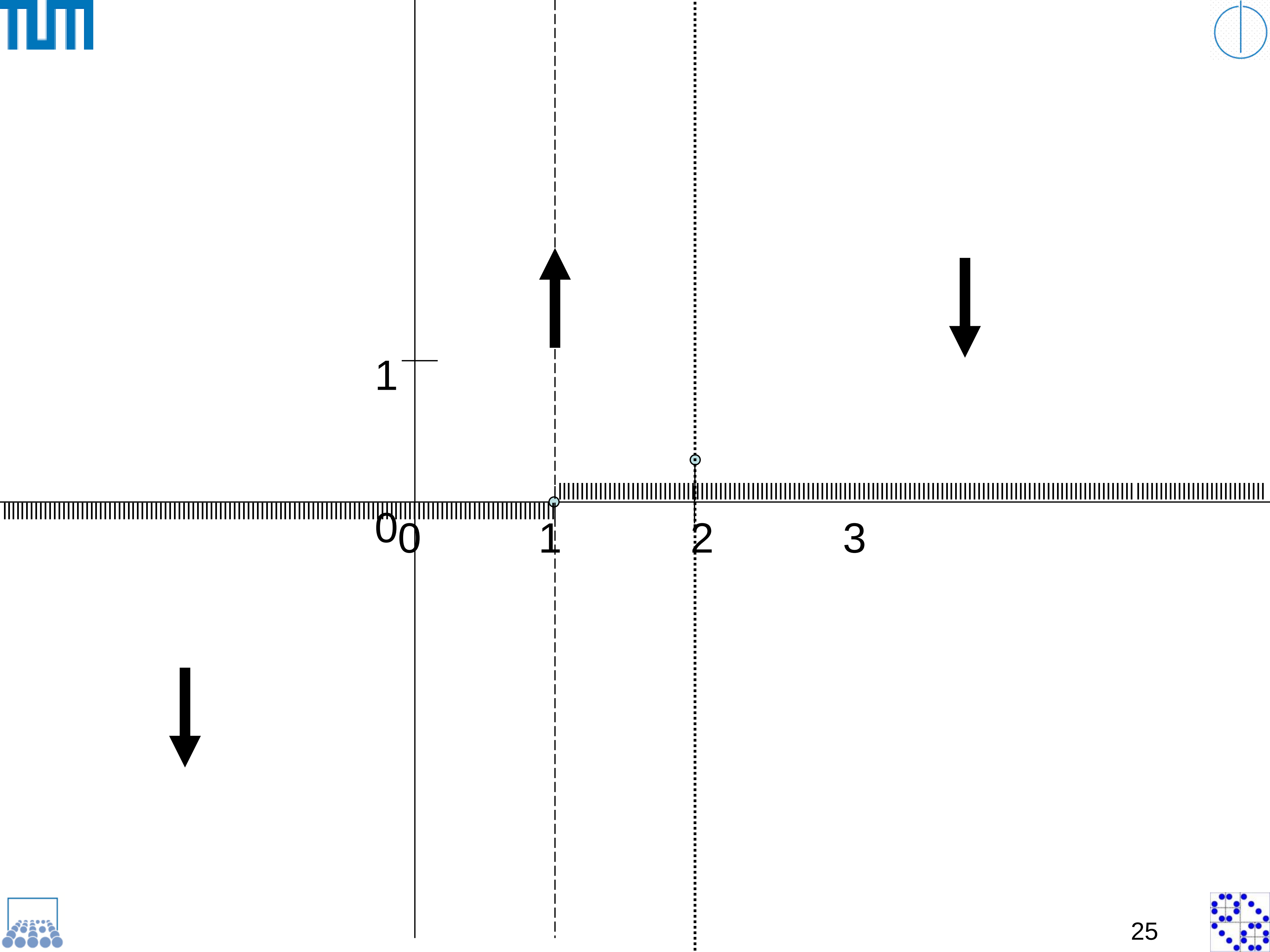
- $x > 2 \rightarrow f'(x) < 0$, f monoton fallend
- $0 < x < 2 \rightarrow f'(x) > 0$, f monoton wachsend
- $x < 0 \rightarrow f'(x) < 0$, f monoton fallend

