Fakultät für Informatik
der Technischen Universität München

Diskretisierung allgemeiner elliptischer Differentialgleichungen in krummlinigen Koordinatensystemen auf dünnen Gittern

Thomas Dornseifer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Informatik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:		Univ.-Prof. Dr. Heinz-Gerd Hegering
Prüfer der Dissertation:		
	1.	Univ.-Prof. Dr. Christoph Zenger
	2.	Univ.-Prof. Dr. Ronald Hoppe

Die Dissertation wurde am 12.03.1997 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Informatik am 22.07.1997 angenommen.

Zusammenfassung

In vielen Problemstellungen der numerischen Mathematik sind leistungsfähige Diskretisierungsmethoden von entscheidender Bedeutung. Dies erstreckt sich über die geeignete Definition von diskreten Punktemengen zur effizienten Approximation, Interpolation oder Integration verschiedener Klassen von Funktionen, bis hin zum numerischen Lösen partieller Differentialgleichungen. Die von Zenger 1990 eingeführten dünnen Gitter haben sich in diesen Bereichen als ein mächtiges Konzept zur Verbesserung des Nutzen-Kosten-Verhältnisses – erreichte Genauigkeit zu investiertem Speicher- und Rechenaufwand – erwiesen.

Diese Arbeit behandelt auf dieser Dünngitter-Struktur eine Finite-Elemente-Diskretisierung elliptischer Randwertprobleme zweiter Ordnung. Im Vergleich zu früheren Arbeiten werden hier die Betrachtungen auf den allgemeinen linearen Operator in beliebigen Raumdimensionen erweitert. Diese Erweiterung beinhaltet wesentlich eine implementierungstechnische Komponente, indem die entwickelte Diskretisierung leicht in bestehende unidirektionale Algorithmen eingesetzt werden kann. Hierbei wird der allgemeine d-dimensionale Fall rekursiv auf den einfachen eindimensionalen Fall reduziert.

Unter Verwendung von Gebietstransformationsmethoden wird ebenfalls die Klasse der betrachteten Gebiete auf krummlinig berandete erweitert. Hier finden insbesondere drei Methoden zur Gittererzeugung Behandlung, die sich in besonderer Weise für die Verwendung auf dünnen Gittern eignen.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In vielen Bereichen der ingenieur- und naturwissenschaftlichen Forschung und Entwicklung spielt die Beschreibung und Vorhersage physikalischer Phänomene eine wichtige Rolle. Die zwei klassischen Ansätze hierzu können kurz durch die Begriffe *physikalisches Experiment* (praktischer Ansatz) und *physikalische Modellbildung* (theoretischer Ansatz) charakterisiert werden. Die physikalische Modellbildung stützt sich zumeist auf mathematische Beschreibungsweisen, insbesondere *partielle Differentialgleichungen* bieten hier ein wichtiges Instrumentarium. In jüngerer Zeit gewinnt ein dritter Ansatz stetig an Bedeutung – die *numerische Simulation*. Dort werden die kontinuierlichen Probleme des mathematischen Modells *diskretisiert*, also nur noch in endlich vielen ausgewählten Punkten des Grundgebiets betrachtet. Eine solche Punktmenge wird dann häufig als *Gitter* bezeichnet.

Eine besonders effiziente Art der Punkteauswahl stellen dabei die in [Zenger, 1990] eingeführten *dünnen Gitter* dar. Im Bereich der elliptischen Differentialgleichungen beschränken sich die Methoden auf ihnen bisher auf die Behandlung einfacher Differentialoperatoren in d Raumdimensionen und auf Gebiete einfacher Geometrie. In der vorliegenden Arbeit werden diese Betrachtungen auf allgemeine lineare elliptische Operatoren und krummberandete Gebiete erweitert.

Bei Gittern wird abhängig von der Vorgehensweise bei der Auswahl der Gitterpunkte zwischen *empirischen Gittern*, *unstrukturierten Gittern* und *strukturierten Gittern* unterschieden. Die Punkte empirischer Gitter unterliegen hierbei keinem strengen Auswahlkriterium und besitzen keinerlei Verbindungsstruktur untereinander. Klassische Methoden auf solchen Gittern sind etwa Monte-Carlo-Methoden. In unstrukturierten Gittern weisen die Gitterpunkte dagegen eine Verbindungsstruktur auf, die beliebig geartet sein darf. Die Verbindungen bestehen dann aus Kanten von Punkt zu Punkt, die zusammen ein *Netz* von Polygonen (in 2 D) bzw. Polyedern (in 3 D) bilden. Häufig wird dann von *Gittervernetzung* gesprochen. Strukturierte Gitter zeichnen sich schließlich dadurch aus, daß es eine fest vorgegebene Verbindungsstruktur zwischen den Punkten gibt. Insbesondere gilt hier, daß die Verbindungsstruktur nicht durch die Lage der Punkte bestimmt wird, sondern umgekehrt die Verbindungsstruktur die Lage der Punkte festlegt. Den einfachsten Fall bildet hier ein äquidistantes Gitter über einem rechteckigen Gebiet. Dünne Gitter gehören in dieser Einteilung zu den strukturierten Gittern und können in natürlicher Weise in einfachen Baumstrukturen organisiert werden.

In vielen Anwendungen konkurrieren die strukturierten Gitter mit den unstrukturierten, und in einem direkten Vergleich weisen sich unstrukturierte Gitter durch eine hohe Flexibilität bei der Behandlung von Problemen auf komplizierten Geometrien aus. Ebenso sind adaptive Verfeinerungen leicht realisierbar, in denen auch beliebig wählbare Koordinaten in die Diskretisierung aufgenommen werden können (etwa Gitterpunkte mit transzendenten Koordinaten). Jedoch ist der Verwaltungsaufwand sehr hoch, und die Erzeugung unstrukturierter Gitter ist oftmals genauso teuer wie das Lösen des jeweils zugrundeliegenden Problems selbst. Bei strukturierten Gittern beschränkt sich dagegen die Methodik zur Behandlung komplizierterer Geometrien meist auf Blockstrukturierung und Gebietstransformationen. Entsprechend geringer sind hier die Möglichkeiten, komplizierte Geometrien zu modellieren. Dafür fällt fast kein Erzeugungs- und Verwaltungsaufwand an, und die Algorithmen auf strukturierten Gitter sind zumeist einfacher und effizienter zu implementieren. Dünne Gitter zeichnen sich darüber hinaus dadurch aus, daß sie „auf sehr bequeme Art und Weise die Möglichkeit adaptiver Verfeinerung (bieten). Sie erweisen sich als ein Konzept, das geradezu auf Adaptivität abzielt und für das adaptiv verfeinerte (dünne) Gitter der Normal- und reguläre (dünne) Gitter der Spezialfall sind“ ([Bungartz, 1992]).

In Anwendungsfällen müssen die verwendeten Gitterstrukturen um so höher aufgelöst werden, je genauer die simulierte physikalische Realität nachgebildet werden soll. Hier stoßen jedoch die leistungsstärksten Rechner heute und in absehbarer Zeit an ihre Grenzen. Ein Paradebeispiel stellt in diesem Zusammenhang die direkte Turbulenzsimulation (DNS) in der numerischen Strömungssimulation dar. Dort müssen zur Erfassung feinster – dreidimensionaler – Wirbelstrukturen die Gitterfeinheiten nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten gewählt werden ($k^{-5/3}$-Gesetz von Kolmogorov), die etwa bei aerodynamischen Untersuchungen von Autos oder Flugzeugen mehr als 10^{13} Gitterpunkte verlangen.

Solche Schwierigkeiten im Blick tut es Not, möglichst effiziente und speichersparende numerische Methoden zu entwickeln. Neben den Ansätzen der adaptiven Gitterverfeinerung und der Erhöhung der Approximationsordnung stellen gerade die dünnen Gitter ein mächtiges Konzept zur Verbesserung des Nutzen-Kosten-Verhältnisses – *erreichte Genauigkeit zu investiertem Speicher- und Rechenaufwand* – zur Verfügung. Das wesentliche Prinzip dünner Gitter bilden hierarchische Basen. Auf dem Weg zu einem dünnen Gitter startet man dabei auf dem äquidistanten d-dimensionalen Gitter mit der Feinheit $h = 2^{-n}$ in jeder Koordinatenrichtung und dem darauf definierten Funktionenraum der stetigen und stückweise d-linearen Funktionen. Bei der Verwendung nodaler Basen trägt jeder Gitterpunkt zum Interpolationsfehler mit einem Beitrag gleicher Größenordnung bei. Beim Übergang zu hierarchischen Basen gilt dies nicht mehr, hier unterscheiden sich die Beiträge sogar um h-Potenzen. Diese stark unterschiedliche Gewichtung wird nun als *globales* „Ausdünnungskriterium“ des „vollen“ Gitters verwendet, das a priori die Glattheitsbedingungen der Daten ausnutzt und so wieder zu einer regulären Gitterstruktur führt. Für glatte Funktionen erhält man eine Reduktion der Gitterpunkte von $O((2^n)^d)$ im vollen Gitter auf $O(2^n n^{d-1})$ im dünnen Gitter. Gleichzeitig reduziert sich die Approximationsgenauigkeit in der Maximum- bzw. L_2-Norm nur von $O(h^2)$ auf vollen Gittern zu $O(h^2 |\log h|^{d-1})$ auf dünnen Gittern. Die Approximationsgüte in der H^1-Norm bleibt mit $O(h)$ sogar erhalten. Das Ausdünnungskriterium kann auch *lokal* verwendet werden, was dann in natürlicher Weise zu adaptiven (dünnen) Gittern führt.

In zahlreichen Arbeiten wurden in verschiedenen Bereichen der numerischen Mathematik Verfahren untersucht, die auf der Dünngitter-Technik basieren. Diese erstrecken sich auf Fouriertransformationen in [Hallatschek, 1992], auf die numerische Quadratur mehrdimensionaler Funktionen in [Bonk, 1994] und auf die Kompression von Bild- und Audiodaten in [Paul, 1995] und [Frank, 1995]. Die größten Aktivitäten wurden aber im Bereich der partiellen Differentialgleichungen entwickelt. Hier umfassen die Arbeiten die Behandlung der zwei- und dreidimensionalen Poissongleichung in [Bungartz, 1992], die Erweiterung auf die d-dimensionale Helmholtzgleichung in [Balder & Zenger, 1996] und die zeitabhängige Wärmeleitungsgleichung in [Balder, 1994], den allgemeinen elliptischen Differentialoperator in zwei Raumdimensionen in [Pflaum, 1996] und die Behandlung zweidimensionaler krummlinig berandeter Gebiete in [Pflaum, 1992] und [Dornseifer & Pflaum, 1996]. Ebenso wurde in zwei Raumdimensionen die Stokes-Gleichung in [Zimmer, 1991] und die biharmonische Gleichung in [Störtkuhl, 1994] betrachtet. Letztere verwendet dabei schon Ansatzfunktionen höherer Ordnung, die in [Bungartz, 1995] in einem allgemeineren Konzept behandelt werden. Effiziente Lösungsverfahren für Dünngitter-Diskretisierungen sind in [Griebel & Oswald, 1993] und [Griebel & Zimmer, 1992] beschrieben. Zudem wird in [Griebel et al., 1992], [Bungartz et al., 1994] und [Huber, 1996] mit der Kombinationsmethode ein interessanter alternativer Zugang für reguläre dünne Gitter untersucht. Die Gleichungen werden dabei nicht direkt auf dem dünnen Gitter diskretisiert, sondern auf im dünnen Gitter enthaltenen vollen Gittern mit verschiedenen Feinheiten in den Koordinatenrichtungen. Die berechneten „Teillösungen" werden dann per Superposition zu einer Dünngitter-Lösung kombiniert. Diese Methode läßt sich auch in natürlicher Weise parallelisieren. Ebenso sind die Studien über robuste Mehrgitterlöser bei Finite-Volumen-Diskretisierungen in [Hemker, 1994] zu nennen, in denen die Unempfindlichkeit dünner Gitter gegenüber gewisser Anisotropien ausgenutzt wird.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich nun mit der Finite-Elemente-Diskretisierung elliptischer Randwertprobleme zweiter Ordnung, deren Behandlung sich – wie eingangs erwähnt – im Bereich dünner Gitter bislang im d-dimensionalen Fall auf den Helmholtzoperator beschränkt und für allgemeine Operatoren auf zwei Raumdimensionen. Dieser Umstand liegt sicherlich nicht zuletzt in der Tatsache begründet, daß die Entwicklung effizienter Algorithmen für die Berechnung der bei Dünngitter-Diskretisierungen auftretenden Steifigkeitsmatrizen neue Denkweisen erfordert. Insbesondere darf die benötigte Berechnungs-Komplexität nicht schlechter als die der Unbekannten sein. In dieser Arbeit wird sich daher mit der Diskretisierung allgemeiner elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordnung beschäftigt, deren Implementierung im Gegensatz zu der in [Pflaum, 1996] eingeführten Diskretisierung auf dem d-dimensionalen Einheitsintervall leicht zu realisieren ist. Zudem wird die Behandlung der allgemeinen elliptischen Operatoren dazu benutzt, die eingeführte Dünngitter-Diskretisierung mittels Transformationsmethoden auf d-dimensionale, krummlinige Koordinatensysteme auszuweiten.

In Kapitel 2 werden dünne Gitter unter Verwendung stückweise multilinearer, hierarchischer Basen eingeführt und die wichtigsten theoretischen Ergebnisse zur stückweise multilinearen Dünngitter-Interpolation wiederholt. Nach einigen grundlegenden Bemerkungen zu adaptiven dünnen Gittern wird kurz auf die später benötigte Multiplikation zweier Dünngitter-Funktionen eingegangen. Um auch Ableitungen der stückweise multilinearen Dünngitter-Funktionen behandeln zu können, werden in Abschnitt 2.3 stückweise konstante hierarchische Basen eingeführt, mit denen dann in Abschnitt 2.4 eine gemischte Interpolation definiert wird. Diese operiert in bestimmten Koordinatenrichtungen stückweise konstant, in den übrigen stückweise linear.

Kapitel 3 befaßt sich mit einer Galerkin-Diskretisierung elliptischer Randwertprobleme zweiter Ordnung auf dünnen Gittern über dem d-dimensionalen Einheitsintervall. Bei der Formulierung der Diskretisierung wird darauf Wert gelegt, diese in das d-dimensionale, unidirektionale algorithmische Konzept aus [Balder, 1994] einpassen zu können. Damit kann auch hier der d-dimensionale Fall rekursiv auf den einfachen eindimensionalen Fall reduziert werden, was die Formulierung d-dimensionaler Programme ermöglicht. Für die Implementierung der Diskretisierung wird die explizite Berechnung der partiellen Ableitungen der stückweise d-linearen Ansatzfunktionen notwendig. Dafür und für die Berechnung neuer gemischter Interpolationsoperatoren werden in Abschnitt 3.3 konkrete algorithmische Hinweise gegeben. Abschnitt 3.4

befaßt sich dann mit den notwendigen Erweiterungen zur Behandlung unstetiger Koeffizienten. Das Kapitel schließt mit der Untersuchung exemplarischer numerischer Experimente.

In Kapitel 4 wird die Erweiterung der Diskretisierung auf krummberandete Gebiete besprochen. Der verwendete Ansatz stützt sich auf Transformationsmethoden, bei denen das d-dimensionale, krummberandete Gebiet auf das d-dimensionale Einheitsintervall zurückgeführt wird. Durch die Transformation ändert sich auch der zugrundeliegende Differentialoperator, worauf in Abschnitt 4.1 näher eingegangen wird. Abschnitt 4.2 behandelt dann drei Methoden zur „Gittererzeugung“, d. h. drei Methoden zum Erzeugen geeigneter Gebietstransformationen, die sich in besonderer Weise für die Verwendung auf dünnen Gittern eignen. Dies ist neben Interpolationsmethoden und elliptischen Methoden ein hybrides Verfahren, das wichtige Eigenschaften der beiden anderen Methoden in sich vereint. Auch hier schließt das Kapitel mit den unterschiedlichsten numerischen Experimenten, die die hohe Flexibilität der präsentierten Dünngitter-Diskretisierung dokumentieren.

An dieser Stelle darf ich meinen Dank aussprechen. Beginnen möchte ich bei Dr. Robert Balder und Dr. Christoph Pflaum, die mir den Einstieg in diesen Themenkreis mit Rat und Tat sehr erleichtert haben. Zudem setzt die Implementierung der erarbeiteten Ergebnisse auf dem zur Dissertation von Robert Balder erstellten Programm auf. Für viele Tips, Hilfestellungen und Gespräche bedanke ich mich bei Prof. Dr. Michael Griebel, Dr. Stefan Zimmer und Alexander Pfaffinger. Mein großer Dank gilt auch Dr. Hans Bungartz, dem ich die Durchsicht des Manuskripts anvertraute. Hierdurch erhielt ich zahlreiche Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Gerne bedanke ich mich auch bei Tilman Neunhoeffer, nicht nur für das Korrekturlesen und die ständige Bereitschaft zum Gedankenaustausch, vielmehr für all die Unterstützung, die nicht nur einen guten Kollegen ausmacht.

Mein besonderer und herzlicher Dank gilt jedoch meinem Doktorvater Prof. Dr. Christoph Zenger für die Überlassung des Themas. Überdies hat er durch sein großes Interesse, seinen Ideenreichtum und seine geduldigen Erklärungen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Beim Forschungsverbund für technisch wissenschaftliches Hochleistungsrechnen (FORTWIHR) bedanke ich mich für die materielle Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit.

2 Dünne Gitter

Ein wichtiges Prinzip in der Numerik ist die Diskretisierung: Diskretisierung von Funktionen, von Operatoren, von Räumen usw. So werden zur Darstellung glatter Funktionen mehrerer Veränderlicher Approximationsmethoden benutzt, bei denen die Funktionswerte nur in diskreten und endlich vielen Raumpunkten bekannt sind. Zumeist sind die betrachteten Raumpunkte auf einem regelmäßigen Gitter angeordnet, so daß man mittels einfacher Interpolationsmethoden auf Funktionswerte an Zwischenstellen schließen kann. Derart approximierte Funktionen können dann auch auf den begrenzten Speichern von Rechenanlagen dargestellt werden.

Einen sehr speichereffizienten Ansatz stellen hier die in [Zenger, 1990] eingeführten *dünnen Gitter* dar, deren Grundlagen und wichtigsten Ergebnisse zu Beginn dieser Arbeit kurz und intuitiv dargestellt werden. Das Hauptaugenmerk liegt hier auf der Verwendung von Dünngitter-Approximationsräumen in der Methode der Finiten Elemente zur Diskretisierung von elliptischen Differentialgleichungen. Für ausführliche theoretische Betrachtungen der angegebenen Resultate sei auf die Arbeiten [Bungartz, 1992], [Balder, 1994] und [Pflaum, 1996] verwiesen.

2.1 Multilineare Approximation

2.1.1 Der eindimensionale Fall

Zur stetigen und stückweise linearen Approximation stetiger Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei das Einheitsintervall $[0,1]$ äquidistant in 2^n Teilintervalle unterteilt, $h := h_n := 2^{-n}$ bezeichne die Maschenweite des zugehörigen Gitters, und S_n sei der zugehörige (2^n+1)-dimensionale Approximationsraum stetiger und stückweise linearer Funktionen. Der Interpolant $\mathrm{I}_n^{\mathrm{lin}}(u)$ einer gegebenen Funktion $u \in C([0,1])$ läßt sich mit Hilfe einer beliebigen Basis $\Phi_n = \{\varphi_0, ..., \varphi_{2^n}\}$ von $S_n = \langle \Phi_n \rangle$ als Linearkombination darstellen:

$$\mathrm{I}_n^{\mathrm{lin}}(u) = \sum_{i=0}^{2^n} g_i \varphi_i \,. \tag{2.1}$$

Eine einfache Basis stellt die *Stützpunkt-* oder *nodale Basis* $\mathcal{B}_n$ dar, hier haben die stückweise linearen Basisfunktionen an jeweils einem Stützpunkt den Wert Eins, sonst überall Null (vgl. Abbildung 2.1).

Bei dieser Basiswahl ergeben sich die Gewichte g_i aus (2.1) gerade als die Funktionswerte der zu interpolierenden Funktion u an den Stützstellen: $g_i := u(ih)$.

Eine andere Basis, auf die später auch die Definition dünner Gitter fußen wird, stellt die *hierarchische Basis* $\mathcal{H}_n$ dar. Hier sind die Basisfunktionen levelartig angeordnet, wie in Abbildung 2.2 für die ersten vier Level gezeigt. Formal läßt sie sich induktiv definieren als

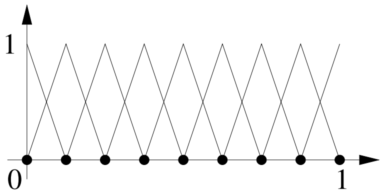


Abb. 2.1 Stützpunktbasis $\mathcal{B}_3$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &:= \mathcal{T}_0 := \mathcal{B}_0\,, \\
\mathcal{H}_n &:= \mathcal{H}_{n-1} \cup \mathcal{T}_n = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{T}_i\,,
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

wobei $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{B}_i$ genau die Basisfunktionen von $\mathcal{B}_i$ enthält, die auf den zu S_{i-1} gehörenden Gitterpunkten verschwinden (vgl. [Yserentant, 1986], [Zenger, 1990]). Diese Teilmengen sind paarweise disjunkt: $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_{i+1} = \emptyset$. Das Gewicht g_i zu einer Basisfunktion $\varphi_i \in \mathcal{T}_k$ aus (2.1) berechnet sich jetzt als die Differenz zwischen dem Funktionswert von u an der Stützstelle von φ_i und dem Wert des stückweise linearen Interpolanten $\mathrm{I}_{k-1}^{\mathrm{lin}}(u)$ aus S_{k-1} an dieser Stützstelle. Daher bekommen die Gewichte der hierarchischen Basisfunktionen den Namen *hierarchische Überschüsse*.

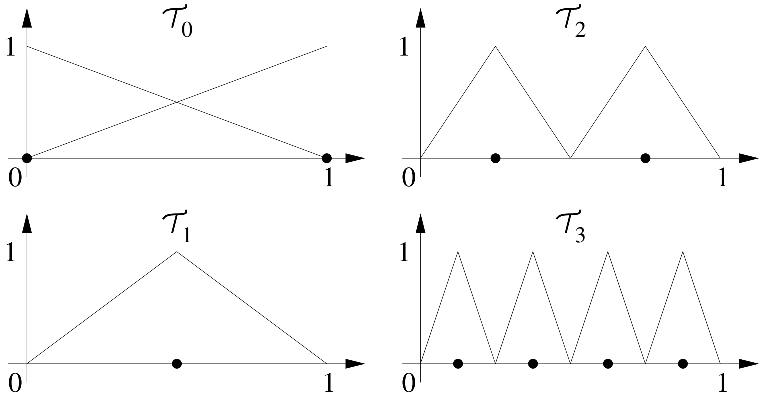


Abb. 2.2 Hierarchische Basis $\mathcal{H}_3$

Eine wichtige Eigenschaft der hierarchischen Basen $\mathcal{H}_n$ ist, daß sie ebenso wie die von ihnen aufgespannten Räume S_n mit steigender Feinheit ineinander geschachtelt sind:

$$
\begin{gathered}
S_0 \subset S_1 \subset \ldots \subset S_n \subset S_{n+1} \subset \ldots \\
\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1} \subset \ldots
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Bei einer Verfeinerung der Interpolation mittels hierarchischer Basen können beim Übergang von $\mathcal{H}_n$ nach $\mathcal{H}_{n+1}$ alle Gewichte g_i und Basisfunktionen $\varphi_i \in \mathcal{H}_n$ unverändert übernommen werden, und lediglich die Basisfunktionen des nächst feineren Levels $\mathcal{T}_{n+1}$ kommen hinzu. Diese Eigenschaft ist für die Erzeugung adaptiver Gitter von großer Bedeutung, wie auch im Kontext der Methode Finiter Elemente. Für nodale Basen gilt im Gegensatz dazu $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_{n+1} = \emptyset$,

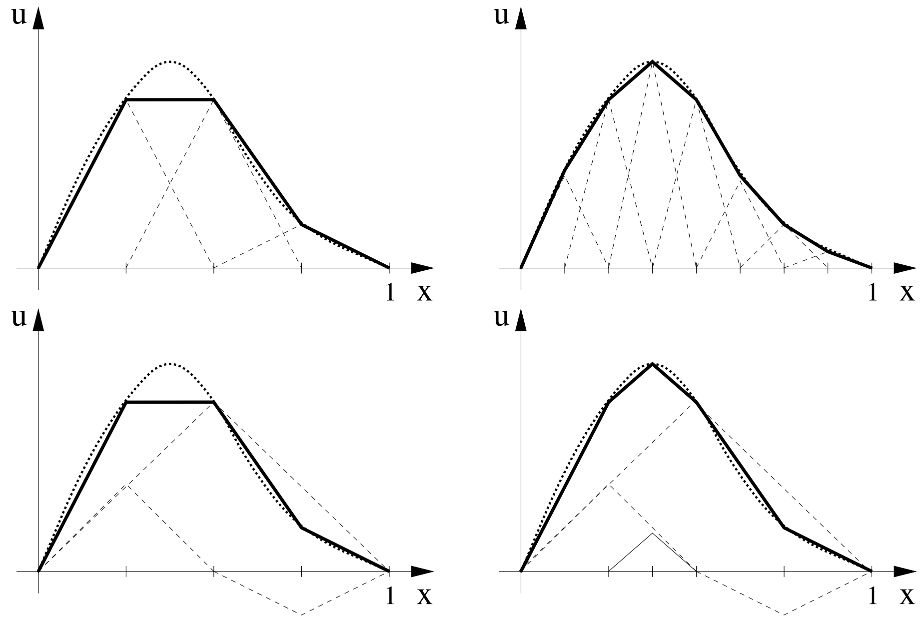


Abb. 2.3 Bei der Stützpunkt-Basis ist zur Verbesserung der Approximation ein kompletter Austausch der Basisfunktionen nötig (oben). Bei der hierarchischen Basis hingegen kann zur Verbesserung der Approximation leicht eine einzelne Basisfunktion des nächsten Levels hinzugenommen werden (unten).

was bei einer Verfeinerung der Interpolation beim Übergang von $\mathcal{B}_n$ nach $\mathcal{B}_{n+1}$ einen kompletten Austausch der Basisfunktionen bedeutet (vgl. Abbildung 2.3).