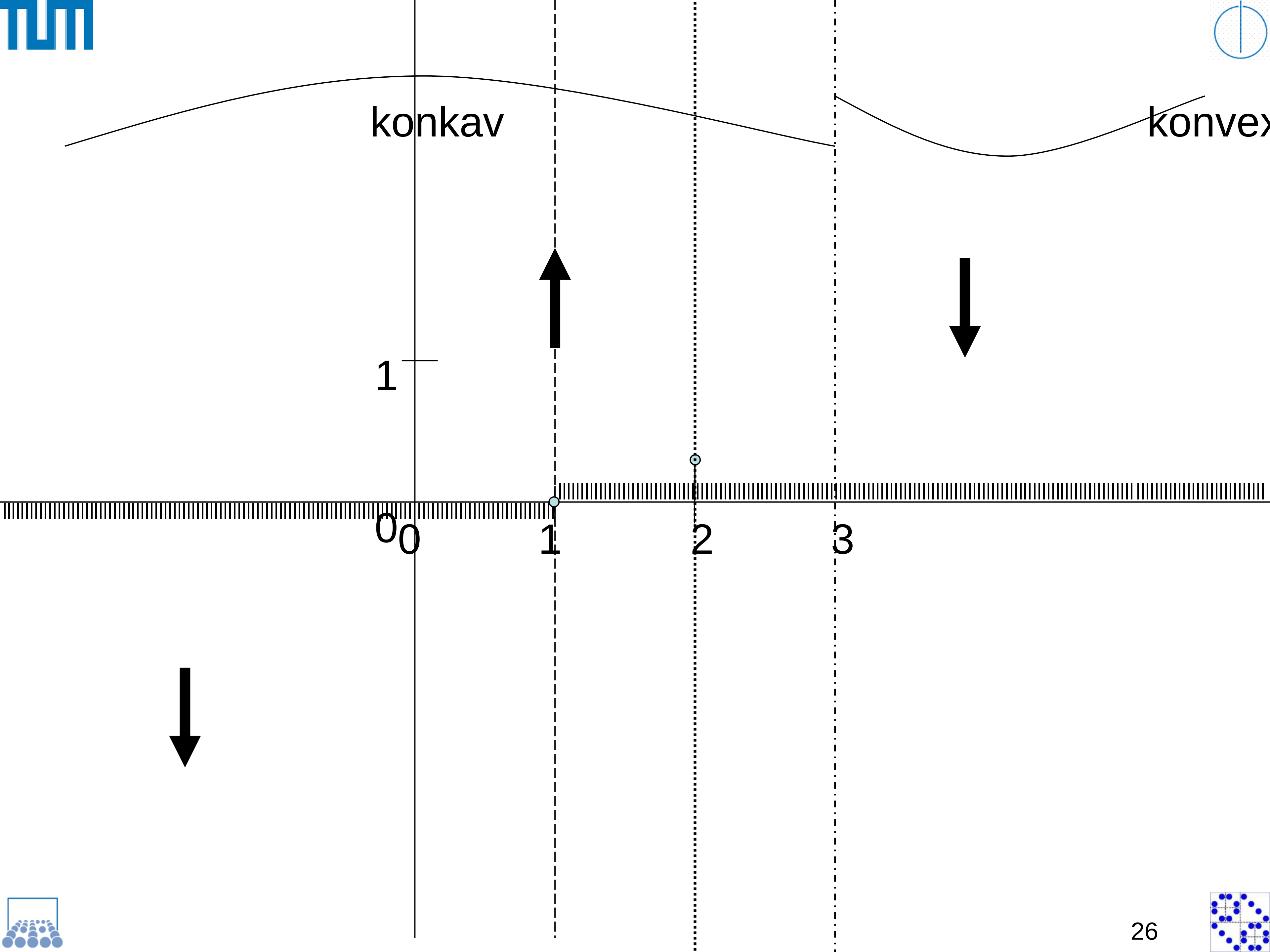
$x > 3$: $f''(x)>0$, f konvex
$x < 3$: $f''(x)<0$, f konkav