2.1.2 Der d-dimensionale Fall

Zur Approximation von Funktionen $u : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ über dem d-dimensionalen Einheitsintervall $[0,1]^d$ wird die stückweise multilineare (d-lineare) Interpolation betrachtet. Zu einem äquidistanten, rechtwinkligen, d-dimensionalen Gitter über $[0,1]^d$ erhält man die zugehörige nodale und hierarchische Basis über einen *Tensorproduktansatz*:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n^{(d)} &:= \left\{ \varphi_{i_1,\ldots,i_d}(x_1, x_2, \ldots, x_d) := \prod_{k=1}^{d} \varphi_{i_k}(x_k) \,\middle|\, \varphi_{i_k} \in \mathcal{B}_n \right\} , \\ \mathcal{H}_n^{(d)} &:= \left\{ \varphi_{i_1,\ldots,i_d}(x_1, x_2, \ldots, x_d) := \prod_{k=1}^{d} \varphi_{i_k}(x_k) \,\middle|\, \varphi_{i_k} \in \mathcal{H}_n \right\} . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Analog zum eindimensionalen Fall gilt hier auch die Schachtelungseigenschaft $\mathcal{H}_n^{(d)} \subset \mathcal{H}_{n+1}^{(d)}$, und die hierarchische Basis $\mathcal{H}_n^{(d)}$ läßt sich als disjunkte Vereinigung von Teilmengen

$$\mathcal{T}_{i_1,\ldots,i_d} := \left\{ \varphi_{i_1,\ldots,i_d}(x_1, x_2, \ldots, x_d) := \prod_{k=1}^{d} \varphi_{i_k}(x_k) \,\middle|\, \varphi_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k} \right\}$$

darstellen (vgl. (2.2)):

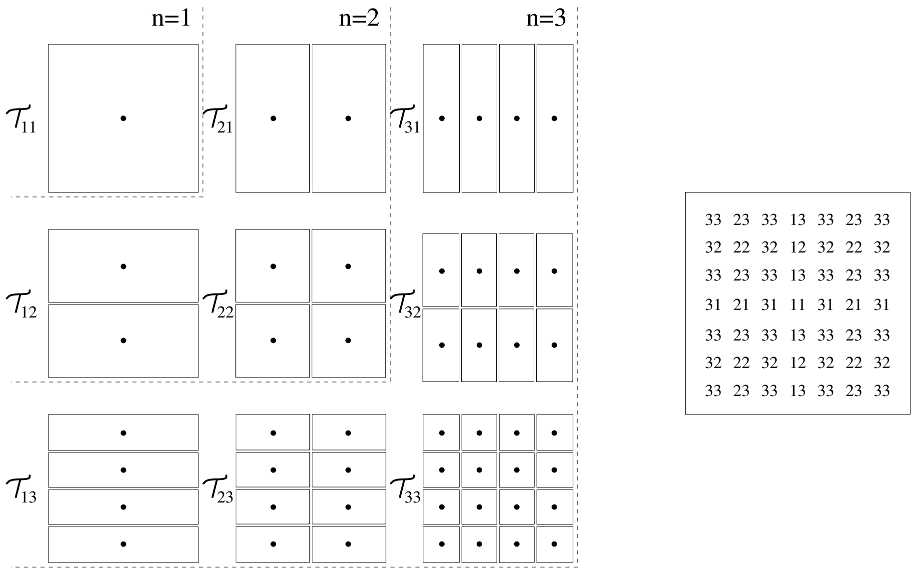


Abb. 2.4 Die Träger der inneren hierarchischen Basisfunktionen aus $\mathcal{H}_3^{(2)}$ sind nach ihren Teilmengen $\mathcal{T}_{ij}$ geordnet dargestellt (links). Die rechts davon dargestellte Numerierung der Gitterpunkte zeigt die Zugehörigkeit zur jeweiligen Teilmenge $\mathcal{T}_{ij}$ an.

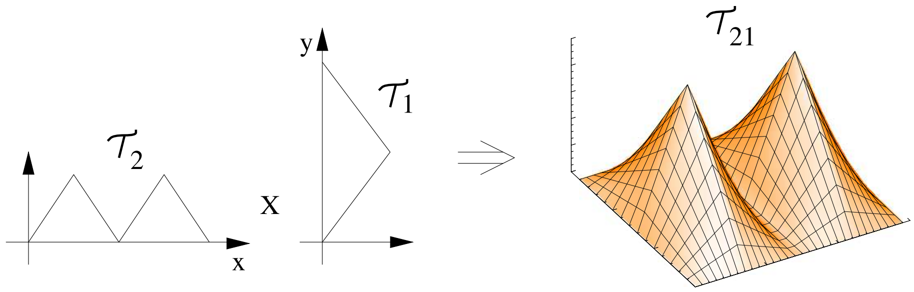


Abb. 2.5 Basisfunktionen der Teilmenge $\mathcal{T}_{21}$

$$\mathcal{H}_n^{(d)} = \bigcup_{i_1=0}^{n_1} \dots \bigcup_{i_d=0}^{n_d} \mathcal{T}_{i_1,\dots,i_d} \,. \tag{2.5}$$

Die Träger der Basisfunktionen einer Teilmenge $\mathcal{T}_{i_1,\dots,i_d}$ sind alle untereinander kongruent und haben das gleiche Volumen

$$\mathrm{vol}(\mathrm{supp}(\varphi)) = \frac{1}{2^d}\, 2^{-(i_1+\dots+i_d)} \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{T}_{i_1,\dots,i_d} \,. \tag{2.6}$$

Diese Teilmengen lassen sich wie in Abbildung 2.4 anordnen. Hier sind die $\mathcal{T}_{ij}$ für den zweidimensionalen Fall über die Träger der in ihnen enthaltenen Basisfunktionen dargestellt. Die Stützstelle der jeweiligen Basisfunktion ist durch einen Punkt markiert. Zur Vereinfachung der Darstellung sind nur die Basisfunktionen gezeigt, die keine Randpunkte interpolieren, die sogenannten *inneren Basisfunktionen*. In Abbildung 2.5 sind als Beispiel die beiden Funktionen aus $\mathcal{T}_{21}$ dargestellt.

2.2 Übergang zu dünnen Gittern

2.2.1 Reguläre dünne Gitter

Bei der Untersuchung hierarchischer Basen zur multilinearen Interpolation von Funktionen auf dem Einheitsintervall $[0,1]^d$ wurde in den Arbeiten [Zenger, 1990] und [Bungartz, 1992] gezeigt, daß unter einfachen Glattheitsvoraussetzungen an die Funktion der überwiegende Teil der Basisfunktionen nur in sehr geringem Maße zur Approximationsgenauigkeit beiträgt. Ein Maß für diesen Beitrag ist in erster Näherung die Trägergröße der Basisfunktion: Für eine Funktion $u : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ mit existierender beschränkter Seminorm[1]

$$|u|_\infty := ||\frac{\partial^{2d} u^{(d)}}{\partial {x_1}^2 \partial {x_2}^2 \ldots \partial {x_d}^2}||_\infty < \infty$$

gilt für die hierarchischen Überschüsse des Interpolanten $\mathrm{I}_n^{\mathrm{lin}}(u) = \sum_{\varphi_i \in \mathcal{H}_n^{(d)}} g_i \varphi_i$:

$$|g_i| = |g_i \varphi_i|_\infty \leq \frac{1}{2^d} 2^{-2(i_1+\ldots+i_d)} |u|_\infty \,, \quad \text{wenn } \varphi_i \in \mathcal{T}_{i_1 \ldots i_d} \,. \tag{2.7}$$

Die hierarchischen Überschüsse sind also proportional zum Quadrat des assoziierten Trägervolumens (vgl. (2.6)).

Da nun alle Teilmengen $\mathcal{T}_{i_1,\ldots,i_d}$ mit $i_1 + \ldots + i_d = \text{const}$ gleichviele Basisfunktionen enthalten, die zudem jeweils einen Approximationsbeitrag gleicher Größenordnung liefern, wurde in [Zenger, 1990] zu der sogenannten *Dünngitter-Basis* übergegangen, die im 2D-Fall auf dem Dreiecksschema in Abbildung 2.6 basiert. Die dabei vernachlässigten Teilmengen können in diesem Zusammenhang mit den Adjektiven „unwichtiger" und „teurer" belegt werden, da sie im Vergleich zu den berücksichtigten Teilmengen mehr Freiheitsgrade bei geringerem Approximationsbeitrag vorweisen. Für den allgemeinen d-dimensionalen Fall wird die Dünngitter-Basis wie folgt definiert:

$$\tilde{\mathcal{H}}_n^{(d)} := \left\{ v_{i_1,\ldots,i_d} \in \mathcal{H}_n^{(d)} | i_1 + i_2 + \ldots + i_d \leq n + d - 1 \right\} \,. \tag{2.8}$$

Der zugehörige Approximationsraum $\tilde{S}_n^{(d)}$, der von der Dünngitter-Basis $\tilde{\mathcal{H}}_n^{(d)}$ aufgespannt wird, läßt sich auch als direkte Summe der Teilräume $\langle \mathcal{T}_{i_1,\ldots,i_d} \rangle$ angeben:

$$\tilde{S}_n^{(d)} = \langle \tilde{\mathcal{H}}_n^{(d)} \rangle = \bigoplus_{i_1+\ldots+i_d \leq n+d-1} \langle \mathcal{T}_{i_1,\ldots,i_d} \rangle \,.$$

Definition 2.1: (*Dünnes und volles Gitter*)

Unter einem d-dimensionalen *dünnen Gitter* $\tilde{G}_n^{(d)}$ werde die Punktmenge aller Stützstellen der Basisfunktionen aus $\tilde{\mathcal{H}}_n^{(d)}$ verstanden. In Analogie hierzu ist ein *volles Gitter* $G_n^{(d)}$ die Punktmenge aller Stützstellen der Basisfunktionen aus $\mathcal{H}_n^{(d)}$. Im folgenden sollen diese Gitter zur Indizierung der zugehörigen Basen und Approximationsräume dienen:

$$\mathcal{H}_{G_n^{(d)}} := \mathcal{H}_n^{(d)} \,,\ \mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}} := \tilde{\mathcal{H}}_n^{(d)} \,,\ S_{G_n^{(d)}} := S_n^{(d)} \,,\ S_{\tilde{G}_n^{(d)}} := \tilde{S}_n^{(d)} \,. \tag{2.9}$$

---

[1] Zu den genauen Voraussetzungen vgl. Satz 2.4 auf Seite 12.

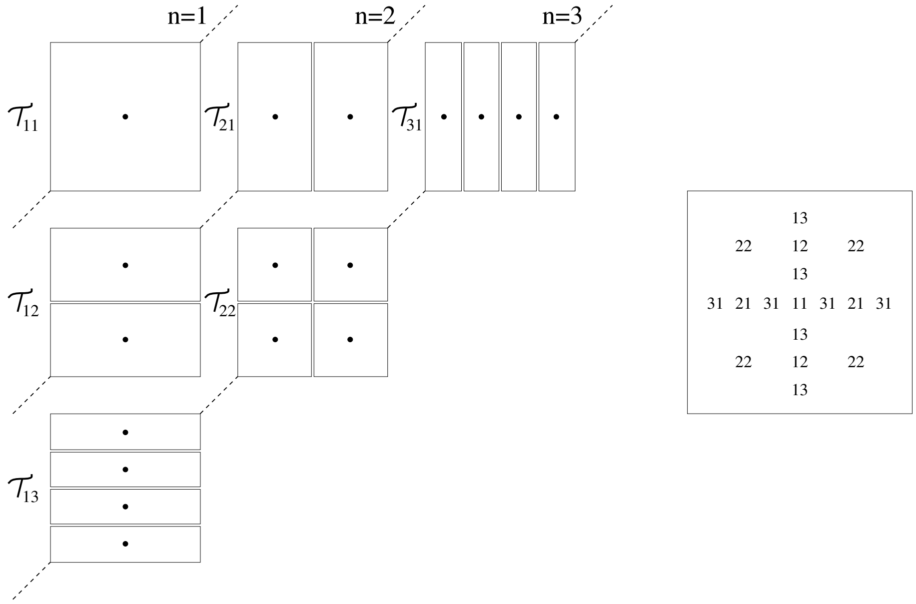


Abb. 2.6 Im Vergleich zum Ausgangsschema aus Abbildung 2.4 werden die Teilmengen $\mathcal{T}_{ij}$ nicht mehr quadratisch sondern im Dreieck gruppiert. Die Teilmengen unterhalb der Diagonalen werden vernachlässigt (links). Die dazu assoziierte Anordnung und Numerierung der Gitterpunkte ist rechts davon gezeigt.

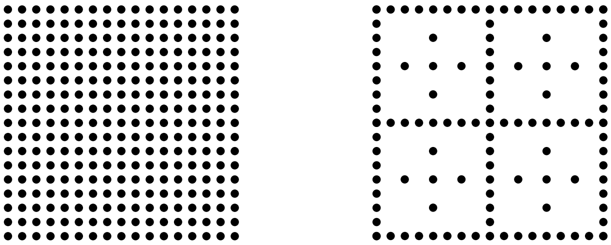


Abb. 2.7 Gegenüberstellung des vollen Gitters $G_4^{(d)}$ und des dünnen Gitters $\tilde{G}_4^{(d)}$ (jeweils mit Randpunkten) – dargestellt sind die Stützstellen der zugehörigen Basisfunktionen.

Für den zweidimensionalen Fall sind in Abbildung 2.7 das volle Gitter $G_4^{(2)}$ und das dünne Gitter $\tilde{G}_4^{(2)}$ gegenübergestellt, um die deutliche Reduktion der benötigten Stützstellen zu veranschaulichen.

Die wichtige Eigenschaft dünner Gitter – *starke Reduktion der Stützstellen bei nur geringem Verlust an Approximationsgüte* – wird in den Sätzen 2.2 und 2.4 präzisiert (vgl. [Bungartz, 1992] und [Pflaum, 1996]).

Satz 2.2: (*Anzahl der Dünngitter-Punkte*)

Es sei $h := 2^{-n}$ die Feinheit des d-dimensionalen dünnen Gitters $\tilde{G}_n^{(d)}$ und $\tilde{M}_n^{(d)}$ bezeichne die Anzahl der Gitterpunkte von $\tilde{G}_n^{(d)}$, dann gilt für

$$\begin{aligned}
d = 1: \qquad \tilde{M}_n^{(d)} &= 2^{n+1} \\
d > 1: \qquad \tilde{M}_n^{(d)} &= 3 \cdot \tilde{M}_n^{(d-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i \cdot \tilde{M}_{n-i}^{(d-1)} \\
&= O(2^n \cdot n^{d-1}) = O(h^{-1} \cdot (\mathrm{ld}(h^{-1}))^{d-1}) \,.
\end{aligned}$$

Für die Spezialfälle $d = 2$ und $d = 3$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_n^{(2)} &= 2^n(n+3) + 1 \,, \\
\tilde{M}_n^{(3)} &= 2^n(n^2 + 11n + 14)/2 + 1 \,.
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

a) Für das volle Gitter $G_n^{(d)}$ gilt hierzu im Vergleich

$$M_n^{(d)} = (2^n + 1)^d = O((h^{-1})^d) \,.$$

b) Der Parameter n der Feinheit $h = 2^{-n}$ wird als *Tiefe des Gitters* bezeichnet. Bei einem einzelnen Dünngitter-Punkt spricht man manchmal von der Tiefe in einer Koordinatenrichtung, meist versteht man jedoch unter der *Tiefe eines Dünngitter-Punktes* entsprechend (2.8) die Summe der einzelnen Tiefen in den Koordinatenrichtungen minus $(d-1)$. Daß dies Sinn macht erkennt man daran, daß alle Punkte aus $\tilde{G}_{n+1}^{(d)} \setminus \tilde{G}_n^{(d)}$ die Tiefe $n+1$ besitzen.

Zur Formulierung der Voraussetzungen für die Approximationseigenschaften der Dünngitter-Interpolation werden in [Pflaum, 1996] geeignete Funktionenräume eingeführt:

Definition 2.3:

Mit den üblichen Schreibweisen für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d \quad \text{und} \quad \max(\alpha) = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d\}$$

seien für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}$ die Räume $C^{G,k}(\Omega)$ und $H^{G,k}(\Omega)$ mit ihren zugehörigen Normen wie folgt definiert:

$$C^{G,k}(\Omega) := \left\{ f \in C(\overline{\Omega}) \;\middle|\; D^\alpha f \in C(\overline{\Omega}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad \text{mit } |\alpha| \le k \text{ und } \max(\alpha) < \frac{k}{d} + 1 \right\}$$

mit der Norm

$$||f||_{C^{G,k}} := \max\left\{ ||D^\alpha f||_\infty \;\middle|\; \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| < k \text{ und } \max(\alpha) < \frac{k}{d} + 1 \right\},$$

$$H^{G,k}(\Omega) := \left\{ f \in L_2(\Omega) \;\middle|\; D^\alpha f \in L_2(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d \quad \text{mit } |\alpha| \le k \text{ und } \max(\alpha) < \frac{k}{d} + 1 \right\}$$

mit der Norm

$$||f||^2_{H^{G,k}} := \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d,\,|\alpha|\le k\\ \max(\alpha)<\frac{k}{d}+1}} ||D^\alpha f||^2_{L_2}\,.$$

Satz 2.4: (*Güte der stückweise multilinearen Dünngitter-Approximation*)

Es sei $\mathbf{Q} :=]0,1[^d$ das d-dimensionale Einheitsintervall, $\tilde{G}_n^{(d)}$ das reguläre dünne Gitter der Feinheit $h = 2^{-n}$ und $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}} : C^0(\mathbf{Q}) \to S_{\tilde{G}_n^{(d)}}\,,\ \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u)(\underline{x}) = u(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in \tilde{G}_n^{(d)}$ der multilineare Interpolationsoperator auf $\tilde{G}_n^{(d)}$. Dann gilt mit positiven, von h unabhängigen Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4 für den Interpolationsfehler

- in der *Maximumnorm*

$$\forall u \in C^{G,2d}(\mathbf{Q}): \quad ||u - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u)||_\infty \le C_1 h^2 |\log h|^{d-1} ||u||_{C^{G,2d}}$$

- in der L_2-*Norm*

$$\forall u \in C^{G,2d}(\mathbf{Q}): \quad ||u - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u)||_{L_2} \le C_2 h^2 |\log h|^{d-1} ||u||_{H^{G,2d}}$$

- in der H^1-*Norm*

$$\forall u \in C^{G,d+1}(\mathbf{Q}): \quad ||u - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u)||_{H^1} \le C_3 h |\log h|^{d-1} ||u||_{H^{G,d+1}}$$

$$\forall u \in C^{G,d+2}(\mathbf{Q}): \quad ||u - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u)||_{H^1} \le C_4 h ||u||_{H^{G,d+2}}$$

Bemerkungen:

a) Eine explizite Darstellung des Interpolationsoperators $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ liefert die sogenannte *Kombinationsformel* (vgl. etwa [Griebel et al., 1992], [Bungartz et al., 1994], [Pflaum, 1996]), eine implizite Darstellung liefert

$$\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u) = \sum_{\varphi_i\in\mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}}} g_i\varphi_i\,,$$

mit $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u)(\underline{x}) = u(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in \tilde{G}_n^{(d)}$.

b) Man beachte, daß in den Fehlerabschätzungen in der L_2- und H^1-Norm u in der Norm $||\cdot||_{H^{G,k}}$ gemessen auftritt, in der Maximumnorm-Abschätzung in der Norm $||\cdot||_{C^{G,k}}$.

c) Im zwei- und dreidimensionalen Fall ($d \in \{2,3\}$) gelten die Fehlerabschätzungen des Satzes 2.4 auch für die entsprechenden Räume $H^{G,k}(\mathbf{Q})$ anstelle von $C^{G,k}(\mathbf{Q})$ (vgl. [Pflaum, 1996]).

Tiefe	volles Gitter			dünnes Gitter		
n	# Punkte	err_n	$\frac{\mathrm{err}_n}{\mathrm{err}_{n+1}}$	# Punkte	err_n	$\frac{\mathrm{err}_n}{\mathrm{err}_{n+1}}$
1	9	2.500e-01	—	9	2.500e-01	—
2	25	1.250e-01	2.00	21	1.357e-01	1.84
3	81	3.661e-02	3.41	49	4.149e-02	3.27
4	289	9.515e-03	3.85	113	1.413e-02	2.94
5	1089	2.402e-03	3.96	257	4.279e-03	3.30
6	4225	6.019e-04	3.99	577	1.284e-03	3.33
7	16641	1.506e-04	3.99	1281	3.711e-04	3.46
8	66049	3.764e-05	4.00	2817	1.058e-04	3.51
9	263169	9.412e-06	4.00	6145	2.963e-05	3.57

Tabelle 2.1 Gegenüberstellung der zweidimensionalen Approximation der Funktion $u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ auf vollen und dünnen Gittern steigender Feinheit. Bei Tiefe 9 ist der in der Maximumnorm gemessene Interpolationsfehler auf dem dünnen Gitter nur etwa um den Faktor 3 größer als auf dem vollen, aber es wurden um den Faktor 42 weniger Gitterpunkte benötigt.

Am Beispiel der Funktion $u : [0, 1]^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ sind für den zweidimensionalen Fall in Tabelle 2.1 die Interpolationsfehler der stückweise d-linearen Interpolation – gemessen in der Maximumnorm – und die benötigten Gitterpunkte für volle und dünne Gitter gegenübergestellt. Hier ist der jeweilige Interpolationsfehler mit $\mathrm{err}_n := ||u - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{G^{(2)}}||_\infty$, $G^{(2)} \in \{\tilde{G}^{(2)}_n, G^{(2)}_n\}$ abgekürzt, und er wird auf dem jeweils nächst tieferen vollen Gitter gemessen (vgl. Abschnitt 3.6.1).

2.2.2 Adaptive dünne Gitter

Die Dünngitter-Basis begründet sich wesentlich auf die gleichmäßige Abschätzung der hierarchischen Überschüsse in (2.7). Hier wurde zu den *regulären* dünnen Gittern übergegangen, indem man alle hierarchischen Basisfunktionen vernachlässigt, deren Gewichte bei der Interpolation glatter Funktionen gemäß der globalen Abschätzung (2.7) eine vorgegebene Schranke unterschreiten.

Geht man bei der Interpolation von der globalen Abschätzung über zur lokalen Betrachtung der hierarchischen Überschüsse, indem man bei der Interpolation einer vorgegeben Funktion u nur die Basisfunktionen verwendet, deren hierarchischen Überschüsse eine vorgegebene Schranke unterschreiten, so erhält man eine der Funktion u angepaßte adaptive Gitterstruktur. Vergleicht man den reinen, ungewichteten hierarchischen Überschuß mit einer vorgegebenen Schranke $\varepsilon > 0$, erhält man adaptive Gitter, die den Interpolationsfehler in der Maximumnorm gemessen bewerten, gewichtet man die hierarchischen Überschüsse noch mit der Energie

$$E(\varphi) = \int_{[0,1]^d} (\nabla\varphi)^2 \, d\underline{x}$$

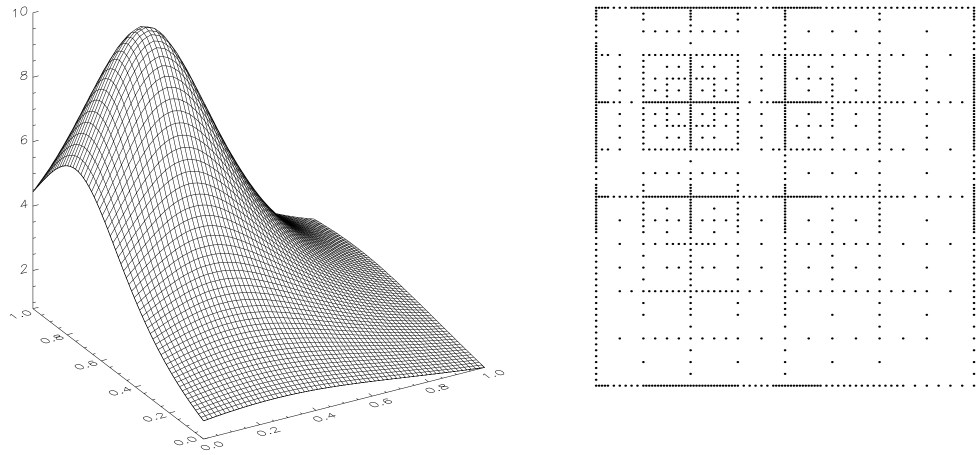


Abb. 2.8 Links die Funktion u aus (2.10), rechts das zugehörige adaptive Gitter mit 1066 Punkten zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-4}$ für den hierarchischen Überschuß

Gitter	#Punkte	Max.-Fehler
adaptiv	1066	5.39e-03
dünn	2817	4.03e-03
voll	16641	3.05e-03

Tabelle 2.2 Die Maximumfehler der Interpolation der Funktion u aus (2.10) auf regulären dünnen, adaptiven dünnen und vollen Gittern, jeweils gemessen auf dem nächst feineren vollen Gitter (vgl. Abschnitt 3.6.1)

der zugehörigen Basisfunktion bzw. mit deren Energienorm $\sqrt{E(\varphi)}$, so wird der Interpolationsfehler in der Energienorm bewertet. Ein Effekt ist bei dieser zweiten Adaptionsstrategie wesentlich: Finite Elemente mit quadratischen Trägern haben eine wesentlich geringere Energie als solche mit gleicher Trägerfläche, aber stark unterschiedlichen Seitenlängen. Die entstehenden Gittermuster unterscheiden sich daher von denen, die aus der ersten Adaptionsstrategie entstehen (vgl. [Bungartz, 1992] und Abschnitt 4.3.5).

Beispiel:

Interpoliert man die Funktion

$$u(x,y) = \frac{1}{(x-0.25)^2 + (y-0.75)^2 + 0.1} \tag{2.10}$$

derart, daß nur die hierarchischen Basisfunktionen verwendet werden, deren hierarchischer Überschuß kleiner als $\varepsilon = 4^{-4}$ ist, erhält man das in Abbildung 2.8 dargestellte Gitter. In Tabelle 2.2 wird diese adaptive Interpolation mit der regulären Dünngitter- und Vollgitter-Interpolation verglichen: Alle drei Interpolationsgitter sind so gewählt, daß jeweils ein Interpolationsfehler gleicher Größenordnung entsteht – das reguläre dünne Gitter benötigt ca. 2.5 mal so viele Basisfunktionen, das volle Gitter sogar ca. 15 mal so viele wie die adaptive Interpolation.

Bemerkung:

Das angesprochene Adaptionsprinzip fußt im wesentlichen auf die hierarchischen Basen und die lokale Bewertung der hierarchischen Überschüsse. In diesem Zusammenhang kann nicht zwischen adaptiven *dünnen* und adaptiven *vollen* Gittern unterschieden werden. Versteht man aber die hierarchischen Basen als wesentliches Prinzip dünner Gitter, rechtfertigt sich hier die Sprechweise „adaptive dünne Gitter“.