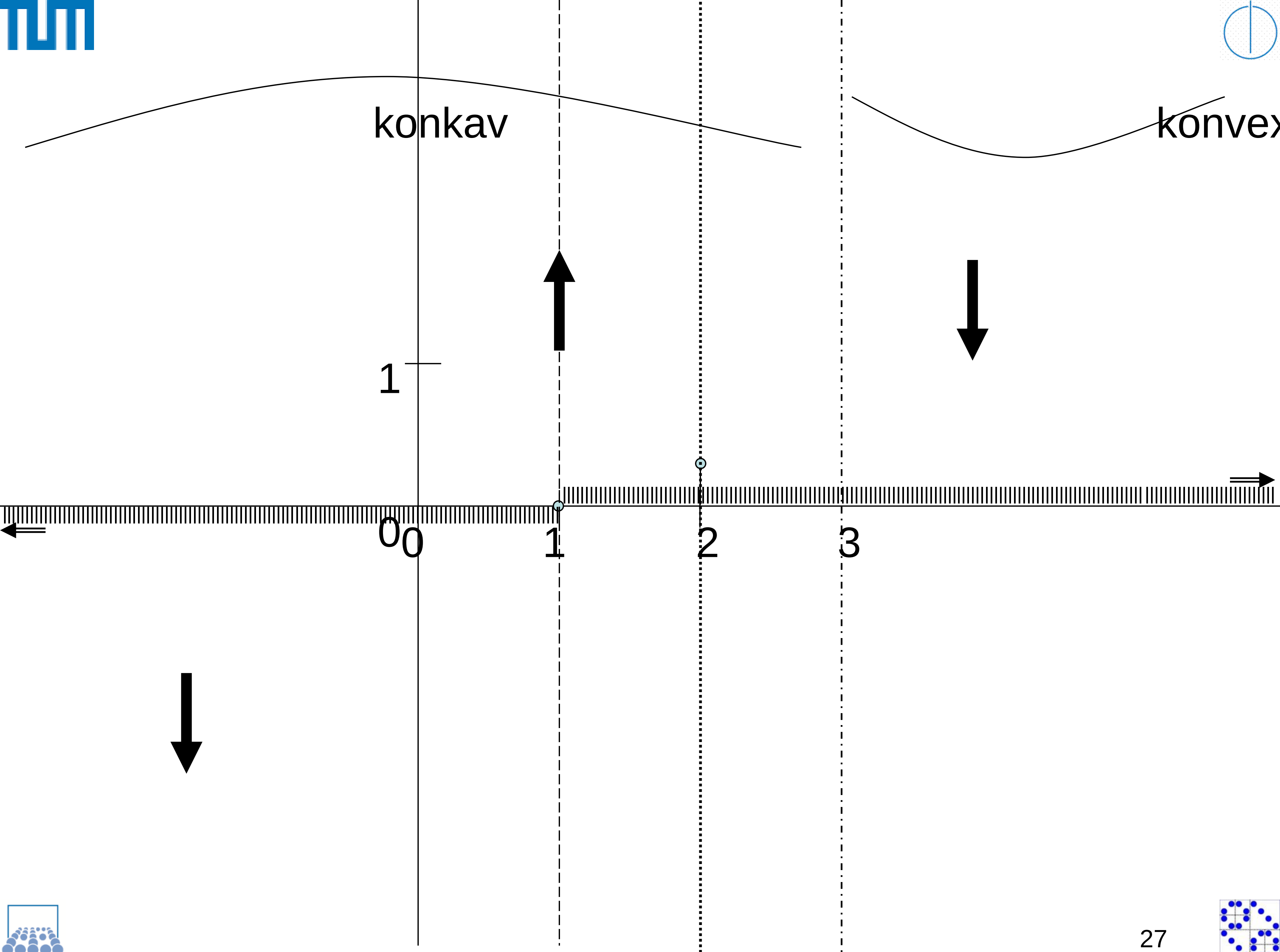
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$$