2.2.3 Das Produkt zweier Funktionen auf dünnen Gittern

Da jeder Basisfunktion genau ein Gitterpunkt zugeordnet ist, wird bei der Darstellung einer Funktion f (bzw. ihres Interpolanten)

$$\mathrm{I}_G^{\mathrm{lin}}(f) = \sum_{\varphi_i \in \mathcal{A}_G} f_i \varphi_i\,, \quad \mathcal{A}_G \text{ stückweise } d\text{-lineare Basis zum Gitter } G,$$

auf einem Gitter G jedem Gitterpunkt der Koeffizient f_i der zugehörigen Basisfunktion φ_i zugeordnet. Bei der Verwendung nodaler Basen ist das jeweils der Funktionswert in diesem Gitterpunkt, bei hierarchischen Basen der hierarchische Überschuß.

Ein Basiswechsel von nodaler Basis zu hierarchischer Basis wird als *Hierarchisieren*, der umgekehrte Prozeß als *Dehierarchisieren* bezeichnet. Anders ausgedrückt werden beim Dehierarchisieren die hierarchischen Überschüsse auf den Gitterpunkten in die Funktionswerte an diesen Stellen überführt. Während bei vollen Gittern die Basisfunktionen einer nodalen Basis alle gleiche Trägerform und -größe besitzen, unterscheiden sich die Träger der Basisfunktionen der zugehörigen nodalen Basis auf einem dünnen Gitter in Form und Größe (vgl. Abbildung 2.9).[2]

Die wichtige Eigenschaft einer nodalen Basis, daß jede ihrer Basisfunktionen an genau einem Gitterpunkt den Wert eins annimmt und an allen übrigen null, ist aber auch hier gegeben. Deshalb kann auf dünnen Gittern das Produkt zweier Dünngitter-Interpolanten $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(f)$ und $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(g)$ in nodaler Basisdarstellung ebenfalls punktweise gebildet werden:

$$\phi_i \in \tilde{\mathcal{B}}_n^{(d)} \text{ nodale Basisfunktionen über dem dünnen Gitter } \tilde{G}_n^{(d)}$$

$$\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(f) := \sum_{\phi_i \in \tilde{\mathcal{B}}_n^{(d)}} f_i \phi_i\,, \quad \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(g) := \sum_{\phi_i \in \tilde{\mathcal{B}}_n^{(d)}} g_i \phi_i\,,$$

$$\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(fg) := \sum_{\phi_i \in \tilde{\mathcal{B}}_n^{(d)}} f_i g_i \phi_i\,,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}\left(\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(g)\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(f)\right) = \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}\left(\sum_{\phi_i \in \tilde{\mathcal{B}}_n^{(d)}} (f_i g_i)\phi_i^2\right) &= \sum_{\phi_i \in \tilde{\mathcal{B}}_n^{(d)}} (f_i g_i)\phi_i \\ &= \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(fg)\,.\end{aligned}$$

[2] In Abbildung 3.3 (S. 35) ist der erste Schritt von der hierarchischen Basis $\mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ (Abbildung 2.6, S. 10) zur gemischten Darstellung – in x_1-Richtung hierarchisch, in x_2-Richtung dehierarchisch – vollzogen. Dies macht den Schritt zum Schema aus Abbildung 2.9 klarer.

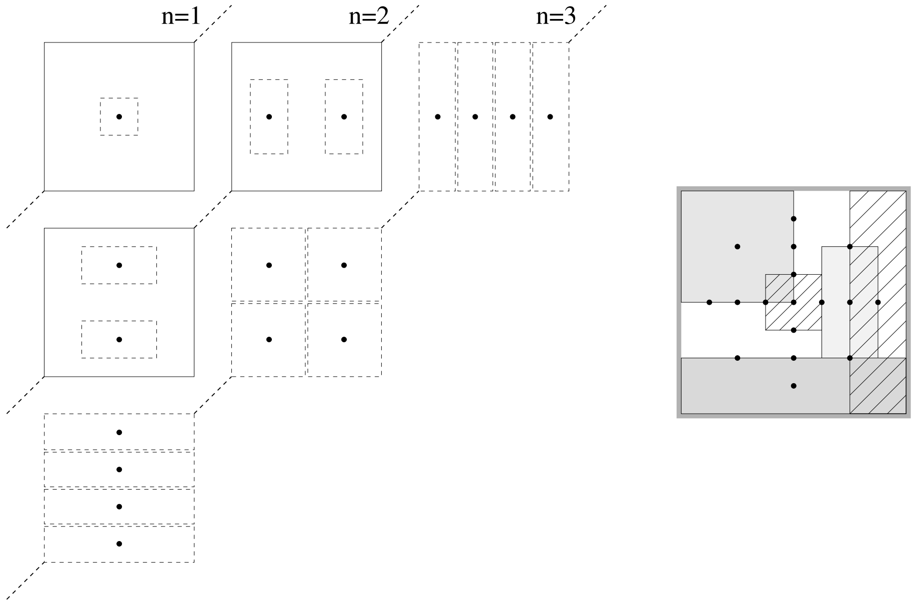


Abb. 2.9 Die Träger der inneren nodalen Basisfunktionen des dünnen Gitters $\tilde{G}_3^{(2)}$

2.3 Stückweise konstante Interpolation

Neben der stückweise linearen Interpolation soll hier auch noch die stückweise konstante Interpolation betrachtet werden. Diese wird etwa benötigt, wenn man die partielle Ableitung u_{h,x_i} einer stückweise linearen Ansatzfunktion u_h beschreiben möchte. Die Darstellung hier folgt [Balder, 1994] und [Pflaum, 1996], in denen die stückweise konstante Interpolation zur Behandlung der Zeitableitungsterme von parabolischen Differentialgleichungen bzw. zur Approximation der variablen Koeffizienten elliptischer Differentialgleichungen verwendet wird.

Das Einheitsintervall $[0,1]$ sei wieder mit einem äquidistanten Gitter der Feinheit $h = 2^{-n}$ überzogen. Mit S_n^l werde der Raum der stückweise konstanten, linksseitig stetigen Funktionen und mit S_n^r der Raum der stückweise konstanten, rechtsseitig stetigen Funktionen bezeichnet. Die Standardbasen zu diesen linearen Räumen werden dann wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n^{\mathrm{l}} := \Big\{ v_j \in S_n^l \Big| v_j(x) = 1 \text{ für } x \in]jh,(j+1)h], \quad & v_j(x) = 0 \text{ sonst}, \\
& j \in \{0,1,\ldots,2^n-1\} \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n^{\mathrm{r}} := \Big\{ v_j \in S_n^r \Big| v_j(x) = 1 \text{ für } x \in [jh,(j+1)h[, \quad & v_j(x) = 0 \text{ sonst}, \\
& j \in \{0,1,\ldots,2^n-1\} \Big\}.
\end{aligned}$$

Die entsprechenden hierarchischen Basen lassen sich analog zum stückweise linearen Fall wieder induktiv definieren als

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0^l &:= \mathcal{T}_0^l := \mathcal{B}_0^l & & \mathcal{H}_0^r := \mathcal{T}_0^r := \mathcal{B}_0^r \\
\mathcal{H}_n^l &:= \mathcal{H}_{n-1}^l \cup \mathcal{T}_n^l = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{T}_i^l & \text{bzw.} \quad & \mathcal{H}_n^r := \mathcal{H}_{n-1}^r \cup \mathcal{T}_n^r = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{T}_i^r \,,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

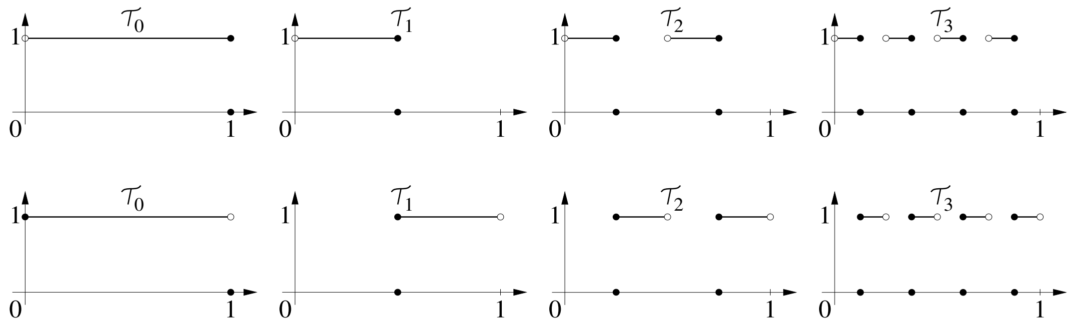


Abb. 2.10 Die hierarchischen Basen $\mathcal{H}_3^l$ (oben) und $\mathcal{H}_3^r$ (unten)

wobei für $i \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_i^l &:= \Big\{ v^l \in \mathcal{B}_i^l \;\Big|\; v^l = 1 \text{ auf } (2jh_i, (2j+1)h_i], h_i = 2^{-i}, \\
&\qquad\qquad j \in \{0, 1, \ldots, 2^{i-1}-1\} \Big\}, \\
\mathcal{T}_i^r &:= \Big\{ v^r \in \mathcal{B}_i^r \;\Big|\; v^r = 1 \text{ auf } [(2j+1)h_i, 2(j+1)h_i), h_i = 2^{-i}, \\
&\qquad\qquad j \in \{0, 1, \ldots, 2^{i-1}-1\} \Big\}.
\end{aligned}$$

Die levelartige Anordnung der Teilmengen $\mathcal{T}_i^l$ bzw. $\mathcal{T}_i^r$ ist in Abbildung 2.10 gezeigt. Auch hier gilt eine zu (2.3) analoge Schachtelungseigenschaft der Räume S_n^l und S_n^r und der zugehörigen hierarchischen Basen $\mathcal{H}_n^l$ und $\mathcal{H}_n^r$. Anders als bei der stückweise linearen Interpolation (eindimensional) erhält man hier nicht $2^n + 1$ Freiheitsgrade (einen pro Stützstelle), sondern nur 2^n (einen pro Teilintervall).

Bemerkungen:

a) Wählt man die Stützstellen von S_n^l bzw. S_n^r als Interpolationsstellen, so erhält man einen linksseitig bzw. rechtsseitig stetigen, stückweise konstanten Interpolanten $\mathrm{I}_n^{l,\mathrm{kon}}(u)$ bzw. $\mathrm{I}_n^{r,\mathrm{kon}}(u)$ einer stetigen Funktion u (vgl. Abbildung 2.11). Die Interpolationsgüte für ein hinreichend glattes u ist jeweils $O(h)$. Durch Mittelung dieser beiden Interpolanten

$$\mathrm{I}_n^{\mathrm{kon}}(u) := \frac{\mathrm{I}_n^{l,\mathrm{kon}}(u) + \mathrm{I}_n^{r,\mathrm{kon}}(u)}{2}$$

erhält man einen Interpolanten gleicher Approximationsgüte $O(h)$, dessen Integral jedoch dem Integral über die zu interpolierende Funktion u näher kommt:[3] $\left| \int_0^1 (u - \mathrm{I}_n^{l,\mathrm{kon}}(u))\, dx \right| = O(h)$, $\left| \int_0^1 (u - \mathrm{I}_n^{r,\mathrm{kon}}(u))\, dx \right| = O(h)$, jedoch $\left| \int_0^1 (u - \mathrm{I}_n^{\mathrm{kon}}(u))\, dx \right| = O(h^2)$.

b) Betrachtet man die Ableitungen dv_j/dx der stückweise linearen Basisfunktionen $v_j \in \mathcal{H}_n$, so erkennt man, daß diese (Basis-) Funktionen aus den entsprechenden stückweise konstanten Basisfunktionen aus $\mathcal{H}_n^l$ und $\mathcal{H}_n^r$ gebildet werden können:

[3] Das Integral $\int \mathrm{I}_n^{\mathrm{kon}}(u)\, dx$ entspricht genau der Trapezregel zur näherungsweisen Integration von u.

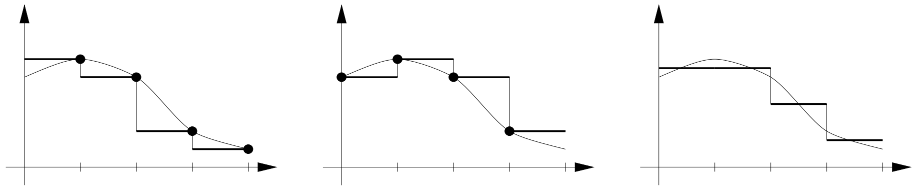


Abb. 2.11 Die stückweise konstanten Interpolanten $\mathrm{I}_2^{l,\mathrm{kon}}(u)$, $\mathrm{I}_2^{r,\mathrm{kon}}(u)$ und $\mathrm{I}_2^{\mathrm{kon}}(u)$

$$v_j \in \mathcal{T}_i : \quad \frac{dv_j}{dx} = \frac{1}{h_i}\left(v_j^l - v_j^r\right) .$$

Hier bezeichnet $h_i = 2^{-i}$ die Feinheit der Teilmenge $\mathcal{T}_i$ und die Funktionen v_j, v_j^l und v_j^r beziehen sich auf die gleiche Stützstelle (vgl. Abbildungen 2.12 und 2.10).

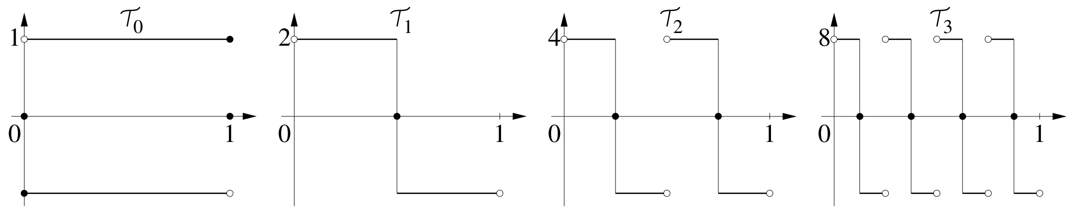


Abb. 2.12 Die differenzierten Basisfunktionen aus $\mathcal{H}_3$

Der Übergang zum höherdimensionalen Fall geschieht wieder – analog zum stückweise multilinearen Fall, Formel (2.4) – über einen Tensorproduktansatz, wobei sich hier nun für jede Koordinatenrichtung zwei Möglichkeiten bieten: linksseitig oder rechtsseitig stetige Interpolation. Bezeichne nun $E = (E_1, E_2, \ldots, E_d) \in \{l, r\}^d$ einen Multiindex über $\{l, r\}$ der Länge d, dann werden die 2^d verschiedenen *einseitigen* stückweise konstanten Basen über $[0, 1]^d$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{H}^E_{G_n^{(d)}} := \left\{ \varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_d}(x_1, x_2, \ldots, x_d) := \prod_{k=1}^{d} \varphi_{i_k}(x_k) \middle| \varphi_{i_k} \in \mathcal{H}_n^{E_k} \right\} . \tag{2.12}$$

Wie im eindimensionalen Fall erhält man über $S^E_{G_n^{(d)}} = \langle \mathcal{H}^E_{G_n^{(d)}} \rangle$ den Interpolanten $\mathrm{I}^{E,\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(u)$, der in jedem Teilintervall, in dem er konstant ist, u in (mindestens) einem Eckpunkt (= Stützstelle) interpoliert.

Beispiel:

Für $d = 2$ erhält man die Basen $\mathcal{H}^{(l,l)}_{G_n^{(2)}}$, $\mathcal{H}^{(l,r)}_{G_n^{(2)}}$, $\mathcal{H}^{(r,l)}_{G_n^{(2)}}$, $\mathcal{H}^{(r,r)}_{G_n^{(2)}}$. So interpoliert z. B. der Interpolant $\mathrm{I}^{(r,l),\mathrm{kon}}_{G_n^{(2)}}(u)$ die Funktion u in den Punkten $(ih, (j+1)h)$: „links oben" des Intervalls $[ih, (i+1)h) \times (jh, (j+1)h]$ – hier ist $\mathrm{I}^{(r,l),\mathrm{kon}}_{G_n^{(2)}}(u) = u(ih, (j+1)h)$ konstant.

Die entsprechenden Dünngitter-Basen auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$ werden analog zu (2.8) definiert als

$$\mathcal{H}^E_{\tilde{G}_n^{(d)}} := \left\{ \varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_d} \in \mathcal{H}^E_{G_n^{(d)}} \middle| i_1 + i_2 + \ldots + i_d \le n + d - 1 \right\} . \tag{2.13}$$

Aus den einseitigen Interpolationsoperatoren $\mathrm{I}^{E,\mathrm{kon}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}$ über den Räumen $S^E_{\tilde{G}^{(d)}_n} = \langle \mathcal{H}^E_{\tilde{G}^{(d)}_n} \rangle$ erhält man einen gemittelten Interpolationsoperator gemäß

$$\mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}^{(d)}_n} := \frac{1}{2^d} \sum_{E \in \{l,r\}^d} \mathrm{I}^{E,\mathrm{kon}}_{\tilde{G}^{(d)}_n} , \tag{2.14}$$

für den in [Pflaum, 1996] folgende Interpolationseigenschaft bewiesen wird:

Satz 2.5: (*Güte der stückweise konstanten Dünngitter-Interpolation*)

Auf dem d-dimensionalen Einheitsintervall $\mathbf{Q} := [0,1]^d$ gilt für den Interpolationsfehler des stückweise konstanten Interpolationsoperators $\mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}$ über dem regulären dünnen Gitter $\tilde{G}^{(d)}_n$ der Feinheit $h = 2^{-n}$ mit einem von h unabhängigen $C_5 > 0$:

$$\forall u \in C^{G,d}(\mathbf{Q}) : \quad ||u - \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}(u)||_\infty \leq C_5 h |\log h|^{d-1} ||u||_{C^{G,d}} .$$

Bemerkung:

Die Aussage dieses Satzes gilt mit veränderten Konstanten für die einseitigen Interpolationsoperatoren $\mathrm{I}^{E,\mathrm{kon}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}$ in gleicher Weise. Der gemittelte Interpolationsoperator erweist sich aber über dem Dünngitter-Raum, wie im eindimensionalen Fall, beim Interpolationsprozeß als vorteilhaft (vgl. [Pflaum, 1994]).

2.4 Gemischte Interpolation

Im Zusammenhang mit der stetigen und stückweise multilinearen Approximation von Funktionen ist es sinnvoll, die partiellen Ableitungen dieser Funktionen in einer gemischten Approximation zu behandeln: stückweise konstant in der Richtung der partiellen Ableitung, stückweise linear in den übrigen Richtungen (vgl. Abbildung 2.13). Zu einer vorgegeben Koordinatenrichtung x_p ($p \in \{1,2,\ldots,d\}$) können dann jeweils zwei hierarchische Basen über dem vollen Gitter $G^{(d)}_n$ bzw. dünnen Gitter $\tilde{G}^{(d)}_n$ definiert werden:

$$\mathcal{H}^{e_{x_p}}_{G^{(d)}_n} := \left\{ \varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_d}(x_1,x_2,\ldots,x_d) := \prod_{k=1}^{d} \varphi_{i_k}(x_k) \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi_{i_p} \in \mathcal{H}^e_n , \\ \varphi_{i_k} \in \mathcal{H}_n \text{ für } k \neq p \end{array} \right\}$$

bzw.

$$\mathcal{H}^{e_{x_p}}_{\tilde{G}^{(d)}_n} := \left\{ \varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_d} \in \mathcal{H}^{e_{x_p}}_{G^{(d)}_n} \;\middle|\; i_1 + i_2 + \ldots + i_d \leq n + d - 1 \right\} , \tag{2.15}$$

wobei $e \in \{l,r\}$ gewählt sei.

Auch hier soll zu den zugehörigen einseitigen Interpolationsoperatoren $I^{l_{x_p}\mathrm{kon,lin}}_G$ und $I^{r_{x_p}\mathrm{kon,lin}}_G$ der gemittelte Operator definiert werden als

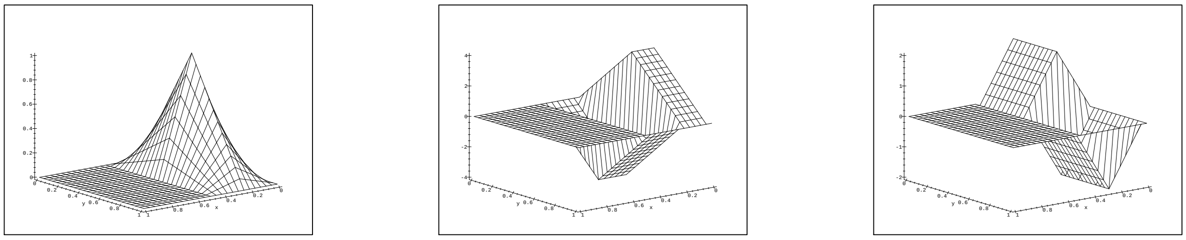


Abb. 2.13 Links ist eine bilineare Basisfunktion φ gezeigt. Ihre partielle Ableitung φ_x in x-Richtung ist in dieser Richtung stückweise konstant, in y-Richtung stückweise linear (mitte). Für die partielle Ableitung φ_y in y-Richtung ist es umgekehrt (rechts).

$$\mathrm{I}_G^{x_p\mathrm{kon,lin}} := \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}_G^{l_{x_p}\mathrm{kon,lin}} + \mathrm{I}_G^{r_{x_p}\mathrm{kon,lin}}\right) , \tag{2.16}$$

mit $G \in \left\{G_n^{(d)}, \tilde{G}_n^{(d)}\right\}$.

Um diesen Ansatz in einen allgemeineren Rahmen zu stellen, werden mit der zusätzlichen Schreibweise

$$\mathcal{H}_n^z := \mathcal{H}_n$$

für die hierarchische Basis der stückweise linearen Funktionen über $[0,1]$ und einem Multiindex $A = (A_1, A_2, \ldots, A_d) \in \{l, r, z\}^d$ die gemischten hierarchischen Basen über dem vollen Gitter $G_n^{(d)}$ und dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$ definiert als

$$\mathcal{H}_{G_n^{(d)}}^A := \left\{\varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_d}(x_1, x_2, \ldots, x_d) := \prod_{k=1}^{d} \varphi_{i_k}(x_k) \middle| \varphi_{i_k} \in \mathcal{H}_n^{A_k}\right\} ,$$

$$\mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}}^A := \left\{\varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_d} \in \mathcal{H}_{G_n^{(d)}}^A \middle| i_1 + i_2 + \ldots + i_d \leq n + d - 1\right\} .$$

Diese Notation der gemischten hierarchischen Basen enthält als Spezialfälle die stückweise d-linearen hierarchischen Basen $\mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ und die stückweise konstanten hierarchischen Basen $\mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}}^E$, mit $E \in \{l, r\}^d$.

Bei der Interpolation einer glatten Funktion u mittels solcher gemischter Basen:

$$\mathrm{I}_{G_n}^A(u) = \sum_{\varphi_I \in \mathcal{H}_{G_n}^A} \hat{u}_I \varphi_I , \quad I = (i_1, \ldots, i_d) , \; G_n \in \{G_n^{(d)}, \tilde{G}_n^{(d)}\} , \tag{2.17}$$

gilt mit der Zuordnung

$$|A_i| := \begin{cases} 1 , & \text{für } A_i \in \{l, r\} \\ 2 , & \text{für } A_i = z \end{cases} \qquad \text{und} \qquad ||A|| := \sum_{i=1}^{d} |A_i|$$

für die hierarchischen Überschüsse $\hat{u}_I$ die Abschätzung

$$|\hat{u}_I| \leq C \left\| \frac{\partial^{||A||} u}{\partial x_1^{|A_1|} \ldots \partial x_d^{|A_d|}} \right\|_\infty h_1^{|A_1|} \cdot \ldots \cdot h_d^{|A_d|} . \tag{2.18}$$

Für die Sonderfälle $A \in \{z\}^d$ bzw. $A \in \{l, r\}^d$ gelten die Approximationsaussagen der Sätze 2.4 bzw. 2.5. Für einen echt gemischten Interpolationsoperator $\mathrm{I}_{G_n}^A$ ($A \notin \{z\}^d$ und $A \notin \{l, r\}^d$) kann auf dem regulären dünnen Gitter aus Abschnitt 2.2 auch nur eine zur stückweise konstanten Interpolation proportionale Approximationsordnung gewonnen werden.

Bemerkung:

In [Balder, 1994] wird die stückweise konstante Interpolation zur Behandlung von Zeitableitungstermen in parabolischen Differentialgleichungen verwendet. In diesem Zusammenhang wird eine Funktion $u(\underline{x}, t)$ auf einem $(d + 1)$-dimensionalen Gitter gemischt interpoliert: in den Ortskoordinaten stückweise linear, in der Zeitkoordinate linksseitig stückweise konstant. Auf einem in t-Richtung modifizierten dünnen Gitter mit jetzt $O(h^{-2})$ vielen Gitterpunkten (vorher $O(h^{-1}|\log h|^d)$) wird eine Interpolationsordnung von $O(h^2|\log h|^d)$ bewiesen.

3 Elliptische Randwertprobleme

Dieses Kapitel widmet sich der numerischen Behandlung allgemeiner, linearer elliptischer Randwertprobleme zweiter Ordnung auf dem d-dimensionalen Einheitsintervall $\mathbf{Q} :=]0,1[^d$. Nach einer kurzen Problembeschreibung wird eine neue Galerkin-Diskretisierung auf dünnen Gittern studiert, deren Implementierung für den allgemeinen d-dimensionalen Fall leicht zu realisieren ist. Hierfür und für die Erweiterung auf unstetige Koeffizienten, die hier eine gesonderte Betrachtung verlangen, werden einige algorithmische Hinweise gegeben. In den letzten beiden Abschnitten werden schließlich numerische Ergebnisse diskutiert.

3.1 Problemstellung

Die Beschreibung von Gleichgewichtszuständen in physikalischen und technischen Aufgabenstellungen führt häufig in natürlicher Weise auf elliptische Randwertprobleme. Diese werden oft in Form von elliptischen partiellen Differentialgleichungen oder in ihrer variationellen Formulierung ausgedrückt. Im Fall symmetrischer Problemstellungen existiert dazu auch ein Minimierungsproblem. Die zugehörigen Formulierungen werden im folgenden für homogene Dirichlet-Randvorgaben aufgeführt:[1]

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, $d \in \mathbb{N}$.

- *Partielle Differentialgleichung*

  Gegeben seien die Koeffizientenfunktionen

$$A = (A_{i,j})_{i,j=1,..,d} \in \left(C^1(\overline{\Omega})\right)^{d\times d}\,, \quad \underline{b} = (b_i)_{i=1,..,d} \in \left(C^0(\overline{\Omega})\right)^d \;\text{ und }\; c\,, f \in C^0(\overline{\Omega})\,.$$

  Die matrixwertige Funktion A sei zudem *gleichmäßig elliptisch* in Ω, d. h. es gebe ein $\alpha > 0$, so daß

$$\sum_{i,j=1}^{d} A_{ij}(\underline{x})\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{d} \xi_i^2 \quad \text{für alle } \underline{x} \in \Omega\,,\ \underline{\xi} \in \mathbb{R}^d\,.$$

  Dann läßt sich die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung schreiben als[2]

$$-\nabla\cdot(A(\nabla u)^T) + \nabla u\,\underline{b} + cu = f \;\text{ in }\; \Omega\,,\;\; u|_{\partial\Omega} = 0 \;\text{ auf }\; \partial\Omega\,, \tag{3.1}$$

  und als Lösungsraum wird der $C^2(\Omega)$ betrachtet. Diese Form der Gleichung wird als *Divergenzform* bezeichnet und korrespondiert direkt mit der variationellen Formulierung.