1
0
0
1
2
3

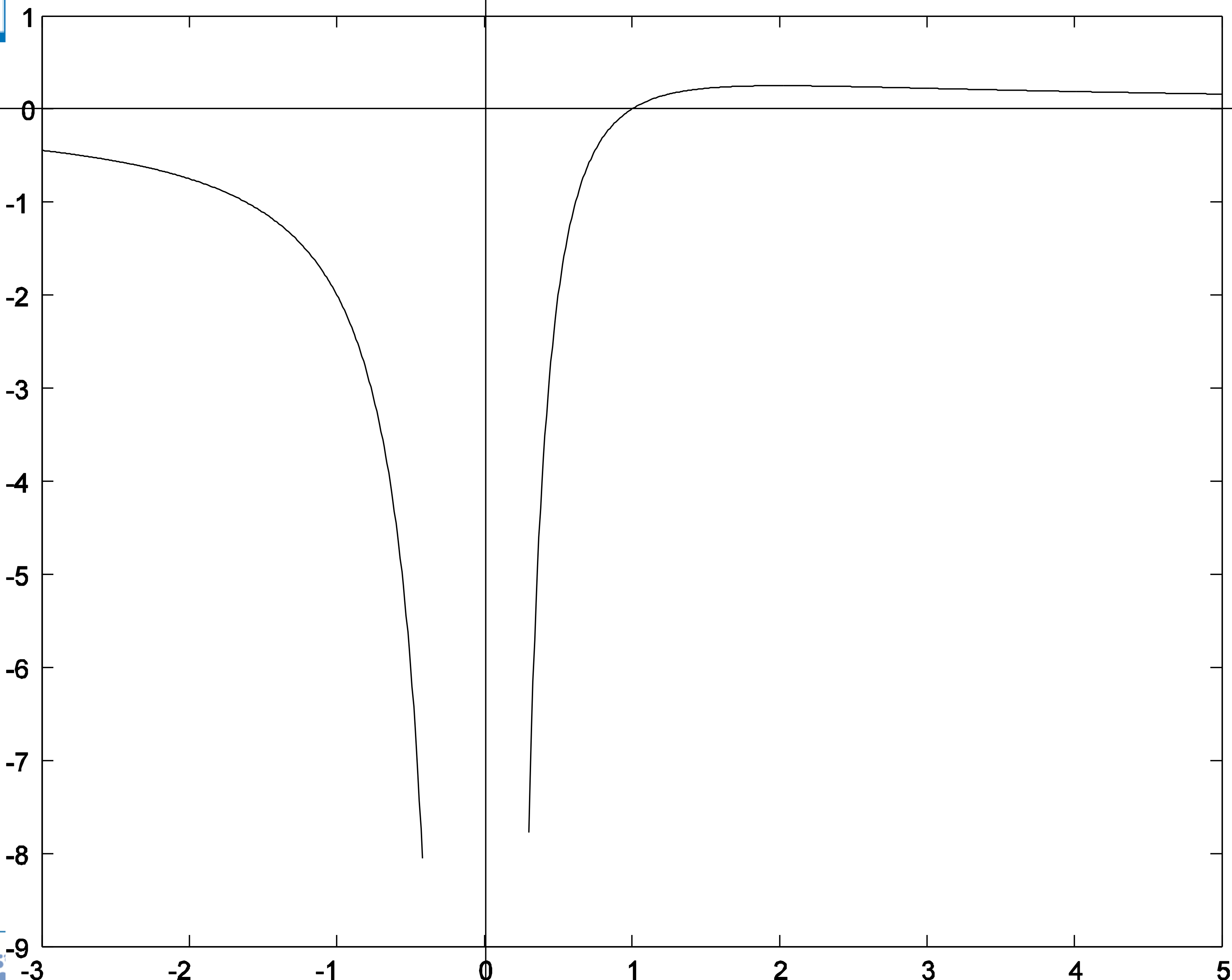

1
0
0
1
2
3


1
0
0
1
2
3


konkav
konvex
1
0
0
1
2
3



konkav
konvex
1
0
0
1
2
3

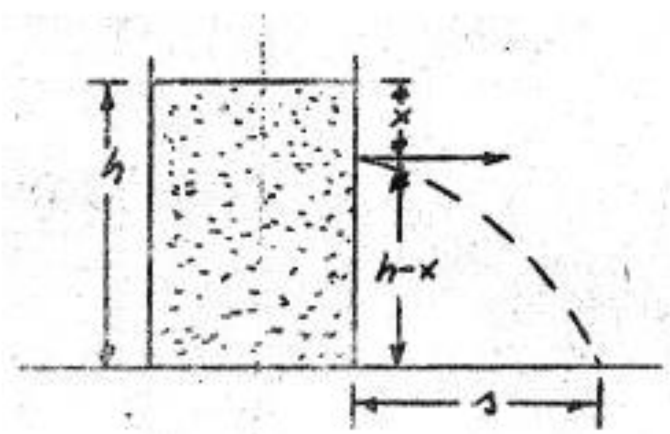


1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Wasserstrahl

Ein mit einer Flüssigkeit vollständig gefülltes Gefäß der Höhe h ($h = 1\,\mathrm{m}$) mit vertikaler Wand steht auf einer horizontalen Ebene. Aus einer Öffnung in der Gefäßwand, die in der Tiefe x unterhalb des Flüssigkeitsspiegels liegt, dringt ein Flüssigkeitsstrahl. Nach dem Gesetz von TORRICELLI verlässt die Flüssigkeit das Gefäß mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ $\left(g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$.

Bestimmen Sie die Tiefe x so, dass der Flüssigkeitsstrahl die maximale Weite s erzielt, und geben Sie die maximale Weite an.



Tipp: *Bearbeiten Sie zur Lösung die nachfolgenden Aufgaben unter Beachtung des Prinzips der ungestörten Überlagerung von Bewegungen und unter Vernachlässigung jeglicher Reibungskräfte.*

a) *Bestimmen Sie die Fallzeit* t*, die der Flüssigkeitsstrahl bis zum Auftreffen auf dem Boden benötigt, in Abhängigkeit von der Größe* x.

b) *Bestimmen Sie die Weite* s *des Flüssigkeitsstrahls in Abhängigkeit von der Größe* x.

c) *Bestimmen Sie das absolute Maximum dieser Weite* s *und die Tiefe* x*, für die dieses Maximum erzielt wird.*