[1] Für hinreichend glatte Dirichlet-Randvorgaben ist die Beschränkung auf den homogenen Fall keine Einschränkung (vgl. [Braess, 1992], S. 35f und S. 41f).

[2] Der Gradient einer Funktion u werde stets als Zeilenvektor gelesen: $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, .., \frac{\partial u}{\partial x_d})$.

- *Variationelle Formulierung*

  Es sei V ein Hilbertraum mit innerem Produkt $(\cdot,\cdot)_V$ und korrespondierender Norm $||\cdot||_V$. Weiter sei $l : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Linearform auf V, also

  $$\exists C_l > 0 : \quad |l(v)| \leq C_l ||v||_V \quad \forall v \in V$$

  und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige und V-elliptische Bilinearform, die nicht notwendig symmetrisch sein muß:

  $$\begin{array}{lrcll} \exists\, C_a > 0 : & |a(v,w)| & \leq & C_a ||v||_V ||w||_V \quad \forall v\,,\, w \in V & \text{(Stetigkeit),} \\ \exists\, \tilde{C}_a > 0 : & a(v,v) & \geq & \tilde{C}_a ||v||_V^2 \qquad\quad \forall v \in V & \text{(Elliptizität).} \end{array}$$

  Dann lautet die variationelle Formulierung einer elliptischen Randwertaufgabe:

  $$\text{Finde } u \in V : \quad a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V\,.$$

  Nach dem Lax-Milgram-Lemma existiert hierzu eine eindeutig bestimmte Lösung.

  Im Vergleich zur partiellen Differentialgleichung (3.1) wird der Lösungsraum auf den $H_0^1(\Omega)$ erweitert, und man spricht hier von *schwachen Gleichungen* und *schwachen Lösungen*. Die zu der partiellen Differentialgleichung (3.1) assoziierte variationelle Formulierung lautet

  $$\text{finde } u \in H_0^1(\Omega) : \quad a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,, \tag{3.2}$$

  mit

  $$a(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u A (\nabla v)^T + \nabla u\, \underline{b}\, v + ucv\, d\underline{x}\,, \quad l(v) = \int\limits_\Omega f v\, d\underline{x}\,.$$

  Hier können die Voraussetzungen an die Koeffizienten abgeschwächt werden zu $A \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}$, $\underline{b} \in (L^\infty(\Omega))^d$, $c\,, f \in L^\infty(\Omega)$, und A muß nur noch für *fast alle* $\underline{x} \in \Omega$ gleichmäßig elliptisch sein.

- *Minimierungsproblem*

  Wieder sei V ein Hilbertraum, $l : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Linearform und $a : V \times V \to \mathbb{R}$ eine stetige und V-elliptische Bilinearform, die zusätzlich noch als symmetrisch vorausgesetzt wird. Dann formuliert man mit dem quadratischen Funktional

  $$J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) - l(v)\,, \quad v \in V\,,$$

  das Minimierungsproblem wie folgt:

  $$\text{Finde } u \in V : \quad J(u) = \inf_{v \in V} J(v)\,. \tag{3.3}$$

  Unter den genannten Voraussetzungen existiert eine eindeutig bestimmte Lösung und die Problemstellungen (3.3) und (3.2) sind zueinander äquivalent.

All diese Formulierungen, die unter bestimmten Voraussetzungen jeweils zueinander äquivalent sind, benötigen zu ihrer theoretischen Behandlung aber grundsätzlich verschiedene Methoden und Hilfsmittel. Insbesondere die variationelle Formulierung ist mit den Hilfsmitteln der Funktionalanalysis und Sobolevraum-Theorie in jüngerer Zeit intensiv untersucht worden. Die Formulierung als Minimierungsproblem spielt in ihrer Erweiterung auf konvexe Funktionale J eine wichtige Rolle bei der theoretischen Untersuchung von nichtlinearen Problemen (vgl. [Johnson, 1987]).

In der historischen Entwicklung sind aus den unterschiedlichen Formulierungen auch unterschiedliche Methoden zur numerischen Behandlung solcher elliptischer Randwertaufgaben hervorgegangen. Dies sind etwa die Finite-Differenzen-Verfahren, die aus der Formulierung als partielle Differentialgleichung hervorgegangen sind und die Finite-Elemente-Verfahren, die auf der variationellen Formulierung aufsetzen. In der vorliegenden Arbeit wird ein Finite-Elemente-Ansatz auf dünnen Gittern betrachtet.

3.2 Galerkin-Diskretisierung

Es wird ein Galerkin-Ansatz zur Diskretisierung von linearen elliptischen Randwertaufgaben behandelt. Das Galerkin-Verfahren fußt auf der variationellen Formulierung (3.2), wobei der unendlich-dimensionale Testraum $H_0^1(\Omega)$ durch eine Sequenz von endlich-dimensionalen Testräumen $S_h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ ersetzt wird.[3] Hierbei werden die diskreten Testräume $S_h(\Omega)$ so gewählt, daß die jeweiligen diskreten Lösungen u_h mit $h \to 0$ gegen die Lösung u des kontinuierlichen Problems konvergieren.

Speziell wird als Grundgebiet $\Omega = \mathbf{Q} :=]0,1[^d$ und $S_h(\mathbf{Q})$ als die Menge der stückweise linearen und stetigen Funktionen über dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$ der Feinheit $h = 2^{-n}$ gewählt: $S_h(\mathbf{Q}) := S_{\tilde{G}_n^{(d)}}$.[4] Hauptaugenmerk wird auf die Behandlung variabler Koeffizienten gelegt, die oft zwangsläufig dazu führt, die Diskretisierung noch zusätzlich auf die betrachtete Bilinearform $a(u, v)$ auszuweiten.

Im folgenden gelte stets $h = h_n = 2^{-n}$.

3.2.1 Aspekte der Diskretisierung

Ausgehend von der variationellen Formulierung (3.2) einer linearen elliptischen Randwertaufgabe (mit homogenen Dirichleträndern) auf dem Einheitsintervall $\mathbf{Q}$,

[3] In einem allgemeinen Ansatz wird das kontinuierliche Problem (3.2) wie folgt diskretisiert:

$$\text{Finde } u_h \in S_h : \quad a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in T_h \,.$$

S_h wird dann als *Ansatzraum*, T_h als *Testraum* bezeichnet. Beim Galerkin-Ansatz stimmen S_h und T_h für Probleme mit homogenen Dirichleträndern überein.

[4] Der diskrete Testraum $S_h(\mathbf{Q})$ besteht aus *stückweise* glatten Funktionen und wird von einer Basis von Funktionen mit beschränkten Trägern aufgespannt. In diesem Zusammenhang wird das Galerkin-Verfahren üblicherweise als *Methode der Finiten Elemente* bezeichnet.

$$\text{finde } u \in H_0^1(\mathbf{Q}): \quad a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H_0^1(\mathbf{Q}), \tag{3.4}$$

mit der stetigen und H_0^1-elliptischen Bilinearform

$$a(u,v) = \int_{\mathbf{Q}} \nabla u A (\nabla v)^T + \nabla u \, \underline{b} \cdot v + ucv \, d\underline{x}$$

und der stetigen Linearform

$$l(v) = \int_{\mathbf{Q}} fv \, d\underline{x}$$

erhält man für $n \in \mathbb{N}$ eine Sequenz von diskreten Aufgaben auf dünnen Gittern $\tilde{G}_n^{(d)}$:

$$\text{Finde } \overline{u}_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}: \quad a(\overline{u}_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}. \tag{3.5}$$

In aller Regel jedoch können die in (3.5) vorkommenden Integrale nicht exakt ausgewertet werden, so daß sie nur näherungsweise bestimmt werden. Man geht also von der exakten Bilinearform a und der exakten Linearform l über zu Näherungen a_h und l_h und erreicht die Diskretisierung der schwachen Gleichung (3.4) in der Form:

$$\text{Finde } u_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}: \quad a_h(u_h, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}. \tag{3.6}$$

Für diese Art der Diskretisierung, bei der die sogenannte *Konformitätseigenschaft* nicht verletzt wird – für die Testräume gilt weiterhin $S_{\tilde{G}_n^{(d)}} \subset H_0^1(\mathbf{Q})$ – spielt das *erste Lemma von Strang* eine wichtige Rolle. Dies trifft eine Aussage über die Konvergenz der Diskretisierung (3.6) in der H^1-Norm (vgl. [Strang & Fix, 1973], [Braess, 1992]). Die Abschätzung besteht hier aus dem Bestapproximanten und Fehlerabschätzungen für die diskretisierte Bilinearform und Linearform.

Satz 3.1: (*Erstes Lemma von Strang*)

Es sei u die schwache Lösung von (3.4), und es seien die diskretisierten Bilinearformen a_h aus (3.6) gleichgradig elliptisch, d.h. es existiere eine von h unabhängige Konstante $C_{a_0} > 0$ mit

$$a_h(v_h, v_h) \geq C_{a_0} ||v_h||_{H^1}^2 \quad \forall v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}.$$

Dann gilt mit einer von h unabhängigen Konstanten $c > 0$ für die Lösungen u_h von (3.6)

$$||u - u_h||_{H^1} \leq c \left(\inf_{v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}} \left\{ ||u - v_h||_{H^1} + \sup_{w_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}} \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{||w_h||_{H^1}} \right\} \right.$$
$$\left. + \sup_{w_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}} \frac{|l(w_h) - l_h(w_h)|}{||w_h||_{H^1}} \right).$$

3.2.2 Diskretisierung auf dünnen Gittern

Zunächst werde die Helmholtzgleichung

$$a^{\mathrm{helm}}(u,v) := \int\limits_{\mathbf{Q}} \nabla u (\nabla v)^T + uv \, d\underline{x} = \int\limits_{\mathbf{Q}} fv \, d\underline{x} \quad \forall v \in H_0^1(\mathbf{Q})$$

betrachtet. In [Bungartz, 1992] und [Balder, 1994] wird eine Diskretisierung auf dem zwei-, drei- und d-dimensionalen Einheitsintervall $\mathbf{Q} =]0,1[^d$ angegeben mit[5]

$$\begin{aligned} a^B_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h, v_h) &:= a^{\mathrm{helm}}(u_h, v_h) \qquad \forall u_h\,,\ v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}, \\ l_{\tilde{G}_n^{(d)}}(v_h) &:= \int\limits_{\mathbf{Q}} \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(f) v_h \, d\underline{x} \quad \forall v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}\,, \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(f) \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ den stückweise d-linearen und stetigen Interpolanten von f auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$ bezeichne. Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} |l(v_h) - l_{\tilde{G}_n^{(d)}}(v_h)| &= \left| \int\limits_{\mathbf{Q}} (f - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(f)) v_h \, d\underline{x} \right| \\ &\leq ||f - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(f)||_\infty \int\limits_{\mathbf{Q}} |v_h| \, d\underline{x} \\ &\overset{\text{(Satz 2.4)}}{\leq} Ch^2 |\log h|^{(d-1)} ||f||_{C^{G,2d}} \int\limits_{\mathbf{Q}} |v_h| \, d\underline{x} \\ &\overset{\text{(Einbettungssatz}^6)}{\leq} Ch^2 |\log h|^{(d-1)} ||f||_{C^{G,2d}} ||v_h||_{H^1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

für $f \in C^{G,2d}(\mathbf{Q})$ (vgl. Definition 2.3, S. 11), folgt mit dem ersten Lemma von Strang und den Interpolationsresultaten aus Satz 2.4 des Abschnitts 2.2 eine H^1-Konvergenz der Diskretisierung der Ordnung $O(h)$. Numerische Ergebnisse weisen zusätzlich auf eine Konvergenz der Ordnung $O(h^2 |\log h|^{(d-1)})$ in der L_2- und der Maximumnorm hin (vgl. [Bungartz, 1992]).

Ein wichtiges Resultat der Arbeit [Balder, 1994] ist ein Algorithmus, der für die Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix eine Matrix-Vektor-Multiplikation durchführt, die pro Unbekannter auf dem dünnen Gitter eine konstante Anzahl von Operationen benötigt – genauer, eine nur von der Raumdimension d abhängige Anzahl von Operationen. Somit erhält man ein Verfahren zur Diskretisierung der Helmholtzgleichung auf dünnen Gittern, das in der Berechnungskomplexität die günstige Speicherkomplexität dünner Gitter nicht übersteigt.

Eine Diskretisierung auf dünnen Gittern zur Behandlung elliptischer Gleichungen mit variablen Koeffizienten wird in [Pflaum, 1996] angegeben. Pflaum betrachtet eine lineare elliptische Gleichung der Form

[5] Der index B in $a^B_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ steht hierbei für Balder und Bungartz.

[6] Vergleiche etwa [Großmann & Roos, 1992], Seite 82.

$$a(u,v) := \int\limits_{\mathbf{Q}} \nabla u A (\nabla v)^T + \nabla u\, \underline{b}\, v + ucv\, d\underline{x} = \int\limits_{\mathbf{Q}} fv\, d\underline{x} \quad \forall v \in H_0^1(\mathbf{Q}) \tag{3.9}$$

und gibt ihre Diskretisierung auf $\mathbf{Q}$ für $u_h,\ v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ wie folgt an,

$$a^P_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h, v_h) := \int\limits_{\mathbf{Q}} \nabla u_h \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(A)(\nabla v_h)^T + \nabla u_h\, \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(\underline{b})\, v + u_h \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(c) v_h\, d\underline{x}\,, \tag{3.10}$$

wobei die Anwendung des gemittelten stückweise konstanten Interpolationsoperators $\mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ auf matrixwertige und vektorwertige Funktionen komponentenweise zu verstehen ist. Für genügend glatte Koeffizienten zeigt er die Konvergenzordnungen $O(h|\log h|^{(d-1)})$ in der H^1-Norm und $O(h^{(1+\frac{1}{d})}|\log h|^{(d-1)})$ in der L_2-Norm. Numerische Ergebnisse weisen im 2D-Fall zusätzlich auf eine $O(h^2|\log h|)$-Konvergenz in der L_2- und Maximumnorm hin.[7]

Diese aus mathematischer Sicht recht naheliegende Diskretisierung birgt jedoch aus algorithmischer Sicht einen wesentlichen Nachteil: Während für die „Zwei-Term-Integrale“[8] der Diskretisierung der Helmholtzgleichung von [Balder, 1994] ein Algorithmus für beliebige Raumdimensionen angegeben werden konnte, bilden die Drei-Term-Integrale der Diskretisierung (3.10) (hier kommt der variable Koeffizient noch hinzu) jedoch ein Problem ganz anderer Qualität. So konnte nur der zweidimensionale Fall in [Pflaum, 1996] algorithmisch behandelt werden, höhere Dimensionen blieben unbehandelt.

An dieser Stelle wird in der vorliegenden Arbeit weitergedacht und folgende Diskretisierung der Gleichung (3.9) für $u_h,\ v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} a^D_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h, v_h) \quad := \int\limits_{\mathbf{Q}} \quad & \Big\{ \sum_{i,j=1}^{d} \mathrm{I}^{x_i \mathrm{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i} A_{ij})\, v_{h,x_j} \\ & + \sum_{i=1}^{d} \mathrm{I}^{x_i \mathrm{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i} b_i)\, v_h + \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h\, c) v_h \Big\} d\underline{x}\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die algorithmische Grundidee besteht darin, eine Diskretisierung anzugeben, in der alle auftretenden Integrale auf Zwei-Term-Integrale zurückgeführt werden. Dies geschieht hier durch die Gruppierung der Produkte $u_{h,x_i} A_{ij},\ u_{h,x_i} b_i$ bzw. $u_h c$ der variablen Koeffizienten mit der Ansatzfunktion bzw. deren partiellen Ableitungen zu jeweils einer einzigen zu interpolierenden Funktion. Diese Approximation wird so durchgeführt, daß die Interpolanten jeweils im gleichen Raum enthalten sind wie die Ansatzfunktion bzw. die am Produkt beteiligte partielle Ableitung der Ansatzfunktion: im Helmholtzterm stückweise d-linear ($\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h\, c)$), im Diffusions- und Konvektionsterm in Richtung der partiellen Ableitung x_i stückweise konstant, in den übrigen stückweise $(d-1)$-linear ($\mathrm{I}^{x_i \mathrm{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i} A_{ij}),\ \mathrm{I}^{x_i \mathrm{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i} b_i)$). Somit hat man sich die algorithmischen Vorteile der „Welt der Zwei-Term-Integrale“ erschlossen und ist in der Lage, das d-dimensionale Verfahren von [Balder, 1994] auf die allgemeine elliptische Differentialgleichung (3.9) zu erweitern, ohne die Komplexitätsvorteile einzubüßen.

[7] Verwendet man in (3.10) die einseitigen Interpolationsoperatoren $\mathrm{I}^{E,\mathrm{kon}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ anstelle des gemittelten Operators $\mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ (vgl. Abschnitt 2.3), so kann eine H^1-Konvergenz gleicher Ordnung bewiesen werden. Für die L_2-Konvergenz stellt sich die Mittelung jedoch als wesentlich heraus – in Analysis und Numerik.

[8] Unter einem Zwei-Term-Integral soll das Integral über dem Produkt von zwei Funktionen $\int uv\, dx$ verstanden werden, unter einem Drei-Term-Integral analog das Integral über dem Produkt von drei Funktionen.

Bemerkungen:

a) Man beachte, daß im Fall der Helmholtzgleichung die diskretisierten Bilinearformen $a^P_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ und $a^D_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ jeweils mit der exakten Bilinearform a auf $S_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ übereinstimmen. Im eindimensionalen Fall ($d = 1$) stimmen die Diskretisierungen (3.10) und (3.11) sogar für den allgemeinen Operator überein.

b) Wird eine symmetrische Bilinearform a (also $\underline{b} = \underline{0}$) mittels (3.11) diskretisiert, so gilt aufgrund der unterschiedlichen Behandlung von u_h und v_h i. a. $a^D_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h, v_h) \neq a^D_{\tilde{G}_n^{(d)}}(v_h, u_h)$, es entsteht also eine unsymmetrische Steifigkeitsmatrix. Die Unsymmetrien sind jedoch „klein", und für den Fall variabler Helmholtzkoeffizienten $c(\underline{x})$ und konstantem A und $\underline{b}$ kann die Steifigkeitsmatrix symmetrisiert werden (vgl. [Hilgenfeldt, 1994]).

Neben diesem algorithmischen Aspekt muß noch sichergestellt werden, daß diese Approximation auch eine hinreichend genaue und stabile Diskretisierung liefert. Hierzu werden im folgenden einige Untersuchungen durchgeführt, die im Nachweis der H^1-Konvergenz für einen Spezialfall münden (Satz 3.3). Dabei wird sich auf das erste Lemma von Strang gestützt, bei dem die gleichgradige Elliptizität der diskretisierten Bilinearformen eine wichtige Voraussetzung bildet. Lemma 3.2 macht dazu eine Abschätzung über den Abstand zwischen der exakten Bilinearform a und der auf vollen Gittern diskretisierten Bilinearform $a^D_{G_n^{(d)}}$. Die dort bewiesene Abschätzung reicht dann zusammen mit der inversen Abschätzung (3.17) aber nur zum Nachweis der gleichgradigen Elliptizität für den Spezialfall konstanter Diffusions- und Konvektionskoeffizienten und variabler Helmholtzkoeffizienten.

Lemma 3.2 wird nun wie folgt formuliert:

Lemma 3.2:

Für die Komponentenfunktionen der Koeffizienten der Bilinearform a aus (3.9) gelte A_{ij}, $b_i, c \in C^{G,d}(\mathbf{Q})$, $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Dann existiert eine von h unabhängige Konstante $C > 0$ derart, daß für den Abstand zwischen der exakten Bilinearform a und den auf *vollen* Gittern $G_n^{(d)}$ der Feinheit $h = 2^{-n}$ diskretisierten Bilinearformen $a^D_{G_n^{(d)}}$ gilt:

$$|a(u_h, v_h) - a^D_{G_n^{(d)}}(u_h, v_h)| \leq Ch|\log h|^{d-1}\|v_h\|_{H^1}\left(\|u_h\|_{H^1} + \max_{1\leq i\leq d}\{\|u_h\|_\infty, \|u_{h,x_i}\|_\infty\}\right) \quad \forall u_h, v_h \in S_{G_n^{(d)}}.$$

Für den Fall konstanter Diffusions- und Konvektionskoeffizienten A und $\underline{b}$ und variabler Helmholtzkoeffizienten $c(\underline{x})$ ergibt sich

$$|a(u_h, v_h) - a^D_{G_n^{(d)}}(u_h, v_h)| \leq Ch|\log h|^{d-1}\|v_h\|_{H^1}\left(\|u_h\|_{H^1} + \|u_h\|_\infty\right) \quad \forall u_h, v_h \in S_{G_n^{(d)}}.$$

Die Aussage dieses Lemmas konnte leider nur auf vollen Gittern formuliert werden, ist aber dennoch in seinen Voraussetzungen und im Beweis so formuliert, wie es für dünne Gitter erforderlich wäre. Dies gilt insbesondere auch für die logarithmischen Faktoren $|\log h|^{d-1}$ bei den Abschätzungen, die bei der Formulierung auf vollen Gittern nicht auftauchen müßten. Dafür wird die Stelle hervorgehoben, an der das Argument von vollen Gittern nicht ohne weiteres auf dünne Gitter übertragen werden kann, nämlich die Behauptungen (3.14) und (3.15).

Beweis:

Zunächst wird mittels der Dreiecks-Ungleichung obige Abschätzung auf die Abschätzung des Abstands zwischen $a^P_{G_n^{(d)}}$ und $a^D_{G_n^{(d)}}$ reduziert:

$$
\begin{aligned}
&|a(u_h,v_h) - a^D_{G_n^{(d)}}(u_h,v_h)| \\
&\quad \leq \quad |a(u_h,v_h) - a^P_{G_n^{(d)}}(u_h,v_h)| + |a^P_{G_n^{(d)}}(u_h,v_h) - a^D_{G_n^{(d)}}(u_h,v_h)| \\
&\overset{\text{[Pflaum, 1996]}}{\leq} \quad C'h|\log h|^{d-1}\|u_h\|_{H^1}\|v_h\|_{H^1} + |a^P_{G_n^{(d)}}(u_h,v_h) - a^D_{G_n^{(d)}}(u_h,v_h)|\,.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Somit bleibt abzuschätzen

$$
\begin{aligned}
&|a^P_{G_n^{(d)}}(u_h,v_h) - a^D_{G_n^{(d)}}(u_h,v_h)| \\
&\qquad\leq \int\limits_{\mathbf{Q}} \Bigg| \sum_{i,j=1}^{d} \Big\{ u_{h,x_i} \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(A_{ij}) - \mathrm{I}^{x_i\mathrm{kon},\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_{h,x_i}A_{ij}) \Big\} v_{h,x_j} \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{d} \Big\{ u_{h,x_i} \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(b_i) - \mathrm{I}^{x_i\mathrm{kon},\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_{h,x_i}b_i) \Big\} v_h \\
&\qquad\qquad + \Big\{ u_h \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(c) - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_h c) \Big\} v_h \Bigg| \, d\underline{x} \\
&\qquad\leq K \int\limits_{\mathbf{Q}} \sum_{i=1}^{d} |v_{h,x_i}| + |v_h| \, d\underline{x} = K\|v_h\|_{W_1^1} \\
&\text{(Einbettungssatz)} \quad \leq K\|v_h\|_{W_1^2} = K\|v_h\|_{H^1}\,,
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
K = \max_{1\leq i,j\leq d} \Big\{ &\|u_{h,x_i} \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(A_{ij}) - \mathrm{I}^{x_i\mathrm{kon},\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_{h,x_i}A_{ij})\|_\infty, \\
&\|u_{h,x_i} \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(b_i) - \mathrm{I}^{x_i\mathrm{kon},\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_{h,x_i}b_i)\|_\infty, \\
&\|u_h \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(c) - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_h c)\|_\infty \Big\}\,.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Die Abschätzung von K wird beim Helmholtzanteil begonnen:

Beh.:

$$
\|u_h \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(c) - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_h c)\|_\infty \leq \|c - \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(c)\|_\infty \|u_h\|_\infty \tag{3.14}
$$

Bew.: Die Differenzfunktion $\delta := u_h \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(c) - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_h c)$ ist stückweise d-linear und unstetig. Ihre Unstetigkeitsstellen können jedoch nur auf den Gitterlinien des vollen Gitters $G_n^{(d)}$ liegen. In den offenen Teilintervallen $L^h_{\underline{p}} := \prod_{i=1}^{d}]p_i, p_i + h[$, $\underline{p}$ Vollgitter-Punkt, ist die Differenzfunktion δ d-linear und die stetige Erweiterung von δ auf dem Abschluß von $L^h_{\underline{p}}$ nimmt somit ihr Minimum und Maximum in den Ecken des abgeschlossenen Intervalls $\overline{L^h_{\underline{p}}}$ an, also auf Gitterpunkten von $G_n^{(d)}$. In diesen Unstetigkeitsstellen von δ gilt die Abschätzung (3.14) trivialerweise und damit auch über ganz $\mathbf{Q}$.

Daß die Behauptung (3.14) nicht ohne weiteres auf dünne Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$ übertragen werden kann, liegt im wesentlichen daran, daß auch hier die entsprechende Differenzfunktion $\tilde{\delta} := u_h \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(c) - \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h c)$ genauso wie δ ihr Minimum und Maximum auf den Gitterpunkten des *vollen* Gitters $G_n^{(d)}$ annimmt. Somit fällt der punktweise Vergleich bei dünnen Gittern aus.

Analog zu (3.14) gelten für die übrigen Anteile von K die Abschätzungen

$$\|u_{h,x_i} \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(g) - \mathrm{I}^{x_i\mathrm{kon,lin}}_{G_n^{(d)}}(u_{h,x_i} g)\|_\infty \le \|g - \mathrm{I}^{\mathrm{kon}}_{G_n^{(d)}}(g)\|_\infty \|u_{h,x_i}\|_\infty \tag{3.15}$$

für alle $g \in \{A_{ij}, b_i \mid 1 \le i,j \le d\}$, die auch völlig analog zu (3.14) bewiesen werden können. Insgesamt ergibt sich daraus und aus Satz 2.5 (Seite 19) für K aus (3.13) die Abschätzung

$$K \le C'' h |\log h|^{d-1} \max_{1\le i\le d} \{\|u_h\|_\infty, \|u_{h,x_i}\|_\infty\}$$

mit einem von h unabhängigem $C'' > 0$. Zusammen mit (3.12) ergibt sich damit die erste Behauptung. Im Fall konstanter Diffusions- und Konvektionskoeffizienten werden die zugehörigen Anteile in K durch (3.15) zu null abgeschätzt, woraus sich dann auch die zweite Behauptung ergibt.

$\square$

In der weiteren Argumentation hin zum Satz 3.3 spielt die Einschränkung auf volle Gitter in Lemma 3.2 keine entscheidende Rolle, da sich wegen der inversen Abschätzung (3.17) ohnehin auf ein volles (Start-)Gitter zurückgezogen werden muß.

Für den oben erwähnten Nachweis der gleichgradigen Elliptizität sollte die Abschätzung des Abstands zwischen exakter und diskretisierter Bilinearform am besten in folgender Form vorliegen:

$$|a(u_h, v_h) - a_G(u_h, v_h)| \le f(h) \|u_h\|_{H^1} \|v_h\|_{H^1} \quad \text{mit } f(h) \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0\,. \tag{3.16}$$

Daraus kann dann die gleichgradige Elliptizität der Bilinearformen a_G, für $G \in \{\tilde{G}_n^{(d)}, G_n^{(d)}\}$, leicht bewiesen werden (vgl. etwa [Pflaum, 1994]).

Mit Hilfe der inversen Abschätzung auf regulären vollen Gittern $G_n^{(d)}$ über $\mathbf{Q}$ (vgl. z. B. [Dobrowolski, 1996], Satz 4.11)

$$\begin{gathered} \|u_h\|_\infty \le c_d(h) \|u_h\|_{H^1} \quad \forall u_h \in S_{G_n^{(d)}} \\ \text{mit } c_2(h) = c\,|\log h|^{1/2},\ c_d(h) = c\,h^{1-\frac{d}{2}} \text{ für } d \ge 3\,, \end{gathered} \tag{3.17}$$

kann wenigstens für die Fälle $d \in \{2,3\}$ und Bilinearformen a mit variablen Helmholtzkoeffizienten und konstanten Diffusions- und Konvektionskoeffizienten aus Lemma 3.2 auf eine Abschätzung des Abstands zwischen a und $a^D_{G_n^{(d)}}$ der Form (3.16) geschlossen werden:

$$\begin{gathered} |a(u_h, v_h) - a^D_{G_n^{(d)}}(u_h, v_h)| \le \bar{c}_d(h) \|u_h\|_{H^1} \|v_h\|_{H^1} \quad \forall u_h, v_h \in S_{G_n^{(d)}} \\ \text{mit } d \in \{2,3\},\ \bar{c}_2(h) = \bar{c} h |\log h|^{3/2},\ \bar{c}_3(h) = \bar{c} h^{1/2} |\log h|^2. \end{gathered}$$

Daraus erhält man dann ein $h_{m_0} = 2^{-m_0}$ derart, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $h_m = 2^{-m} \leq h_{m_0}$ die diskretisierten Bilinearformen $a^D_{G^{(d)}_m}$ auf den vollen Gittern $G^{(d)}_m$ gleichgradig elliptisch sind, also

$$\exists C_{a_0} > 0 \; \forall m \geq m_0 \quad a^D_{G^{(d)}_m}(v_h, v_h) \geq C_{a_0} \|v_h\|^2_{H^1} \quad \forall v_h \in S_{G^{(d)}_m}$$

gilt. Dies gilt dann auch für die diskretisierten Bilinearformen $a^D_{\tilde{G}^{(d)}_n}$ auf dünnen Gittern $\tilde{G}^{(d)}_n$, die das volle Gitter $G^{(d)}_{m_0}$ enthalten. Für die Tiefe n dieser dünnen Gitter muß dann $n > n_0 := d(m_0 - 1) + 1$ erfüllt sein (vgl. (2.8), S. 9).

Somit kann folgender Satz formuliert werden:

Satz 3.3: (H^1-*Konvergenz für einen Spezialfall*)

Es sei $d \in \{2, 3\}$, die Diffusions- und Konvektionskoeffizienten A und $\underline{b}$ der H^1_0-elliptischen Bilinearform (3.9) seien konstant und der Helmholtzkoeffizient und die rechte Seite erfüllen $c, f \in C^{G,2d}(\mathbf{Q})$. Hat dann die Gleichung

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall\, v \in H^1_0(\mathbf{Q})$$

eine Lösung $u \in C^{G,2d}(\mathbf{Q})$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ ($h = 2^{-n} \leq 2^{-n_0}$) die Lösung u_h der diskreten Gleichung

$$a^D_{\tilde{G}^{(d)}_n}(u_h, v_h) = l_{\tilde{G}^{(d)}_n}(v_h) \quad \forall\, v_h \in S_{\tilde{G}^{(d)}_n}$$

in der H^1-Norm von der Ordnung

$$\|u - u_h\|_{H^1} = O(h)$$

gegen u konvergiert.

Beweis:

Es bleibt noch für $n \geq n_0$ die Konvergenzordnung gemäß des ersten Lemmas von Strang (S. 25) abzuschätzen. Für die einzelnen abzuschätzenden Terme ergibt sich

$$\sup_{w_h \in S_{\tilde{G}^{(d)}_n}} \frac{|l(w_h) - l_h(w_h)|}{||w_h||_{H^1}} \leq C_1 h^2 |\log h|^{d-1} \|f\|_{C^{G,2d}}$$

mit der Abschätzung (3.8), S. 26, und unter Zuhilfenahme des Interpolanten $u^{\text{lin}}_h := \mathrm{I}^{\text{lin}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}(u)$ von u

$$\inf_{v_h \in S_{\tilde{G}^{(d)}_n}} ||u - v_h||_{H^1} \leq \|u - u^{\text{lin}}_h\|_{H^1} \leq C_2 h \|u\|_{H^{G,d+2}}\,,$$

mit Satz 2.4, S. 12. Wegen der konstanten Diffusions- und Konvektionskoeffizienten folgt

$$\left| a(u_h, v_h) - a^D_{\tilde{G}^{(d)}_n}(u_h, v_h) \right| \leq \int_{\mathbf{Q}} \left| 0 + 0 + \left\{ u_h c - \mathrm{I}^{\text{lin}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}(u_h c) \right\} v_h \right| \, d\underline{x}\,.$$

Wiederum unter Zuhilfenahme des Interpolanten u^{lin}_h von u, von Satz 2.4 und der Identität $\mathrm{I}^{\text{lin}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}(u^{\text{lin}}_h c) = \mathrm{I}^{\text{lin}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}(uc)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\|u_h^{\text{lin}}c - \mathrm{I}^{\text{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h^{\text{lin}}c)\|_\infty &\le \|u_h^{\text{lin}}c - uc\|_\infty + \|uc - \mathrm{I}^{\text{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(uc)\|_\infty \\ &\le C_3 h^2\,|\log h|^{d-1}\left(\|c\|_\infty \|u\|_{C^{G,2d}} + \|uc\|_{C^{G,2d}}\right)\,,\end{aligned}$$

woraus dann

$$\begin{aligned}\inf_{v_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}} \sup_{w_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}} &\frac{|a(v_h, w_h) - a^D_{\tilde{G}_n^{(d)}}(v_h, w_h)|}{||w_h||_{H^1}} \\ &\le C_3 h^2\,|\log h|^{d-1}\left(\|c\|_\infty \|u\|_{C^{G,2d}} + \|uc\|_{C^{G,2d}}\right)\end{aligned}$$

folgt und insgesamt die behauptete Konvergenzordnung von $O(h)$ in der H^1-Norm.

□

Bemerkung:

Für höhere Dimensionen $d \ge 4$ und für variable Diffusions- und Konvektionskoeffizienten konnte über die Konvergenz in der H^1-Norm für die Diskretisierung (3.11) keine Aussage gemacht werden, was wesentlich durch die Abschätzung des Lemmas 3.2 begründet ist. Daher konnte hier die gleichgradige Elliptizität nicht gezeigt werden. Setzt man diese jedoch voraus, so folgt eine Konvergenzordnung von $O(h|\log h|^{(d-1)})$ ganz analog zu Satz 3.3.

3.3 Algorithmische Hinweise

Aus algorithmischer Sicht setzt die Realisierung der Diskretisierung (3.11) auf dem unidirektionalen Algorithmus aus [Balder, 1994] auf. Dort werden die Grundsteine gelegt, die für die Massen- und Steifigkeitsmatrix benötigten Zwei-Term-Integrale zu berechnen. Dies sind für jede beliebige Dünngitter-Funktion $u_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ und alle Testfunktionen $v_h \in \mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ die Integrale

$$\int_{\mathbf{Q}} u_h v_h \, d\underline{x}\,, \quad \int_{\mathbf{Q}} u_{h,x_i} v_h \, d\underline{x}\,, \quad \int_{\mathbf{Q}} u_{h,x_i} v_{h,x_j} \, d\underline{x}\,.$$

Durch die Erweiterung des Differentialoperators kommen jetzt weitere algorithmische Aufgaben hinzu, welche im wesentlichen aus dem Bilden der Interpolanten $\mathrm{I}^{x_i\text{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i}A_{ij})$, $\mathrm{I}^{x_i\text{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i}b_i)$ und $\mathrm{I}^{\text{lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_h c)$ bestehen. Letzterer wurde hierbei schon in Abschnitt 2.2.3 behandelt.

Für die Berechnung von $\mathrm{I}^{x_i\text{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i}g_h)$ für zwei auf einem dünnen Gitter gegebene Funktionen u_h und g_h wird nochmalig die Definition in Erinnerung gerufen:

$$\mathrm{I}^{x_i\text{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i}g_h) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}^{r_{x_i}\text{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i}g_h) + \mathrm{I}^{l_{x_i}\text{kon,lin}}_{\tilde{G}_n^{(d)}}(u_{h,x_i}g_h)\right)\,. \tag{3.18}$$

Der Grund für die Mittelung war die Verbesserung der Integrationsgenauigkeit und für die gemischte Interpolation, daß die partielle Ableitung der Dünngitter-Funktion u_h in Richtung x_i genau diese gemischte Darstellung besitzt: stückweise konstant in Richtung x_i, stückweise $(d-1)$-linear in den übrigen.

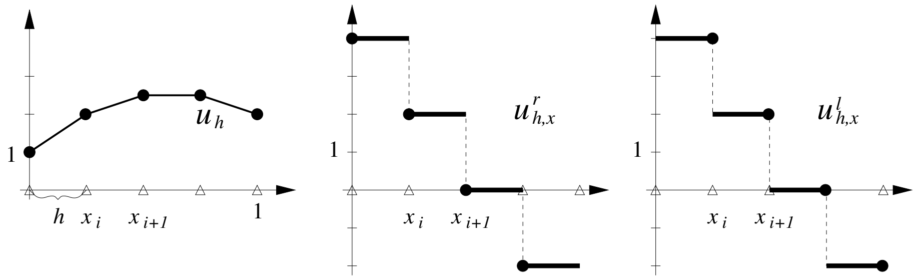


Abb. 3.1 1 D-Beispiel: Die Ableitung von u_h kann auf einem Gitter G rechtsseitig stetig ($u^r_{h,x}$) und linksseitig stetig ($u^l_{h,x}$) dargestellt werden.

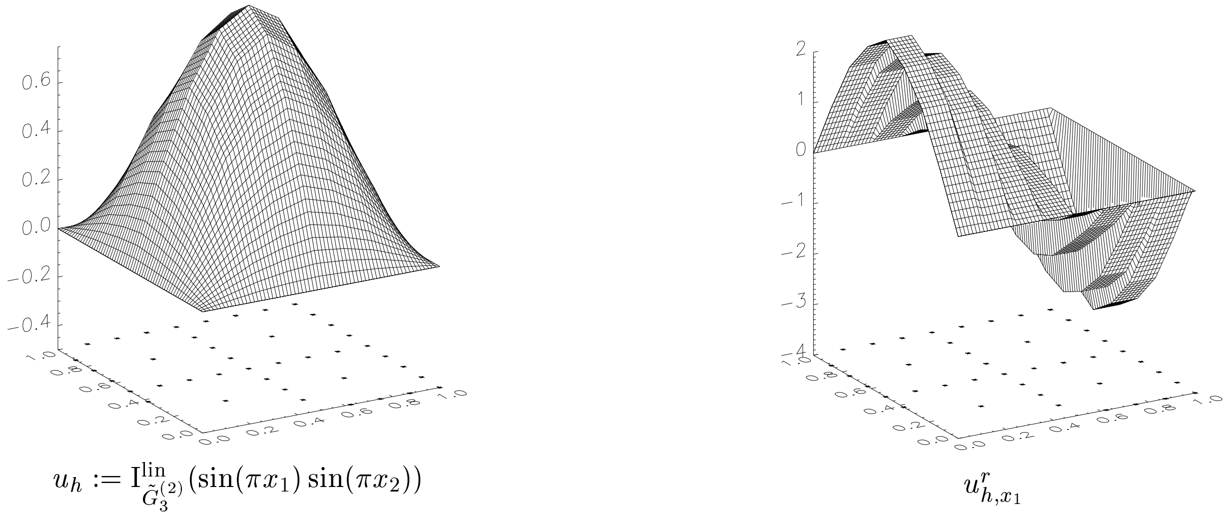


Abb. 3.2 Der auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}^{(2)}_3$ stückweise bilineare Interpolant der Funktion $\sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)$ (links) und dessen in x_1-Richtung stückweise konstante Ableitung u^r_{h,x_1} in rechtsseitig stetiger Darstellung (rechts)

3.3.1 Berechnung der partiellen Ableitung

Für die Berechnung des Mittelungsoperators (3.18) wird nun auch die explizite Berechnung der partiellen Ableitung u_{h,x_i} auf dem dünnen Gitter notwendig. Für die Darstellung der in x_i-Richtung unstetigen Ableitung u_{h,x_i} gibt es unter anderem die zwei Möglichkeiten: rechtsseitig stetig oder linksseitig stetig (vgl. Abbildung 3.1 für ein 1 D-Beispiel).

Für den höherdimensionalen Fall ergeben sich für die Berechnung der Ableitung jedoch Schwierigkeiten, denn bei einer stückweise multilinearen Dünngitter-Funktion u_h auf $\tilde{G}^{(d)}_n$ bezieht sich das *stückweise* auch auf das volle Gitter $G^{(d)}_n$, und u_h ist nur auf den Teilintervallen dieses vollen Gitters $G^{(d)}_n$ multilinear (vgl. etwa Abbildung 3.2, in der eine Dünngitter-Funktion auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}^{(2)}_3$ und die zugehörige partielle Ableitung in x_1-Richtung gezeigt ist). Damit läßt sich die naive Vorgehensweise ausschließen, bei der u_h auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}^{(d)}_n$ in der nodalen Basisdarstellung aus Abschnitt 2.2.3, Bild 2.9, verwendet wird, um dann die Differenzenquotienten zwischen den nächstgelegenen Nachbarknoten zu bilden.

Eine naheliegende Vorgehensweise bestünde nun darin, die Dünngitter-Funktion u_h von $\tilde{G}_n^{(d)}$ auf das volle Gitter $G_n^{(d)}$ zu interpolieren, um dann in nodaler Basisdarstellung von $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{G_n^{(d)}}(u_h)$ die Differenzenquotienten aus den nächstgelegenen Nachbarknoten zu bilden. Hierdurch würde dann auch in den Dünngitter-Punkten die Ableitung mit der richtigen Intervallänge gebildet (vgl. Abbildung 3.4, S. 38). Diese Vorgehensweise würde aber sofort die zugrundeliegende Dünngitter-Komplexität der Algorithmen zerstören.

Abhilfe bietet hier der folgende Algorithmus, der im wesentlichen auf der in Abbildung 3.3, S. 35, dargestellten gemischten Basisdarstellung der Dünngitter-Funktion beruht und vollständig auf dem dünnen Gitter operiert.

Algorithmus 3.4 zur Berechnung von u^r_{h,x_i}:

1) Eingabe: u_h dehierarchisch auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$
2) Hierarchisiere u_h in allen Richtungen stückweise linear, außer in Richtung x_i.
3) Durchlaufe die Dünngitter-Datenstruktur, und bilde entlang aller Linien der Richtung x_i die rechtsseitigen Differenzenquotienten aus den jeweils nächstgelegenen Nachbarknoten.
4) Dehierarchisiere das Ergebnis wieder in allen Richtungen, außer in Richtung x_i, stückweise linear.
5) Ausgabe: u^r_{h,x_i} dehierarchisch auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$

Bemerkung:

Die zugehörige hierarchische Darstellung basiert auf der hierarchischen Basis $\mathcal{H}^A_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ mit $A_i = r$ und $A_j = z$ für $j \neq i$ (vgl. Abschnitt 2.4).

Die Berechnung von u^l_{h,x_i} funktioniert analog. Für die Begründung des Algorithmus' wird zunächst der eindimensionale Fall ($d = 1$) betrachtet.

Es sei $h = 2^{-n}$, $\psi_i(x)$ bezeichne die stückweise lineare *nodale* Basisfunktion zum Stützpunkt ih, $i \in \{0, \ldots, 2^n\}$ (vgl. Abbildung 2.1, S. 6), und

$$\psi_i^r(x) := \begin{cases} 1\,, & ih \le x < (i+1)h \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

die stückweise konstante, rechtsseitig stetige *nodale* Basisfunktion zum selben Stützpunkt. Dann gilt

$$\frac{d}{dx}\psi_i(x) = \frac{1}{h}\left(\psi^r_{i-1}(x) - \psi^r_i(x)\right)\,, \tag{3.19}$$

und für die Ansatzfunktion

$$u_h = \sum_{i=0}^{2^n} u_i \psi_i(x)\,, \quad u_i = u_h(ih)\,,$$

ergibt sich mit der Konvention $\psi^r_{-1} = \psi^r_{2^n} \equiv 0$

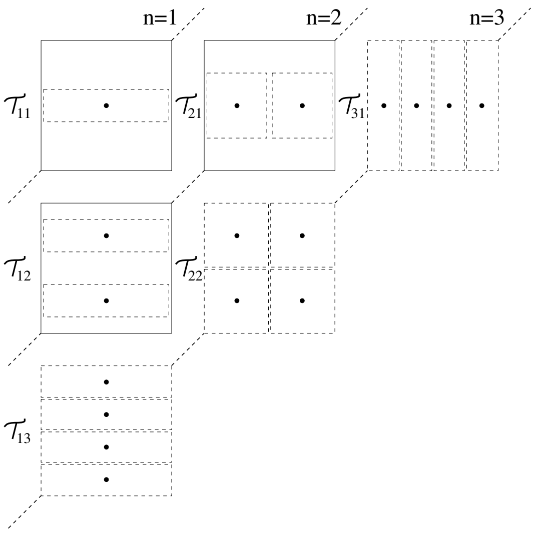


Abb. 3.3 Die Träger der inneren Basisfunktionen, die auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_3^{(2)}$ in x_1-Richtung hierarchischer, in x_2-Richtung dehierarchischer Darstellung entsprechen

$$
\begin{aligned}
u_{h,x} &= \sum_{i=0}^{2^n} u_i \frac{d}{dx}\,\psi_i(x) = \sum_{i=0}^{2^n} u_i \frac{1}{h}\left(\psi^r_{i-1}(x) - \psi^r_i(x)\right) \\
&= \sum_{i=-1}^{2^n-1} \frac{u_{i+1}}{h}\,\psi^r_i(x) - \sum_{i=0}^{2^n} \frac{u_i}{h}\,\psi^r_i(x) \\
&= \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{u_{i+1}-u_i}{h}\,\psi^r_i(x)\,.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Für den Übergang zu höheren Raumdimensionen $d > 1$ werden die Betrachtungen o. B. d. A. auf die partielle Ableitung in Richtung x_d beschränkt. Sei nun die Ansatzfunktion u_h in dieser Richtung dehierarchisch, in den übrigen hierarchisch dargestellt. Die dabei verwendeten Basisfunktionen haben dann die Eigenschaft, daß ihre Träger in x_d-Richtung durch den nächstgelegenen Gitterpunkt begrenzt sind (vgl. Abbildung 3.3). In Anlehnung an [Bungartz, 1992] lassen sich mit der Funktion

$$
w_l(x) := \begin{cases} \dfrac{h_l + x}{h_l} & ,\ -h_l \le x \le 0 \\ \dfrac{h_l - x}{h_l} & ,\ 0 \le x \le h_l\,, \\ 0 & ,\ \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \text{mit } h_l = 2^{-l}\,,
$$

diese stückweise d-linearen Basisfunktionen für die den Teilmengen $\mathcal{T}_{i_1,\ldots,i_d}$ von $\mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ zugeordneten Stützstellen definieren als

$$
\phi^{(i_1,\ldots,i_d)}_{k_1,\ldots,k_d}(x_1,\ldots,x_d) := \varphi^{(i_1,\ldots,i_{d-1})}_{k_1,\ldots,k_{d-1}}(x_1,\ldots,x_{d-1}) \cdot \psi^{(i_d)}_{k_d}(x_d) \quad \forall\, 1 \le k_j \le 2^{i_j-1}\,,
$$

mit

$$\varphi_{k_1,\ldots,k_{d-1}}^{(i_1,\ldots,i_{d-1})}(x_1,\ldots,x_{d-1}) := \prod_{j=1}^{d-1} w_{i_j}\left(x_j - m_{k_j}^{(i_j)}\right),$$
$$\psi_{k_d}^{(i_d)}(x_d) := w_{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}\left(x_d - m_{k_d}^{(i_d)}\right),$$
$$m_{k_j}^{(i_j)} := (2k_j - 1)\cdot h_{i_j}\,.$$

Somit ergibt sich zum Gitterpunkt $\left(m_{k_1}^{(i_1)},\ldots,m_{k_d}^{(i_d)}\right)$ der Träger der zugehörigen Basisfunktion zu dem kartesischen Produkt von Intervallen

$$\prod_{j=1}^{d-1}[(2k_j-2)h_{i_j},\, 2k_jh_{i_j}] \times [m_{k_d}^{(i_d)} - h_{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}},\, m_{k_d}^{(i_d)} + h_{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}]$$

(vgl. Abbildung 3.3). Um die folgenden Ausführungen nicht unnötig zu komplizieren, wird sich auf Dünngitter-Funktionen $u_h \in S_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ beschränkt, die auf dem Rand von $\mathbf{Q}$ verschwinden: $u_h|_{\partial\mathbf{Q}} = 0$. Dann läßt sich u_h als die Linearkombination

$$u_h = \sum_{i_1+\ldots+i_d\le n+d-1}\ \sum_{k_1=1}^{2^{i_1-1}}\cdots\sum_{k_d=1}^{2^{i_d-1}} \hat{u}_{k_1,\ldots,k_d}^{(i_1,\ldots,i_d)}\ \varphi_{k_1,\ldots,k_{d-1}}^{(i_1,\ldots,i_{d-1})}(x_1,\ldots,x_{d-1})\,\psi_{k_d}^{(i_d)}(x_d)$$

ausdrücken. Die Summation, die über alle – den Stützstellen der Teilmengen $\mathcal{T}_{i_1,\ldots,i_d} \subset \mathcal{H}_{\tilde{G}_n^{(d)}}$ zugeordneten – Basisfunktionen erfolgt, wird nun so umgestellt, daß für jede feste Indexmenge $(i_1,\ldots,i_{d-1})$ über die Linien in x_d-Richtung summiert wird. Dies geschieht durch folgende Kommutationen der Summation, bei der zur leichteren Lesbarkeit die Summanden weggelassen werden:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1+\ldots+i_d\le n+d-1}\ \sum_{k_1=1}^{2^{i_1-1}}\cdots\sum_{k_d=1}^{2^{i_d-1}}\\
&\quad= \sum_{i_1+\ldots+i_{d-1}\le n+d-2}\ \sum_{i_d=1}^{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}\ \sum_{k_1=1}^{2^{i_1-1}}\cdots\sum_{k_d=1}^{2^{i_d-1}}\\
&\quad= \sum_{i_1+\ldots+i_{d-1}\le n+d-2}\ \sum_{k_1=1}^{2^{i_1-1}}\cdots\sum_{k_{d-1}=1}^{2^{i_{d-1}-1}}\ \underbrace{\sum_{i_d=1}^{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}\ \sum_{k_d=1}^{2^{i_d-1}}}\\
&\quad= \sum_{i_1+\ldots+i_{d-1}\le n+d-2}\ \sum_{k_1=1}^{2^{i_1-1}}\cdots\sum_{k_{d-1}=1}^{2^{i_{d-1}-1}}\ \sum_{j=1}^{2^{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}-1}\ .
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurden dabei die Summen in i_d und k_d durch eine einzige in j ersetzt, die über alle die Stützstellen $m_{k_d}^{(i_d)}$ in aufsteigender Reihenfolge addieren soll. Mit Blick auf die Definition der $m_{k_d}^{(i_d)}$ bewerkstelligen dies die Indextransformationen

$$i_d(j) := n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1} - \max\left\{k\in\mathbb{N}_0 \;\middle|\; 2^k \text{ teilt } j\right\},$$
$$k_d(j) := \frac{j - 2^{\max\left\{k\in\mathbb{N}_0 \,\middle|\, 2^k \text{ teilt } j\right\}}}{2^{1+\max\left\{k\in\mathbb{N}_0 \,\middle|\, 2^k \text{ teilt } j\right\}}} + 1\,.$$

Damit läßt sich u_h wie folgt ausdrücken:

$$u_h = \sum_{i_1+\ldots+i_{d-1}\leq n+d-2} \sum_{k_1=1}^{2^{i_1-1}} \cdots \sum_{k_{d-1}=1}^{2^{i_{d-1}-1}} \varphi_{k_1,\ldots,k_{d-1}}^{(i_1,\ldots,i_{d-1})}(x_1,\ldots,x_{d-1})$$
$$\sum_{j=1}^{2^{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}-1} \hat{u}_{k_1,\ldots,k_{d-1},k_d(j)}^{(i_1,\ldots,i_{d-1},i_d(j))} \psi_{k_d(j)}^{(i_d(j))}(x_d)\,.$$

Steht dann $\hat{\psi}_j^r(x_d)$ für die rechtsseitig stetige, stückweise konstante nodale Basisfunktion der Feinheit $h_{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}} = 2^{-(n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1})}$ zur Stützstelle $j \cdot h_{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}$, dann gilt analog zu (3.19)

$$\frac{d}{dx_d}\psi_{k_d(j)}^{(i_d(j))}(x_d) = \frac{1}{h_{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}}\left(\hat{\psi}_{j-1}^r(x_d) - \hat{\psi}_j^r(x_d)\right)\,,$$

und für die partielle Ableitung von u_h ergibt sich analog zu (3.20)

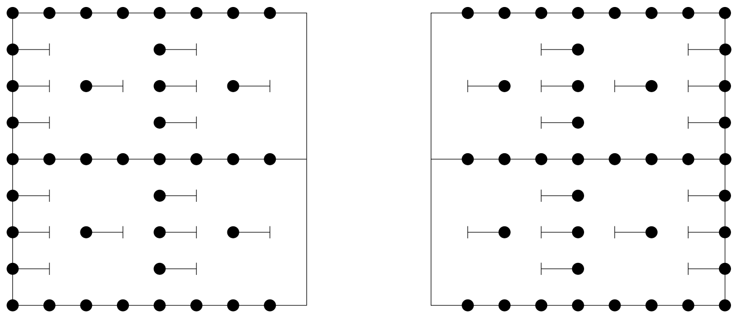
$$u_{h,x_d} = \sum_{i_1+\ldots+i_{d-1}\leq n+d-2} \sum_{k_1=1}^{2^{i_1-1}} \cdots \sum_{k_{d-1}=1}^{2^{i_{d-1}-1}} \varphi_{k_1,\ldots,k_{d-1}}^{(i_1,\ldots,i_{d-1})}(x_1,\ldots,x_{d-1})$$
$$\sum_{j=0}^{2^{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}-1} \frac{\hat{u}_{k_1,\ldots,k_{d-1},k_d(j+1)}^{(i_1,\ldots,i_{d-1},i_d(j+1))} - \hat{u}_{k_1,\ldots,k_{d-1},k_d(j)}^{(i_1,\ldots,i_{d-1},i_d(j))}}{h_{n+d-1-i_1-\ldots-i_{d-1}}} \psi_{k_d(j)}^{(i_d(j))}(x_d)\,.$$

Diese Formel liefert nun die Begründung für den Algorithmus 3.4 auf S. 34, da sie unter Verwendung der dort angegebenen gemischten Basisdarstellung die partielle Ableitung von u_h so beschreibt, daß die einseitigen Differenzen hier linienweise (also für jedes feste Tupel $(k_1,\ldots,k_{d-1})$) gebildet werden können.

3.3.2 Berechnung des Mittelungsoperators (3.18)

Für die Bildung des Mittelungsoperators (3.18) wird zunächst der eindimensionale Fall betrachtet. Hier kann die Mittelung auf drei verschiedene Arten ausgedrückt werden: Für $0 < t < 1$ gilt

$$2 \cdot \mathrm{I}_G^{x\mathrm{kon}}(u_{h,x}g_h)((i+t)h)$$
$$= u_{h,x}^r(ih)\cdot\Big(g_h(ih) + g_h((i+1)h)\Big) \qquad (3.21a)$$
$$= u_{h,x}^l((i+1)h)\cdot\Big(g_h(ih) + g_h((i+1)h)\Big) \qquad (3.21b)$$
$$= u_{h,x}^r(ih)\cdot g_h(ih) + u_{h,x}^l((i+1)h)\cdot g_h((i+1)h)\,. \qquad (3.21c)$$



u^r_{h,x_1} u^l_{h,x_1}

Abb. 3.4 Durch die Berechnung beider einseitigen Ableitungen kann die Mittelung punktweise durchgeführt werden, da jedem Gitterpunkt einmal die rechtsseitige und einmal die linksseitige Ableitung an dieser Stelle zugewiesen wird.

Hierbei entspricht die Mittelung (3.21c) in ihrer Aufteilung genau der aus (3.18), und die Faktoren der einzelnen Produkte zwischen den Funktionen $u^r_{h,x}$ und g_h bzw. $u^l_{h,x}$ und g_h beziehen sich jeweils auf den selben Punkt. Damit können diese Produkte analog zu Abschnitt 2.2.3 in der nodalen Basisdarstellung punktweise gebildet werden. Die Addition in (3.21c) bezieht sich dagegen zunächst auf Funktionswerte in benachbarten Punkten. Damit diese ebenfalls punktweise (im selben Punkt) durchgeführt werden kann, überführt man z. B. die rechtsseitig stetige Funktion $u^r_{h,x}g_h$ in ihre linksseitig stetige Darstellung durch einen Shift der Funktionswerte um jeweils einen Gitterpunkt nach rechts.

Die Mittelung (3.21c) eignet sich auch für die Verallgemeinerung auf den höherdimensionalen Fall. Sie kann nämlich so interpretiert werden, daß jedem Gitterpunkt einmal die linksseitige und einmal die rechtsseitige Ableitung zugeordnet wird, und beide Werte mit jeweils dem gleichen Funktionswert von g_h an dieser Stelle multipliziert werden. Die beiden Produkte werden dann in diesen Punkten addiert. In Abbildung 3.4 sind zu den Gitterpunkten eines dünnen Gitters die Intervalle angedeutet, über die die jeweiligen einseitigen Ableitungen gebildet sind.

Die Bedeutung der punktweise (im selben Punkt) ausführbaren Operationen wird klar, wenn man sich vergegenwärtigt, daß die um h verschobenen Gitterpunkte, die zur Bildung der Mittelungen (3.21a) oder (3.21b) benötigt würden, nicht notwendig zum dünnen Gitter gehören. Im 2 D-Fall etwa wird zur Bildung der Mittelung

$$m := \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_2^{(2)}}(g)(1/2, 3/4) + \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_2^{(2)}}(g)(3/4, 3/4)$$

auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_2^{(2)}$ der Funktionswert von $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}_2^{(2)}}(g)$ an der Stelle $(3/4, 3/4)$ benötigt. Diese liegt aber außerhalb der Punktmenge von $\tilde{G}_2^{(2)}$, und man müßte im Algorithmus Punkte behandeln, die außerhalb der zur Speicherung des dünnen Gitters verwendeten Datenstruktur liegen.

Eine weitere Eigenschaft der Mittelung (3.21c) besteht darin, daß sie für die Behandlung unstetiger Koeffizienten geeignet erweitert werden kann. Dies wird im folgenden Abschnitt betrachtet.

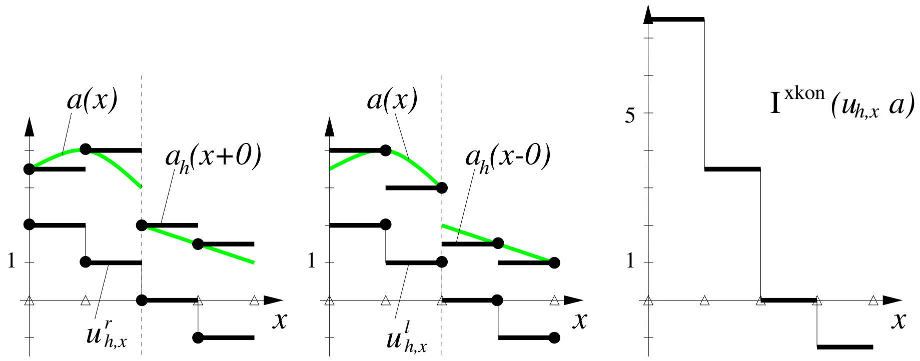


Abb. 3.5 Bei der Mittelung durch den unstetigen Interpolationsoperator $\mathrm{I}_G^{x\mathrm{kon}}$ (3.22) findet keine Wechselwirkung der beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle statt.

3.4 Erweiterung auf unstetige Koeffizienten

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Koeffizienten auf **Q** glatt sind. Diese Voraussetzung wird jetzt abgeschwächt und Koeffizienten zugelassen, die entlang von Gitterlinien unstetig sind.

Die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\,\frac{\partial}{\partial x}u\right) = f$$

mit dem unstetigen Koeffizienten

$$a(x) = \begin{cases} a^l(x)\,, & x \le \frac{1}{2} \\ a^r(x)\,, & \frac{1}{2} < x \end{cases}\quad,\quad a^l\,,\ a^r \text{ glatt,}$$

kann mittels der Diskretisierung (3.11), S. 27, korrekt behandelt werden, wenn in der Mittelung (3.21c), S. 37, die entsprechenden rechts- und linksseitigen Grenzwerte von a

$$a(x+0) := \lim_{z\to x+0} a(z)\,, \qquad a(x-0) := \lim_{z\to x-0} a(z)$$

eingesetzt werden

$$2\cdot \mathrm{I}_G^{x\mathrm{kon}}(u_{h,x}a)((i+t)h) = u^r_{h,x}(ih)\cdot a(ih+0) + u^l_{h,x}((i+1)h)\cdot a((i+1)h-0)\,, \quad (3.22)$$

für $0 < t < 1$ (vgl. Abbildung 3.5), da das Produkt $u_{h,x}a$ ohnehin durch $\mathrm{I}_G^{x\mathrm{kon}}(u_{h,x}a)$ stückweise konstant und unstetig dargestellt wird. Die korrekte Behandlung der beiden (voneinander unabhängigen) Seiten der Unstetigkeitsstelle wird also dadurch erreicht, daß der Unstetigkeitsstelle zwei Werte zugeordnet sind und somit abhängig von der behandelten Seite auf den entsprechenden Grenzwert zugegriffen werden kann. Dadurch findet keine Wechselwirkung der beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle statt.

Beim Übergang zur zweidimensionalen Diffusionsgleichung

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\,\frac{\partial}{\partial x}u\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(a\,\frac{\partial}{\partial y}u\right) = f$$

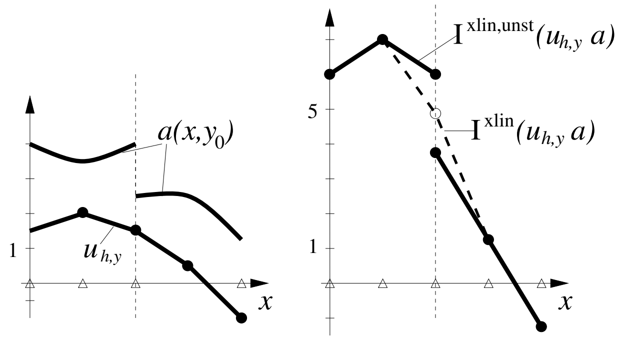


Abb. 3.6 Bei der stetigen Mittelung durch $\mathrm{I}_G^{x\mathrm{lin}}$ findet eine Wechselwirkung der beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle statt, die durch einen unstetigen stückweise linearen Interpolationsoperator vermieden werden kann.

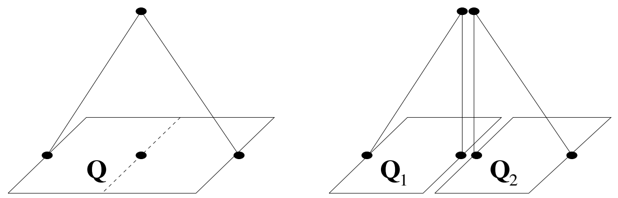


Abb. 3.7 Durch die Blockstrukturierung von **Q** längs der Linie $x = 1/2$ werden die Gitterpunkte dieser Linie verdoppelt, was eine unstetige stückweise lineare Interpolation ermöglicht.

mit

$$a(x,y) = \begin{cases} a^l(x,y)\,, & x \leq \frac{1}{2} \\ a^r(x,y)\,, & \frac{1}{2} < x \end{cases}$$

kann für den Anteil $a\frac{\partial}{\partial x}u_h$ wie im eindimensionalen Fall verfahren werden, beim Anteil $a\frac{\partial}{\partial y}u_h$ wird aber $u_{h,y}$ in x-Richtung stückweise linear dargestellt, und es ergibt sich somit für $a\frac{\partial}{\partial y}u_h$ eine stückweise lineare und unstetige Darstellung in x-Richtung, für die ein entsprechender Interpolationsoperator $\mathrm{I}_G^{x\mathrm{lin,unst}}$ benötigt wird. Bei Verwendung des stetigen stückweise linearen Interpolationsoperators $\mathrm{I}_G^{x\mathrm{lin}}$ kann zwar der Wert von $u_{h,x}$ ebenfalls einmal mit dem linksseitigen und einmal mit dem rechtsseitigen Grenzwert von a multipliziert werden, aber durch die anschließende *stetige* Mittelung wird die Unstetigkeit nicht adäquat behandelt (vgl. Abbildung 3.6). Insbesondere wird die linke Seite der Unstetigkeitsstelle vom rechtsseitigen Grenzwert von a beeinflußt und umgekehrt die rechte Seite vom linksseitigen Grenzwert. Diese Wechselwirkung der verschiedenen Seiten sollte vermieden werden.

Die gleichen Ergebnisse zeigen sich bei der Betrachtung unstetiger Koeffizienten vor den gemischten Ableitungen u_{xy} und u_{yx}

Eine einfache Methode, den unstetigen stückweise linearen Interpolationsoperator zu realisieren, erhält man durch Blockstrukturierung von **Q** entlang der Unstetigkeitslinie der Koeffizienten, da hierbei die Gitterpunkte dieser Linie verdoppelt werden (vgl. Abbildung 3.7) und damit hier eine unstetige Interpolation ermöglichen.

Eine andere Methode ist, direkt auf dem dünnen Gitter eine unstetige stückweise lineare Interpolation einzuführen. Dies könnte etwa analog zur Blockstrukturierung durchgeführt werden, indem statt der bisher verwendeten stetigen Hutfunktionen (vgl. Abbildung 3.7, links) durch

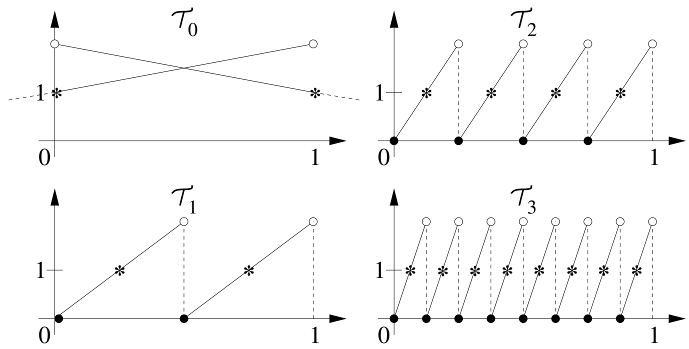


Abb. 3.8 Diese hierarchischen Basisfunktionen ermöglichen eine stückweise lineare und unstetige Interpolation. Ihre Stützpunkte sind mit $*$ markiert.

Verdopplung der Freiheitsgrade die unstetigen Hutfunktionen (vgl. Abbildung 3.7, rechts) verwendet würden. Im höherdimensionalen Fall bedeutet dies jedoch eine $2d$-fache Erhöhung des Speicheraufwandes. Unter Verwendung der in Abbildung 3.8 dargestellten hierarchischen Basisfunktionen könnte dieser Aufwand für dünne Gitter auf das 2-fache reduziert werden, da zur Beschreibung einer (unstetigen) stückweise linearen Funktion auf einem Gitter der Tiefe n nur die Basisfunktionen bis zur Tiefe $n + 1$ benötigt werden.

Da jedoch keine dieser Varianten implementiert wurde, werden in den Abschnitten 3.6.4 und 4.3.6 nur Beispiele untersucht, bei denen die Ableitungen der Lösung u in Richtung der Unstetigkeitslinien verschwinden. Dann wirkt sich die falsche Mittelung bei der stückweise linearen Interpolation über die Unstetigkeiten hinweg nicht aus.

3.5 Lösungsverfahren

Die Implementierung der Diskretisierung (3.11), S. 27, stellt analog zu [Balder, 1994] die Berechnung des Matrix-Vektor-Produkts der Steifigkeitsmatrix mit dem Unbekanntenvektor zur Verfügung. Damit bieten sich iterative Löser vom Konjugierten-Gradienten-Typ an. Da die Steifigkeitsmatrix i. a. nicht symmetrisch ist – insbesondere auch der konvektiven Anteile wegen – muß nun ein nichtsymmetrisches lineares Gleichungssystem gelöst werden. Als Löser wurde das BI-CGSTAB-Verfahren aus [van der Vorst, 1992] gewählt, da es ohne die Transponierte der Steifigkeitsmatrix auskommt und zudem als vergleichsweise schneller und robuster Löser für nichtsymmetrische lineare Gleichungssysteme gilt (vgl. etwa [Schmid et al., 1993]).

Ein wichtiger Aspekt effizienter iterativer Löser ist die Vorkonditionierung. Hier wurde auf die Ergebnisse aus [Griebel & Oswald, 1993] zurückgegriffen, die für das zweidimensionale Poissonproblem auf dünnen Gittern einen mehrgitterartigen Vorkonditionierer mit maschenweitenunabhängigen Konvergenzraten vorstellen. In [Balder, 1994] wurde dieser Vorkonditionierer auf d Raumdimensionen erweitert, sodaß der BI-CGSTAB-Algorithmus im allgemeinen d-dimensionalen Fall auf das vorkonditionierte Gleichungssystem angewendet werden kann.

Zu dem gemäß (3.11) auf dünnen Gittern diskretisierten zweidimensionalen Laplaceoperator, dem elliptischen Diffusionsoperator

	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\lambda_{\min}$	1.95	0.736	0.595	0.490	0.400	0.314	0.258	0.215	0.181
S_{HB}	$\lambda_{\max}$	4.05	6.09	10.9	21.4	42.7	85.4	170.7	341.3	682.7
	κ	**2.08**	**8.27**	**18.3**	**43.7**	**107**	**272**	**662**	**1587**	**3772**
	$\lambda_{\min}$	0.665	0.249	0.186	0.135	0.099	0.067	0.048	0.033	0.024
S_{DHB}	$\lambda_{\max}$	1.34	1.77	2.12	2.55	2.90	3.34	3.69	4.12	4.47
	κ	**2.02**	**7.11**	**11.4**	**18.9**	**29.3**	**49.9**	**76.9**	**125**	**186**
	$\lambda_{\min}$	1.00	0.961	0.862	0.712	0.665	0.620	0.560	0.544	0.533
S_{SDS}	$\lambda_{\max}$	2.31	2.58	3.71	3.89	4.72	4.92	5.60	5.75	6.29
	κ	**2.31**	**2.68**	**4.30**	**5.46**	**7.10**	**7.94**	**10.0**	**10.6**	**11.8**

Tabelle 3.1 Die Eigenwerte $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ und Konditionszahlen κ der Steifigkeitsmatrizen des auf dünnen Gittern $\tilde{G}_n^{(2)}$ diskretisierten Laplaceoperators.

$$\nabla \cdot (A\nabla)\ , \quad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 - \sin(2\pi x) & 2\pi\cos(2\pi x)(y-1) \\ 2\pi\cos(2\pi x)(y-1) & \dfrac{4\pi^2\cos^2(2\pi x)(y-1)^2}{\sin(2\pi x) - 5} \end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

und dem elliptischen Konvektions-Diffusions-Operator

$$\nabla \cdot (A\nabla) + \underline{b}\nabla\ , \quad \text{mit}$$

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 + \sin(2\pi x) + \sin(2\pi y) & 0 \\ 0 & 4 + \sin(2\pi xy) \end{pmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + 4(1-2y)\sin(2\pi x) \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

wurden schließlich die Konditionszahlen der Steifigkeitsmatrizen auf regulären dünnen Gittern wachsender Tiefe berechnet. Hierbei bezeichnet

S_{HB} die nichtvorkonditionierte Steifigkeitsmatrix,
S_{DHB} die diagonalskalierte Matrix S_{HB}, deren Diagonalelemente eins sind,
S_{SDS} die gemäß [Griebel & Oswald, 1993] und [Balder, 1994] vorkonditionierte Matrix.

Die Eigenwerte wurden dabei mit der inversen Iteration nach Wielandt berechnet, und die Ergebnisse sind für den Laplaceoperator in Tabelle 3.1, für den gemäß (3.11) diskretisierten Diffusionsoperator (3.23) in Tabelle 3.2 und für (3.24) in Tabelle 3.3 gezeigt. Insbesondere erkennt man, daß sich die Konditionszahlen der vorkonditionierten Matrizen S_{SDS} in allen drei Beispielen nicht stark voneinander unterscheiden.

Bemerkung:

Der Diffusionsoperator (3.23) entspricht dem Laplaceoperator auf dem Gebiet $\mathbf{P} := \mathbf{Q} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0.2\sin(2\pi x)\}$ (vgl. Abbildung 3.9) bei geeigneter Gebietstransformation (vgl. hierzu Kapitel 4).

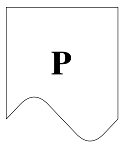


Abb. 3.9

	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\lambda_{\min}$	2.26	0.834	0.664	0.534	0.434	0.338	0.276	0.229	0.192
S_{HB}	$\lambda_{\max}$	6.04	12.2	25.7	53.1	108	218	438.1	878.2	1759
	κ	**2.67**	**14.6**	**38.7**	**99.4**	**249**	**645**	**1587**	**3835**	**9161**
	$\lambda_{\min}$	0.677	0.260	0.191	0.138	0.100	0.068	0.049	0.034	0.025
S_{DHB}	$\lambda_{\max}$	1.32	1.79	2.18	2.60	2.95	3.37	3.72	4.14	4.49
	κ	**1.95**	**6.88**	**11.4**	**18.8**	**29.5**	**49.6**	**75.9**	**122**	**180**
	$\lambda_{\min}$	0.921	0.847	0.726	0.620	0.543	0.489	0.452	0.420	0.408
S_{SDS}	$\lambda_{\max}$	2.30	2.58	3.91	4.04	5.06	5.14	6.00	6.00	6.74
	κ	**2.50**	**3.05**	**5.39**	**6.52**	**9.32**	**10.5**	**13.3**	**14.3**	**16.5**

Tabelle 3.2 Die Eigenwerte $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ und Konditionszahlen κ der Steifigkeitsmatrizen des gemäß (3.11) auf dünnen Gittern $\tilde{G}_n^{(2)}$ diskretisierten Diffusionsoperators (3.23)

	n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\lambda_{\min}$	8.42	3.14	2.52	2.03	1.62	1.26	1.02	0.829	0.685
S_{HB}	$\lambda_{\max}$	17.6	28.2	53.8	106.8	213.4	426.7	853.0	1707	3413
	κ	**2.09**	**8.98**	**21.35**	**52.61**	**132**	**339**	**836**	**2059**	**4982**
	$\lambda_{\min}$	0.683	0.256	0.192	0.139	0.100	0.068	0.049	0.034	0.024
S_{DHB}	$\lambda_{\max}$	1.31	1.73	2.09	2.54	2.90	3.34	3.69	4.12	4.47
	κ	**1.92**	**6.76**	**10.9**	**18.3**	**29.0**	**49.1**	**75.3**	**121**	**186**
	$\lambda_{\min}$	0.995	0.939	0.832	0.702	0.663	0.602	0.555	0.542	0.526
S_{SDS}	$\lambda_{\max}$	2.33	2.64	3.88	4.03	4.97	5.09	5.92	5.97	6.64
	κ	**2.34**	**2.81**	**4.66**	**5.74**	**7.50**	**8.46**	**10.67**	**11.01**	**12.62**

Tabelle 3.3 Die Eigenwerte $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ und Konditionszahlen κ der Steifigkeitsmatrizen des gemäß (3.11) auf dünnen Gittern $\tilde{G}_n^{(2)}$ diskretisierten Konvektions-Diffusions-Operators (3.24)

3.6 Numerische Ergebnisse

Dieses Kapitel soll mit ersten numerischen Ergebnissen schließen, die die Güte der vorgestellten Diskretisierung (3.11) beleuchten sollen. Um den Approximationsfehler bewerten zu können, werden zunächst verschiedene diskrete Normen eingeführt. Diese werden nur im Gebietsinneren betrachtet, da hier ausnahmslos Dirichlet-Probleme behandelt werden. Hierbei bezeichne $\mathbf{Q} :=]0,1[^d$ das Grundgebiet. Sodann werden verschiedene numerische Beispiele betrachtet: zunächst eine einfache homogene Diffusionsgleichung, anhand der ein direkter Vergleich der Diskretisierung (3.10) nach [Pflaum, 1996], der Diskretisierung (3.11) und der einfachen Diskretisierung der Laplacegleichung (3.7) nach [Bungartz, 1992] und [Balder, 1994] durchgeführt werden kann. Des weiteren wird die Diskretisierung (3.11) in einem höherdimensionalen Fall und zwei Beispielen mit unstetigen Diffusionskoeffizienten untersucht.

3.6.1 Berechnung der Approximationsfehler

Die exakte Lösung des jeweiligen Modellproblems werde mit $u^{(d)}$ bezeichnet und die Finite-Elemente-Lösung auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$ mit $\tilde{u}_n^{(d)}$. Dann werden als Fehler die folgenden Differenzen definiert:

$$\begin{aligned} e_{n,\mathrm{lin}}^{(d)} &:= u^{(d)} - \mathrm{I}_{\tilde{G}_n^{(d)}}^{\mathrm{lin}}(u^{(d)}) \,, \\ \tilde{e}_n^{(d)} &:= \mathrm{I}_{\tilde{G}_n^{(d)}}^{\mathrm{lin}}(u^{(d)}) - \tilde{u}_n^{(d)} \,, \\ e_{n,m}^{(d)} &:= \mathrm{I}_{G_m^{(d)}}^{\mathrm{lin}}(u^{(d)}) - \mathrm{I}_{G_m^{(d)}}^{\mathrm{lin}}(\tilde{u}_n^{(d)}) \,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Mit $e_{n,\mathrm{lin}}^{(d)}$ wird also der reine *Interpolationsfehler* auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$ bezeichnet, die anderen Fehlerfunktionen beziehen sich auf den *Diskretisierungsfehler*. Hierbei bezeichnet $\tilde{e}_n^{(d)}$ den Fehler direkt auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$ der Tiefe n (Dünngitter-Interpolant der exakten Lösung minus die Finite-Elemente-Lösung auf dem dünnen Gitter), $e_{n,m}^{(d)}$ den Fehler auf dem vollen Gitter $G_m^{(d)}$ der Tiefe m, der entsteht, wenn man die Finite-Elemente-Lösung $\tilde{u}_n^{(d)}$ des dünnen Gitters $\tilde{G}_n^{(d)}$ der Tiefe n auf das volle Gitter $G_m^{(d)}$ der Tiefe m interpoliert und dann vom Vollgitter-Interpolanten der exakten Lösung abzieht. In aller Regel ist $m \geq n$. Im Fall $m = \infty$ erhält man die exakte Fehlerfunktion

$$e_{n,\infty}^{(d)} = u^{(d)} - \mathrm{I}_{G_\infty^{(d)}}^{\mathrm{lin}}(\tilde{u}_n^{(d)})$$

für den Diskretisierungsfehler.

Der Fehler $e_{n,m}^{(d)}$ wird insbesondere benötigt, um den Diskretisierungsfehler in den Integralnormen wie L_2-Norm, Energienorm, H^1-Norm zu messen. Da die Fehlernorm zumeist auch nur numerisch approximiert werden kann, ist es dann besonders wichtig, die exakte Lösung $u^{(d)}$ möglichst genau darzustellen. Hier wäre $m = \infty$ optimal, dies ist aber natürlich i. a. nicht durchführbar.

Beispiel:

Für die Funktion $u^{(2)}(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ ist in Abbildung 3.10 der Dünngitter-Interpolant der Tiefe 2 gezeigt, ebenso wie der (exakte) Interpolationsfehler $e_{2,\mathrm{lin}}^{(2)}$. Dieser ist in den Dünngitter-Punkten null, in den restlichen Gitterpunkten des vollen Gitters gleicher Tiefe $G_2^{(2)}$ ist er klein, und dazwischen wird er am größten. Um den Fehler für eine numerische Berechnung hinreichend genau darzustellen, muß man ihn wenigstens auf das nächst feinere volle Gitter $G_{n+1}^{(2)} = G_3^{(2)}$ interpolieren.

Auf dem vollen Gitter der Tiefe m werden nun folgende diskrete Normen definiert:

$$\begin{aligned} ||e_{n,m}^{(d)}||_{\max} &:= \max_{i \in G_m^{(d)} \cap \mathbf{Q}} |e_{n,m}^{(d)}(i)| \,, \\ ||e_{n,m}^{(d)}||_{l2} &:= \left(\frac{1}{N_m^{(d)}} \sum_{i \in G_m^{(d)} \cap \mathbf{Q}} |e_{n,m}^{(d)}(i)|^2 \right)^{1/2} , \\ |e_{n,m}^{(d)}|_{h1} &:= \left(\int_{\mathbf{Q}} (\nabla e_{n,m}^{(d)}(\underline{x}))^2 \, d\underline{x} \right)^{1/2} , \\ ||e_{n,m}^{(d)}||_a &:= \left(a_{G_n^{(d)}}^D (e_{n,m}^{(d)}, e_{n,m}^{(d)}) \right)^{1/2} . \end{aligned} \tag{3.26}$$

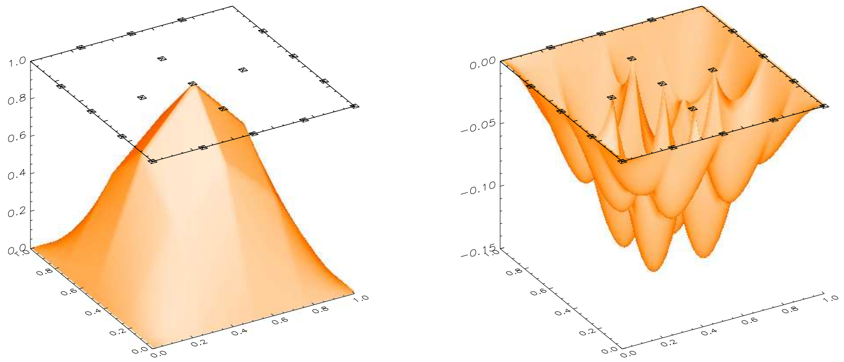


Abb. 3.10 Links der Dünngitter-Interpolant $\mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}^{(d)}_2}(\sin(\pi x)\sin(\pi y))$ der Tiefe 2, rechts der zugehörige Interpolationsfehler $-e^{(d)}_{n,\mathrm{lin}} := \mathrm{I}^{\mathrm{lin}}_{\tilde{G}^{(d)}_n}(u^{(d)}) - u^{(d)}$

Hier steht $N^{(d)}_m$ für die Anzahl der inneren Punkte des vollen Gitters $G^{(d)}_m$. Die H^1-Norm wird in ihre Teile L_2-Norm und Halbnorm $|\cdot|_{h1}$ aufgespalten betrachtet.

Aus Rechenzeit- und Speicherplatzgründen kann der Fehler $e^{(d)}_{n,m}$ nicht beliebig genau berechnet werden. In der Regel wird $m = n + 1$ gewählt – im 2D-Fall wird bis maximal $m = 9$, im 3D-Fall bis $m = 6$ verfeinert. Da es bei den folgenden Untersuchungen überwiegend auf das asymptotische Verhalten der einzelnen Fehler ankommt, werden obige diskrete Normen analog auch für den Fehler $\tilde{e}^{(d)}_n$, der direkt auf dem dünnen Gitter lebt, berechnet. Also etwa

$$||\tilde{e}^{(d)}_n||_{\max} := \max_{i \in \tilde{G}^{(d)}_n \cap \mathbf{Q}} |\tilde{e}^{(d)}_n(i)| \quad \text{und} \quad ||\tilde{e}^{(d)}_n||_{l2} := \left(\frac{1}{\tilde{N}^{(d)}_n} \sum_{i \in \tilde{G}^{(d)}_n \cap \mathbf{Q}} |\tilde{e}^{(d)}_n(i)|^2 \right)^{1/2},$$

wobei $\tilde{N}^{(d)}_n$ für die Anzahl der inneren Punkte des dünnen Gitters steht (vgl. [Bungartz, 1992], Satz 3.1, S. 17f).

Als ein Maß für die Abnahme der Fehlernormen bei wachsender Tiefe n wird das Verhältnis der jeweiligen Fehlernormen bei $n-1$ und n verwendet. Die Bezeichnungen seien für den Fehler $e^{(d)}_{n,n+1}$ auf dem vollen Gitter

$$\rho_{\max} := \frac{||e^{(d)}_{n-1,n}||_{\max}}{||e^{(d)}_{n,n+1}||_{\max}}, \quad \rho_{l2}\,,\ \rho_{h1}\,,\ \rho_a \ \text{analog}$$

und den Fehler $\tilde{e}^{(d)}_n$ auf dem dünnen Gitter

$$\tilde{\rho}_{\max} := \frac{||\tilde{e}^{(d)}_{n-1}||_{\max}}{||\tilde{e}^{(d)}_n||_{\max}}, \quad \tilde{\rho}_{l2}\,,\ \tilde{\rho}_{h1}\,,\ \tilde{\rho}_a \ \text{analog.}$$

3.6.2 Homogene Diffusionsgleichung in 2D

Betrachtet wird die homogene Diffusionsgleichung

$$\nabla \cdot \left(A(\underline{x})(\nabla u)^T\right) = 0 \quad \text{in }]0,1[^2, \tag{3.27}$$

mit dem variablen Diffusionskoeffizienten

$$A(\underline{x}) = (\cos(\pi x_1)\cosh(\pi x_2)/\cosh(\pi) + 2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Randwerte sind so gesetzt, daß sich als exakte Lösung

$$u(x_1, x_2) = \sin(\pi x_1)\sinh(\pi x_2)/\sinh(\pi) \tag{3.28}$$

ergibt. Das Beispiel ist zusätzlich so gewählt, daß sich für die Laplacegleichung

$$\triangle u = 0 \tag{3.29}$$

die selbe Lösung einstellt.

Dieses erste Beispiel wird etwas ausführlicher besprochen. Dazu sind in den Tabellen 3.4 bis 3.9 die resultierenden Fehlernormen der einzelnen Diskretisierungen aus Abschnitt 3.2.2 dokumentiert – und zwar jeweils sowohl die Fehlernormen direkt auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(2)}$ als auch auf dem jeweils nächst feineren vollen Gitter $G_{n+1}^{(2)}$. Da das Beispiel hier so gewählt ist, daß sich bei gleicher rechter Seite ($= 0$) und nur verändertem Differentialoperator in (3.27) und (3.29) jeweils die gleiche Lösungsfunktion ergibt, können die Ergebnisse der diskretisierten Laplacegleichung (3.29) gut mit den Ergebnissen der diskretisierten Diffusionsgleichung (3.27) verglichen werden. Insbesondere können die Einflüsse der Integrationsfehler bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix der Diffusionsgleichung (3.27) gemäß (3.10) bzw. (3.11) untersucht werden, da im Laplacefall die Steifigkeitsmatrix im Ansatzraum exakt bestimmt wird.

Zunächst werden in den Tabellen 3.4 (Fehler auf dem dünnen Gitter) und 3.5 (Fehler auf das nächst feinere volle Gitter interpoliert) die Ergebnisse der auf dünnen Gittern diskretisierten Laplacegleichung aufgeführt. Die Fehlerquotienten $\tilde{\rho}_{h1}$ und ρ_{h1} weisen deutlich auf eine $O(h)$-Konvergenz des H^1-Fehlers hin, wie sie auch schon in [Bungartz, 1992] bewiesen wurde. Die Maximumnorm verhält sich ebenfalls wie erwartet von der Ordnung $O(h^2|\log h|)$, die L_2-Norm hingegen weist sogar bezüglich des logarithmischen Anteils auf eine günstigere Konvergenzordnung hin. Des weiteren stimmt das Konvergenzverhalten der Fehlernormen (illustriert durch die jeweiligen Fehlerquotienten) auf dem dünnen Gitter mit dem auf dem nächst feineren vollen Gitter recht gut überein.

Die Tabellen 3.6 und 3.7 enthalten die Ergebnisse der mittels (3.11) auf dünnen Gittern diskretisierten Diffusionsgleichung (3.27). Ähnlich wie im Laplacefall weisen hier die diskreten Fehlernormen des Maximum- und L_2-Fehlers auf die erwarteten Konvergenzordnungen hin: jeweils $O(h^2|\log h|)$. In der H^1- und Energienorm ergibt sich eine $O(h)$-Konvergenz. Die Maximum- und L_2-Fehlernormen gemessen auf dem vollen Gitter weisen ein leicht verzögertes Konvergenzverhalten auf.

Dazu zeigen die Tabellen 3.8 und 3.9 die Vergleichsergebnisse der nach [Pflaum, 1996] (vgl. (3.10)) auf dünnen Gittern diskretisierten Diffusionsgleichung (3.27). Man erkennt eine gute Übereinstimmung der Maximum- und L_2-Fehler mit den Werten aus den Tabellen 3.6 und 3.7, ebenso zeigt sich auch hier ein leicht verzögertes Konvergenzverhalten bei den auf den vollen Gittern gemessenen Fehlernormen.[9]

[9] Die Energie- und H^1-Fehlernormen können hier nicht angegeben werden, da sie im entsprechenden Programm nicht implementiert sind.

n	#Punkte	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{\max}$	$\tilde{\rho}_{\max}$	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{l2}$	$\tilde{\rho}_{l2}$	$\|\tilde{e}_n^{(2)}\|_a = \|\tilde{e}_n^{(2)}\|_{h1}$	$\tilde{\rho}_a = \tilde{\rho}_{h1}$
2	21	3.50e-02	—	2.02e-02	—	7.55e-02	—
3	49	1.35e-02	2.59	5.46e-03	3.70	4.19e-02	1.80
4	113	4.53e-03	2.99	1.45e-03	3.77	2.19e-02	1.91
5	257	1.37e-03	3.30	3.78e-04	3.83	1.12e-02	1.96
6	577	4.26e-04	3.22	9.77e-05	3.87	5.62e-03	1.98
7	1281	1.28e-04	3.32	2.51e-05	3.90	2.82e-03	1.99
8	2817	3.70e-05	3.46	6.40e-06	3.92	1.41e-03	2.00
9	6145	1.05e-05	3.52	1.63e-06	3.93	7.05e-04	2.00
10	13313	2.92e-06	3.60	4.15e-07	3.93	3.53e-04	2.00
11	28673	8.17e-07	3.57	1.05e-07	3.95	1.76e-04	2.01
12	61441	2.23e-07	3.66	2.67e-08	3.93	8.82e-05	2.00
13	131073	6.10e-08	3.66	6.78e-09	3.94	4.41e-05	2.00

Tabelle 3.4 Auf dem dünnen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen der nach [Bungartz, 1992] und [Balder, 1994] diskretisierten Laplacegleichung

n	#Punkte	$\|\|e_{n,n+1}^{(2)}\|\|_{\max}$	$\rho_{\max}$	$\|\|e_{n,n+1}^{(2)}\|\|_{l2}$	ρ_{l2}	$\|e_{n,n+1}^{(2)}\|_a = \|e_{n,n+1}^{(2)}\|_{h1}$	$\rho_a = \rho_{h1}$
2	21	4.69e-02	—	1.73e-02	—	1.41e-01	—
3	49	1.88e-02	2.49	4.56e-03	3.79	7.51e-02	1.88
4	113	6.64e-03	2.83	1.17e-03	3.90	3.82e-02	1.97
5	257	2.10e-03	3.16	2.97e-04	3.94	1.92e-02	1.99
6	577	6.12e-04	3.43	7.53e-05	3.94	9.60e-03	2.00
7	1281	1.78e-04	3.44	1.90e-05	3.96	4.80e-03	2.00
8	2817	5.10e-05	3.49	4.80e-06	3.96	2.40e-03	2.00

Tabelle 3.5 Auf dem nächst feineren vollen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen der nach [Bungartz, 1992] und [Balder, 1994] diskretisierten Laplacegleichung

Da zur Gewinnung von theoretischen Aussagen über die Konvergenzordnung meist der Interpolant als Vergleichsfunktion herangezogen wird, soll diese tabellarische Ergebnissammlung mit Tabelle 3.10 abgerundet werden, die zur Lösungsfunktion (3.28) die Fehler der reinen Dünngitter-Interpolation auflistet – gemessen wieder auf dem jeweils nächst feineren vollen Gitter. Die einzelnen Fehlernormen unterscheiden sich – wie zu erwarten war – auch hier nur wenig von denen der jeweiligen diskreten Lösungen der elliptischen Gleichungen (3.27) und (3.29). Insbesondere wird wie gefordert der Energienorm-Fehler des Interpolanten von denen der jeweiligen diskreten Lösungen unterschritten.

Ein graphischer Vergleich der Fehlernormen der verschiedenen Diskretisierungen ist in den Abbildungen 3.11 und 3.12 dargestellt. Abbildung 3.11 zeigt den Vergleich der H^1-Fehlernormen der diskretisierten Laplacegleichung (3.29) mit der gemäß (3.11) diskretisierten Diffusionsgleichung (3.27): Sowohl die direkt auf dem dünnen Gitter gemessenen, als auch die auf dem nächst feineren vollen Gitter gemessenen H^1-Fehlernormen unterscheiden sich jeweils nur wenig voneinander und zeigen einen deutlichen Konvergenzverlauf der Ordnung $O(h)$.

n	#Punkte	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{\max}$	$\tilde{\rho}_{\max}$	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{l2}$	$\tilde{\rho}_{l2}$	$\|\tilde{e}_n^{(2)}\|_{h1}$	$\tilde{\rho}_{h1}$	$\|\tilde{e}_n^{(2)}\|_a$	$\tilde{\rho}_a$
2	21	3.44e-02	—	2.14e-02	—	8.19e-02	—	1.19e-01	—
3	49	1.55e-02	2.22	5.98e-03	3.58	4.74e-02	1.73	6.92e-02	1.71
4	113	6.07e-03	2.55	1.68e-03	3.56	2.58e-02	1.84	3.77e-02	1.84
5	257	2.05e-03	2.96	4.64e-04	3.62	1.35e-02	1.91	1.96e-02	1.92
6	577	6.29e-04	3.26	1.26e-04	3.68	6.87e-03	1.96	9.97e-03	1.97
7	1281	1.84e-04	3.42	3.33e-05	3.78	3.46e-03	1.99	5.02e-03	1.99
8	2817	5.71e-05	3.22	8.73e-06	3.81	1.73e-03	2.00	2.51e-03	2.00
9	6145	1.66e-05	3.44	2.27e-06	3.85	8.67e-04	2.00	1.26e-03	2.00
10	13313	4.76e-06	3.49	5.85e-07	3.88	4.34e-04	2.00	6.29e-04	2.00
11	28673	1.33e-06	3.58	1.50e-07	3.89	2.17e-04	2.00	3.15e-04	2.00
12	61441	3.71e-07	3.59	3.85e-08	3.90	1.08e-04	2.00	1.57e-04	2.00
13	131073	1.03e-07	3.61	9.88e-09	3.90	5.42e-05	2.00	7.86e-05	2.00

Tabelle 3.6 Auf dem dünnen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen der gemäß (3.11) diskretisierten Diffusionsgleichung (3.27)

n	#Punkte	$\|\|e_{n,n+1}^{(2)}\|\|_{\max}$	$\rho_{\max}$	$\|\|e_{n,n+1}^{(2)}\|\|_{l2}$	ρ_{l2}	$\|e_{n,n+1}^{(2)}\|_{h1}$	ρ_{h1}	$\|e_{n,n+1}^{(2)}\|_a$	ρ_a
2	21	4.97e-02	—	1.80e-02	—	1.46e-01	—	2.08e-01	—
3	49	1.98e-02	2.51	5.28e-03	3.41	7.94e-02	1.84	1.12e-01	1.86
4	113	7.44e-03	2.66	1.70e-03	3.11	4.13e-02	1.92	5.81e-02	1.93
5	257	2.79e-03	2.67	5.66e-04	3.00	2.10e-02	1.97	2.95e-02	1.97
6	577	9.78e-04	2.85	1.84e-04	3.08	1.06e-02	1.98	1.48e-02	1.99
7	1281	3.34e-04	2.93	5.74e-05	3.21	5.32e-03	1.99	7.43e-03	1.99
8	2817	1.10e-04	3.04	1.74e-05	3.30	2.66e-03	2.00	3.72e-03	2.00

Tabelle 3.7 Auf dem nächst feineren vollen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen der gemäß (3.11) diskretisierten Diffusionsgleichung (3.27)

In Abbildung 3.12 sind die Verläufe der Maximumfehler aller drei Diskretisierungen in ähnlicher Weise visualisiert. Man erkennt jeweils, daß der Maximumfehler der Diskretisierung der Laplacegleichung am geringsten ist, sich jedoch nicht stark von den Maximumfehlern der beiden Diskretisierungen der Diffusionsgleichung unterscheidet. Der Abstand zwischen letzteren ist jeweils noch geringer, was darauf hinweist, daß sich die zusätzliche Vereinfachung der Bilinearform im Schritt von (3.10) nach (3.11) nicht wesentlich auf die Genauigkeit auswirkt.

Zur Vervollständigung der Betrachtungen sind in Abbildung 3.13 die Lösungsfunktion und die Fehlerfunktion $\tilde{e}_5^{(2)}$ der Diskretisierung der Laplacegleichung gezeigt, sowie die jeweiligen Fehlerfunktionen $\tilde{e}_5^{(2)}$ und $e_{5,6}^{(2)}$ der Diskretisierungen der Diffusionsgleichung (3.27) gemäß (3.11) bzw. [Pflaum, 1996]. Die Fehler der letzten beiden Diskretisierungen unterscheiden sich kaum voneinander.

n	#Punkte	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{\max}$	$\tilde{\rho}_{\max}$	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{l2}$	$\tilde{\rho}_{l2}$
2	21	3.48e-02	—	1.00e-02	—
3	49	1.34e-02	2.60	3.32e-03	3.01
4	113	5.19e-03	2.58	1.01e-03	3.28
5	257	1.74e-03	2.99	2.92e-04	3.47
6	577	5.33e-04	3.26	8.08e-05	3.61
7	1281	1.54e-04	3.46	2.18e-05	3.71
8	2817	4.75e-05	3.24	5.78e-06	3.77
9	6145	1.39e-05	3.42	1.52e-06	3.81
10	13313	3.97e-06	3.50	3.95e-07	3.84
11	28673	1.11e-06	3.57	2.90e-08	3.86
12	61441	3.09e-07	3.60	2.64e-08	3.87
13	131073	8.56e-08	3.61	6.80e-09	3.88

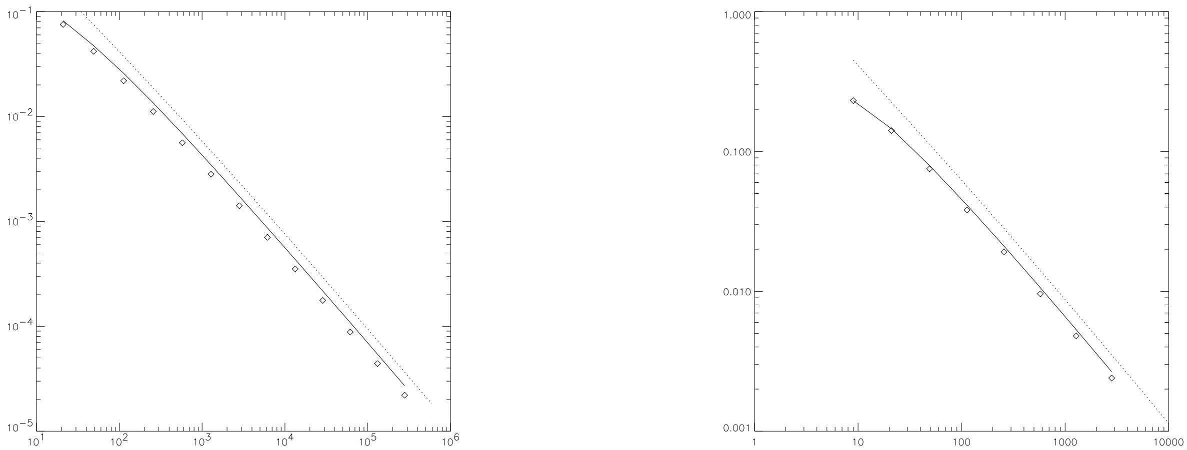
Tabelle 3.8 Auf dem dünnen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen der nach [Pflaum, 1996] diskretisierten Diffusionsgleichung (3.27)

n	#Punkte	$\|\|e_{n,n+1}^{(2)}\|\|_{\max}$	$\rho_{\max}$	$\|\|e_{n,n+1}^{(2)}\|\|_{l2}$	ρ_{l2}
2	21	7.03e-02	—	1.81e-02	—
3	49	1.96e-02	3.59	4.86e-03	3.72
4	113	6.86e-03	2.86	1.42e-03	3.42
5	257	2.30e-03	2.98	4.41e-04	3.22
6	577	8.01e-04	2.87	1.38e-04	3.20
7	1281	2.62e-04	3.06	4.25e-05	3.25
8	2817	8.41e-05	3.16	1.27e-05	3.35

Tabelle 3.9 Auf dem nächst feineren vollen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen der nach [Pflaum, 1996] diskretisierten Diffusionsgleichung (3.27)

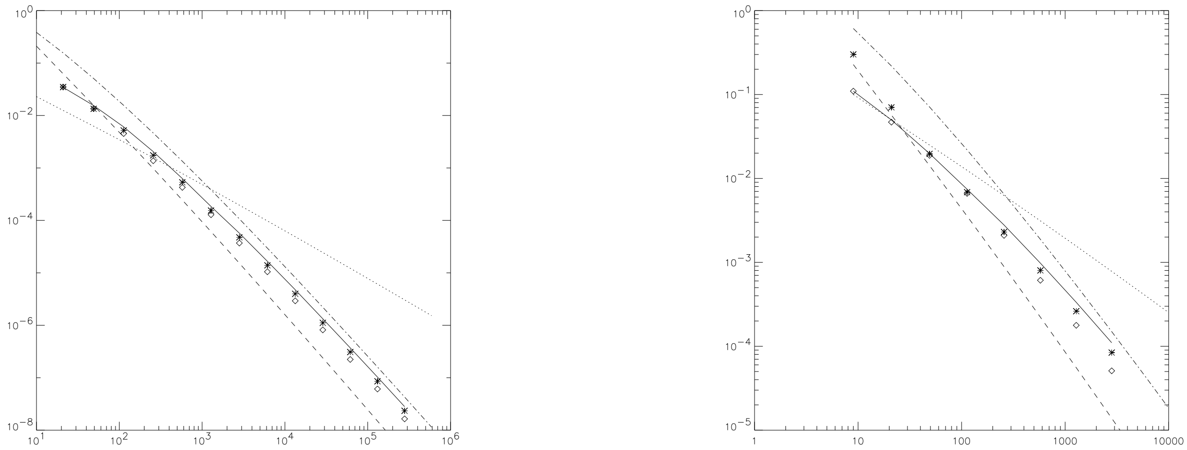
n	#Punkte	$\|\|e_{n,\text{lin}}^{(2)}\|\|_{\max}$	$\rho_{\max}$	$\|\|e_{n,\text{lin}}^{(2)}\|\|_{l2}$	ρ_{l2}	$\|e_{n,\text{lin}}^{(2)}\|_{h1}$	ρ_{h1}	$\|e_{n,\text{lin}}^{(2)}\|_{a}$	ρ_a
2	21	5.26e-02	—	1.72e-02	—	1.56e-01	—	2.20e-01	—
3	49	2.22e-02	2.37	5.67e-03	3.03	8.51e-02	1.83	1.20e-01	1.83
4	113	7.53e-03	2.95	1.84e-03	3.09	4.39e-02	1.94	6.21e-02	1.94
5	257	2.63e-03	2.86	5.75e-04	3.19	2.22e-02	1.98	3.13e-02	1.98
6	577	8.07e-04	3.25	1.75e-04	3.29	1.11e-02	1.99	1.57e-02	1.99
7	1281	2.46e-04	3.28	5.16e-05	3.38	5.56e-03	2.00	7.87e-03	2.00
8	2817	7.28e-05	3.38	1.50e-05	3.45	2.78e-03	2.00	3.94e-03	2.00

Tabelle 3.10 Auf dem nächst feineren vollen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen des Interpolationsfehlers des Dünngitter-Interpolanten von (3.28)



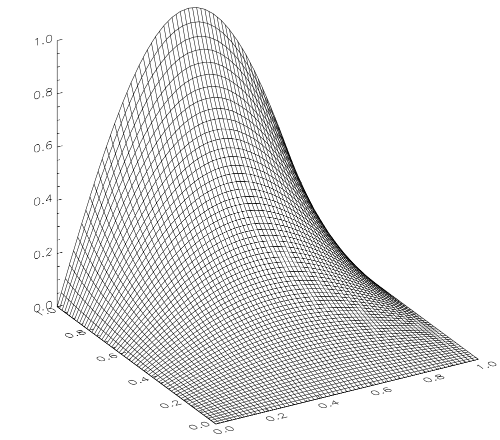
Legende: —— H^1-Fehler der gemäß (3.11) diskretisierten Gleichung (3.27)
◇◇◇◇ H^1-Fehler der diskretisierten Laplacegleichung
.... Referenzkurve zur Konvergenzordnung $O(h)$

Abb. 3.11 H^1-Fehlernormen der Diskretisierung der Laplacegleichung und der Diffusionsgleichung (3.27) gemäß (3.11) im Vergleich: links die Fehler auf dem dünnen Gitter gemessen, rechts die auf dem nächst feineren vollen Gitter gemessenen

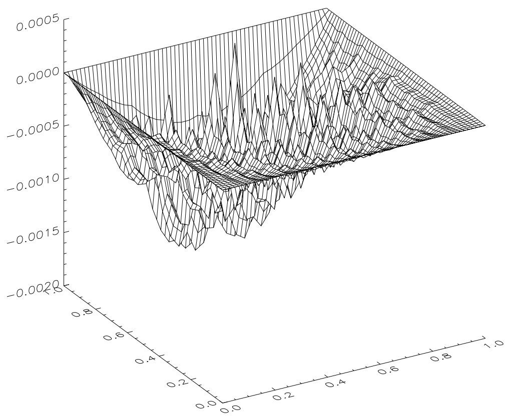


Legende: —— Maximumfehler der gemäß (3.11) diskretisierten Gleichung (3.27)
****Maximumfehler der gemäß (3.10) diskretisierten Gleichung (3.27)
◇◇◇◇ Maximumfehler der diskretisierten Laplacegleichung
.... Referenzkurve zur Konvergenzordnung $O(h)$
-.-.-. Referenzkurve zur Konvergenzordnung $O(h^2|\log h|)$
- - - - Referenzkurve zur Konvergenzordnung $O(h^2)$

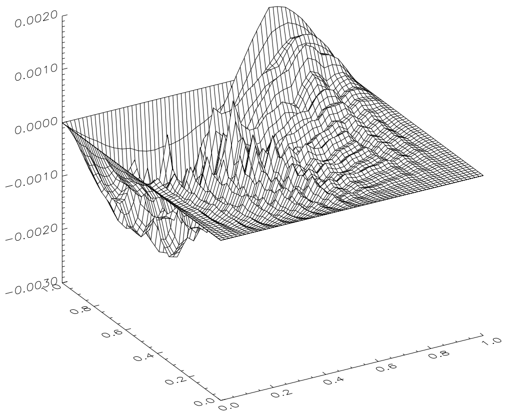
Abb. 3.12 Maximumfehler der drei Diskretisierungen im Vergleich: links die Fehler auf dem dünnen Gitter gemessen, rechts die auf dem nächst feineren vollen Gitter gemessenen



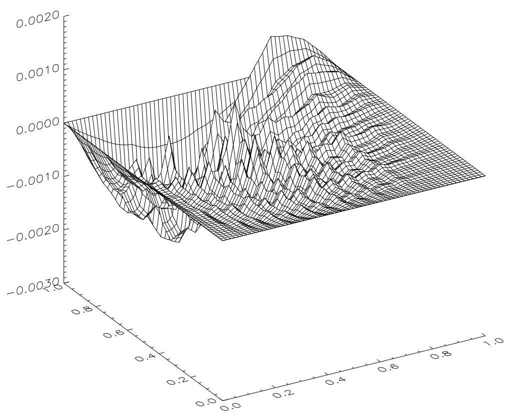
Lösungsfunktion (3.28)



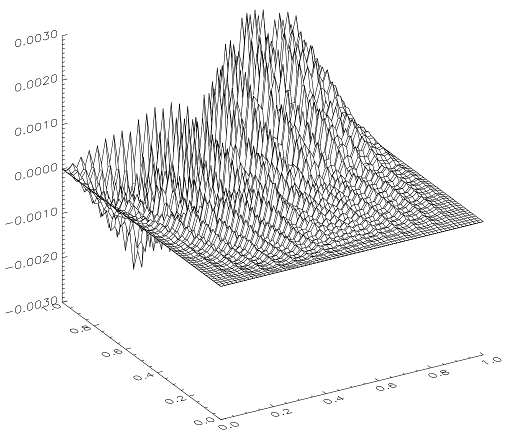
$\tilde{e}_5^{(2)}$ zur Laplacegleichung



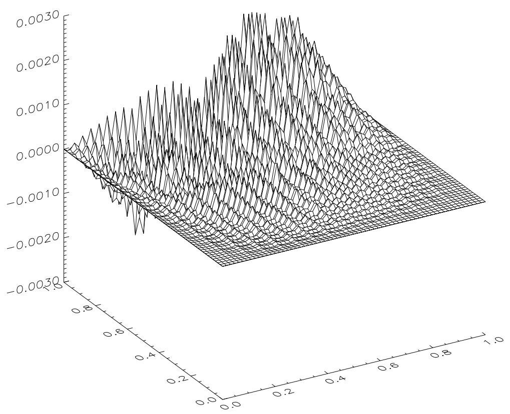
$\tilde{e}_5^{(2)}$ zur Diffusionsgleichung (3.27)
nach (3.11)



$\tilde{e}_5^{(2)}$ zur Diffusionsgleichung (3.27)
nach [Pflaum, 1996]



$e_{5,6}^{(2)}$ zur Diffusionsgleichung (3.27)
nach (3.11)



$e_{5,6}^{(2)}$ zur Diffusionsgleichung (3.27)
nach [Pflaum, 1996]

Abb. 3.13 Vergleich der verschiedenen Fehlerfunktionen

n	#Punkte	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{\max}$	$\tilde{\rho}_{\max}$	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{l2}$	$\tilde{\rho}_{l2}$	$\|\tilde{e}_n^{(2)}\|_{h1}$	$\tilde{\rho}_{h1}$	$\|\tilde{e}_n^{(2)}\|_a$	$\tilde{\rho}_a$
2	81	1.39e-01	—	7.08e-02	—	1.55e-01	—	3.25e-01	—
3	225	7.61e-02	1.83	3.10e-02	2.28	1.11e-01	1.39	2.29e-01	1.42
4	593	3.08e-02	2.47	1.20e-02	2.57	6.89e-02	1.62	1.43e-01	1.61
5	1505	1.14e-02	2.71	4.24e-03	2.84	3.86e-02	1.79	8.03e-02	1.77
6	3713	4.07e-03	2.80	1.41e-03	3.01	2.05e-02	1.88	4.28e-02	1.88
7	8961	1.33e-03	3.05	4.48e-04	3.14	1.06e-02	1.94	2.21e-02	1.94
8	21249	4.32e-04	3.08	1.39e-04	3.23	5.38e-03	1.97	1.12e-02	1.97
9	49665	1.37e-04	3.16	4.20e-05	3.30	2.71e-03	1.99	5.63e-03	1.99
10	114689	4.23e-05	3.24	1.25e-05	3.36	1.36e-03	1.99	2.82e-03	2.00

Tabelle 3.11 Auf dem dünnen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen der gemäß (3.11) diskretisierten Gleichung (3.30)

n	#Punkte	$\|\|e_{n,n+1}^{(2)}\|\|_{\max}$	$\rho_{\max}$	$\|\|e_{n,n+1}^{(2)}\|\|_{l2}$	ρ_{l2}	$\|e_{n,n+1}^{(2)}\|_{h1}$	ρ_{h1}	$\|e_{n,n+1}^{(2)}\|_a$	ρ_a
2	81	2.49e-01	—	9.18e-02	—	4.99e-01	—	1.05e-00	—
3	225	9.82e-02	2.54	3.10e-02	2.96	2.40e-01	2.08	5.01e-01	2.09
4	593	3.29e-02	2.99	1.04e-02	2.99	1.14e-01	2.11	2.35e-01	2.13
5	1505	1.18e-02	2.78	3.42e-03	3.04	5.52e-02	2.06	1.13e-01	2.08

Tabelle 3.12 Auf dem nächst feineren vollen Gitter gemessene diskrete Fehlernormen der gemäß (3.11) diskretisierten Gleichung (3.30)

3.6.3 Elliptische Differentialgleichung in 3D

Als zweites numerisches Beispiel dient die Gleichung

$$-\nabla \cdot (A(\nabla u)^T) + \nabla u \, \underline{b} + cu = f \tag{3.30}$$

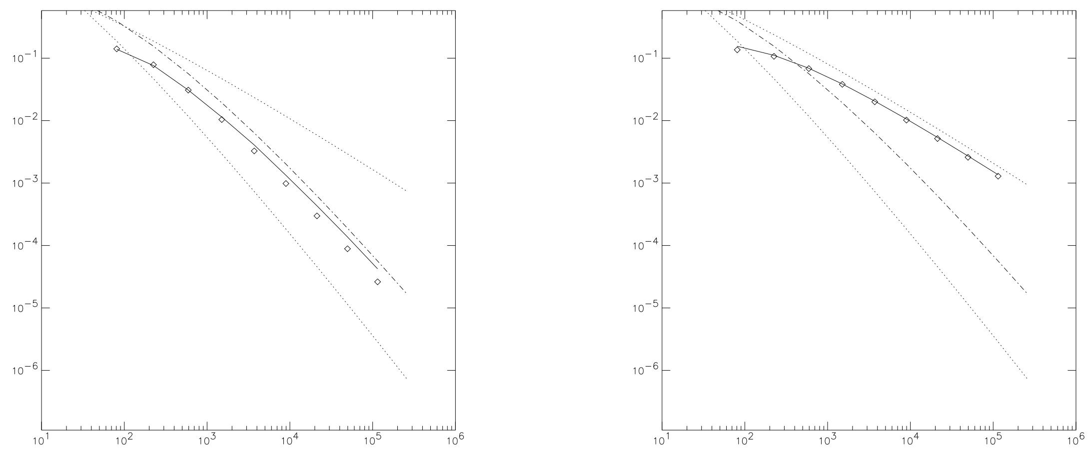
auf dem dreidimensionalen Einheitsintervall $]0,1[^3$. Hier werden sowohl variable Diffusions- als auch variable Konvektions- und Helmholtzkoeffizienten betrachtet:

$$\begin{aligned} A(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} 4+\sin(2\pi x_1)+\sin(2\pi x_2) & \sin(\pi x_1 x_2 x_3)/2 & x_1 x_2 \\ \sin(\pi x_1 x_2 x_3)/2 & 4+\sin(2\pi x_1 x_2) & 0 \\ x_1 x_2 & 0 & \begin{matrix} 4+\sin(2\pi x_1)+\sin(2\pi x_2) \\ +\sin(2\pi x_3) \end{matrix} \end{pmatrix}, \\ \underline{b}(\underline{x}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2+4(1-2x_2)\sin(2\pi x_1) \\ 3+4(1-2x_1)\cos(2\pi x_2 x_3) \end{pmatrix}, \quad c(\underline{x}) = 7+\sqrt{1+e^{x_1+x_2+x_3}}\,. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Die rechte Seite ist so gewählt, daß sich bei homogenen Randbedingungen folgende Lösung ergibt:

$$u(\underline{x}) = \sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\sin(\pi x_3)\,.$$

Die numerischen Ergebnisse sind in den Tabellen 3.11 und 3.12 angegeben, wobei aus Speicherplatzgründen die auf den jeweils nächst feineren vollen Gittern gemessenen Fehlernormen



Maximumfehler H^1-Fehler

Legende: —— Fehlerverlauf der gemäß (3.11) diskretisierten Gleichung (3.30)
◇◇◇◇ Fehlerverlauf der diskretisierten Poissongleichung
.... Referenzkurve zur Konvergenzordnung $O(h)$
-.-.-. Referenzkurve zur Konvergenzordnung $O(h^2|\log h|^2)$
- - - - Referenzkurve zur Konvergenzordnung $O(h^2)$

Abb. 3.14 Der Maximumfehler zeigt eine numerische Konvergenz der Ordnung $O(h^2|\log h|^2)$ (links), der H^1-Fehler der Ordnung $O(h)$ (rechts).

nur bis zur Tiefe fünf berechnet werden konnten. Auch bei diesem vollen elliptischen Operator weisen die Resultate deutlich auf die erwarteten Konvergenzordnungen hin: $O(h^2|\log h|^2)$ für die Maximum- und L_2-Norm und $O(h)$ für die Energie- und H^1-Norm. Dies unterstützt ebenfalls die Abbildung 3.14, in der die Fehlerverläufe zur Maximum- bzw. H^1-Norm dargestellt sind. Neben den jeweiligen Referenzkurven der erwarteten Konvergenzordnung sind zum Vergleich auch die Ergebnisse der Diskretisierung der einfachen Poissongleichung

$$-\triangle u = g$$

aufgeführt, bei der die rechte Seite g so gewählt ist, daß sich wieder die gleiche Lösung wie zur Gleichung (3.30) einstellt.

3.6.4 Unstetige Diffusionskoeffizienten

In Anlehnung an Abschnitt 3.4 werden hier zwei Beispiele mit unstetigen Koeffizienten betrachtet, bei denen die Lösungsfunktion längs der Unstetigkeitslinien eine verschwindende Ableitung besitzt.

Beim ersten wird die Diffusionsgleichung

$$-\nabla \cdot (k(x,y)A(x,y)\nabla u) = f \tag{3.32}$$

mit den Koeffizienten

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 4+\sin(2\pi x)+\sin(2\pi y) & 1+4y(1-y)\sin(2\pi x) \\ 1+4y(1-y)\sin(2\pi x) & 4+\sin(2\pi xy) \end{pmatrix},$$

$$k(x,y) = \begin{cases} 10\,, & x \le \frac{1}{2} \\ 1\,, & \frac{1}{2} < x \end{cases}$$

und der Lösung

$$u(x,y) = \frac{1}{k(x,y)} \sin(2\pi x)\sin(\pi y) \tag{3.33}$$

betrachtet (vgl. Abbildung 3.16, links). Als Berechnungsgitter werden sowohl reguläre dünne Gitter als auch sich adaptiv verfeinernde Gitter verwendet. Als Adaptionskriterium dienen die hierarchischen Überschüsse der approximierten Lösung. Bei der adaptiven Gitterverfeinerung wird wie folgt vorgegangen:

1.) Initialisiere das Startgitter der Tiefe 1 und berechne die zugehörige approximierte Lösung. Setze die Adaptionsschranke $\varepsilon := \varepsilon_0$.

2.) Vergleiche alle hierarchischen Überschüsse mit ε und verfeinere das Gitter entsprechend.

3.) Falls das Gitter verfeinert wurde, berechne die zugehörige approximierte Lösung neu und gehe zu 2.).
Falls das Gitter nicht verfeinert wurde, berechne die Fehlernormen und gehe zu 4.)

4.) Setze $\varepsilon := \varepsilon/4$. Wenn $\varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{end}}$ gehe zu 2.), sonst stoppe.

Die numerischen Ergebnisse zeigen, daß sich die Unstetigkeiten der Koeffizienten bei regulären und adaptiven Gittern nicht auf die Genauigkeit und das Konvergenzverhalten der Lösung auswirken, man vergleiche hierzu die Fehlerverläufe der L_2- und Energienorm-Fehler in Abbildung 3.15. Ebenso wird bei adaptiver Berechnung keine Verfeinerung in einer Umgebung der Unstetigkeitslinie benötigt, wie das adaptive Gitter zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-9}$ mit 26233 Punkten in Abbildung 3.17 zeigt. Auch die Fehlerfunktion über dem adaptiven Gitter zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-4}$ mit 577 Punkten hat keine Spitzen in der Nähe der Unstetigkeitslinie (vgl. Abbildung 3.16, rechts). Dies zeigt, daß die in Abschnitt 3.4 besprochenen Erweiterungen die Behandlung unstetiger Koeffizienten durch die Dünngitter-Diskretisierung (3.11) ermöglichen.

Beim zweiten Beispiel besitzt die Diffusionsgleichung (3.32) die Koeffizienten

$$A = \left(\frac{\cos(2\pi x)\cosh(2\pi(y-\frac{1}{2}))}{\cosh(\pi)} + 2\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = 0$$

und die Lösung

$$u(x,y) = \frac{0.001}{k(x,y)\sinh(\pi)} \sin(2\pi x)\sinh(2\pi(y-\tfrac{1}{2})) \tag{3.34}$$

(vgl. Abbildung 3.18, links). Die unstetige Funktion $k(x,y)$ springt diesmal stärker und in allen vier Quadranten von $\mathbf{Q}$:

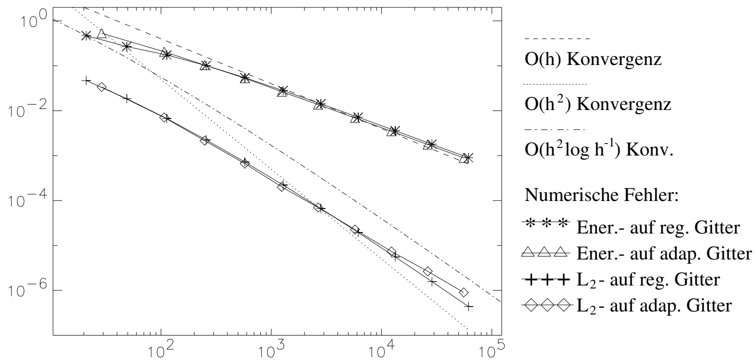


Abb. 3.15 Wie bei glatten Koeffizienten ergibt sich für das Problem (3.32) + (3.33) eine $O(h^2|\log h|)$-Konvergenz in der L_2-Norm und eine $O(h)$-Konvergenz in der Energienorm. Die Ergebnisse der Berechnungen auf regulären und adaptiven Gittern unterscheiden sich kaum.

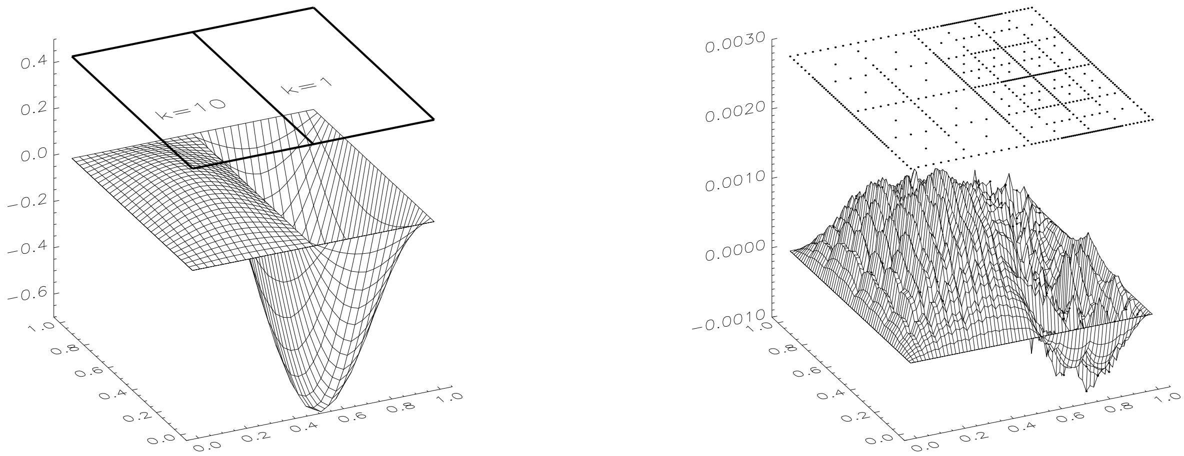


Abb. 3.16 Die Lösungsfunktion (3.33) über **Q** (links) und die Fehlerfunktion über dem adaptiven Gitter zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-4}$ mit 577 Punkten (rechts)

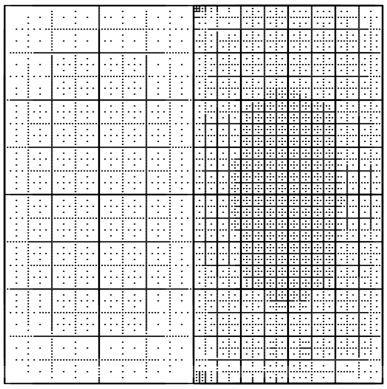


Abb. 3.17 Das adaptive Gitter zu $\varepsilon = 4^{-9}$ mit 26233 Punkten zur Lösung (3.33) weist keine Verfeinerung längs der Unstetigkeitslinie auf.

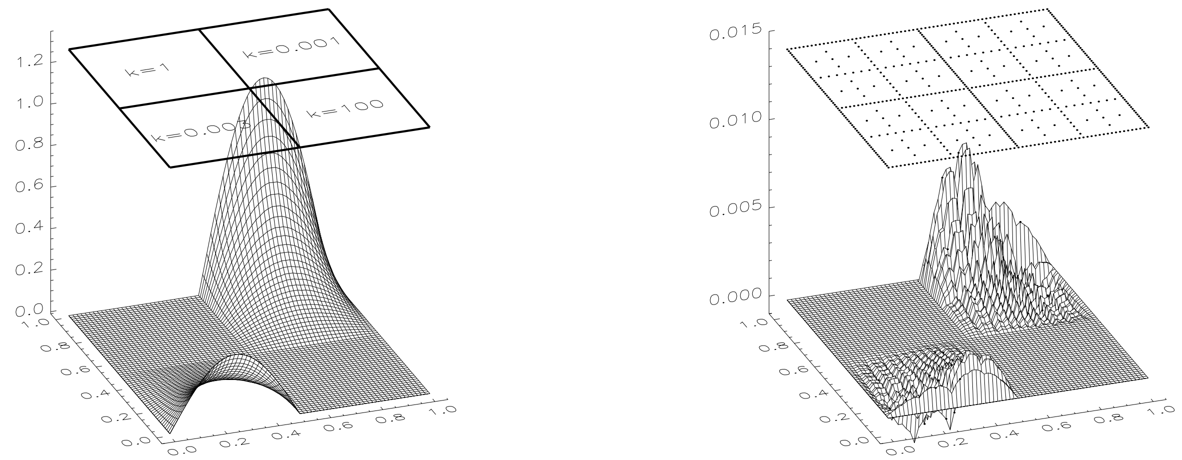


Abb. 3.18 Die Lösungsfunktion (3.34) über **Q** (links) und die Fehlerfunktion über dem regulären dünnen Gitter $\tilde{G}_6^{(2)}$ (rechts)

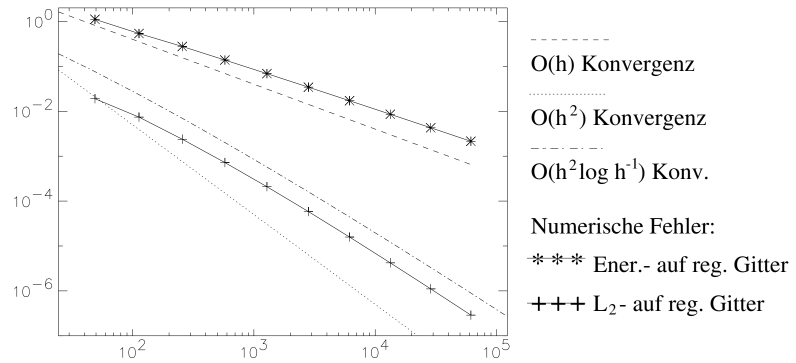


Abb. 3.19 Für das Problem (3.32) + (3.34) zeigt sich eine numerische Konvergenz von $O(h^2|\log h|)$ für den L_2-Fehler, $O(h)$ für den Energienorm-Fehler.

$$k(x,y) = \begin{cases} 0.003\,, & (x,y) \in [0,\frac{1}{2}]^2\,, \\ 100\,, & (x,y) \in]\frac{1}{2},1] \times [0,\frac{1}{2}]\,, \\ 0.001\,, & (x,y) \in]\frac{1}{2},1]^2\,, \\ 1\,, & (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times]\frac{1}{2},1]\,. \end{cases}$$

Für die numerischen Ergebnisse bei regulärer Gitterverfeinerung ergeben sich die gleichen Konvergenzresultate wie im Beispiel zuvor (vgl. Abbildungen 3.19 und 3.18, rechts).

4 Behandlung krummberandeter Gebiete

Die bisherigen Betrachtungen beschränkten sich auf das d-dimensionale Einheitsintervall. Die überwiegende Anzahl der Anwendungen jedoch bezieht sich auf kompliziertere Grundgebiete: etwa in der Strömungsmechanik bei der Umströmung von Autokarosserien und Flugzeugflügeln oder der Durchströmung von Kühlsystemen in Fahrzeugen und Kraftwerkseinheiten, um nur einen technischen Anwendungsbereich zu nennen.

Bei der Behandlung krummberandeter Gebiete wird im wesentlichen zwischen Methoden auf *unstrukturierten* Gittern und auf *strukturierten* Gittern unterschieden. Hier weisen sich unstrukturierte Gitter häufig durch eine große Flexibilität aus, aber gleichzeitig auch durch einen hohen Verwaltungsaufwand für die „Unstruktur". Dünne Gitter zählen zu den strukturierten Gittern, die jedoch durch ihre inhärente Adaptivität eine sonst eher unstrukturierten Gittern zugeordnete Eigenschaft tragen. Im folgenden werden nur Methoden für strukturierte Gitter besprochen.

Erste Schritte, allgemeinere Gebiete mit Dünngitter-Methoden zu behandeln, wurden etwa in [Balder & Zenger, 1996] unternommen, wo Gebiete behandelt werden, die durch Verkettung von zwei- bzw. dreidimensionalen Einheitsintervallen entstehen (Blockstrukturierung). Insbesondere werden dort elliptische Eigenwertprobleme auf einem L-Gebiet (in 2 D) und einem Würfel, aus dem ein Würfel halber Kantenlänge ausgespart wurde ($[0,1]^3 \backslash]0,\frac{1}{2}[^3$) (in 3 D), berechnet. In [Pflaum, 1992] wird eine Diskretisierung von zweidimensionalen Gebieten mit krummlinigen Berandungen untersucht, bei der die Umgebung des Gebietsrandes mit der Shortley-Weller-Methode diskretisiert wird. Dieser Ansatz führt jedoch im höherdimensionalen Fall ($d > 2$) auf Gitter mit mindestens $O((h^{-1})^{d-1})$ vielen Gitterpunkten, was den Vorteil der Dünngitter-Komplexität von $O(h^{-1}|\log h|^{d-1})$ vielen Gitterpunkten zerstört. In [Griebel & Thurner, 1993] werden allgemeinere Gebiete mit der Kombinationsmethode behandelt. Diese Methode ist eine andere Technik, partielle Differentialgleichungen auf dünnen Gittern zu behandeln. Die Gleichungen werden dabei nicht direkt auf dem dünnen Gitter diskretisiert, sondern auf im dünnen Gitter enthaltenen vollen Gittern mit verschiedenen Feinheiten in den Koordinatenrichtungen. Die berechneten „Teillösungen" werden dann per Superposition zu einer Dünngitter-Lösung kombiniert.

Der Ansatz, der im folgenden untersucht wird, stützt sich auf Transformationsmethoden, bei denen das ursprüngliche d-dimensionale Problemgebiet $\mathbf{P}$ (oft *physikalisches Gebiet* (engl. *physical domain*) genannt) auf das d-dimensionale Einheitsintervall $\mathbf{Q} :=]0,1[^d$ (Berechnungsgebiet (engl. *computational domain*) genannt) zurückgeführt wird.[1] Der Hauptgedanke dieser Vorgehensweise besteht darin, die Schwierigkeiten, die bei der Diskretisierung durch die krummlinigen Berandungen entstehen (z.B. Behandlung der Randbedingungen, Bilden von Gradienten in Randnähe), zu eliminieren. Durch die Transformation erhält man ein randangepaßtes krummliniges Koordinatensystem, auf dem etwa die Randbedingungen leicht approximiert werden können. Dies alles geschieht jedoch auf Kosten des zugrundeliegenden Differentialoperators,

[1] In den Anwendungen werden meist zwei- und dreidimensionale Problemgebiete betrachtet ($d \in \{2,3\}$).

der durch die Transformation komplizierter wird.[2] Des weiteren entstehen neue Quellen für Approximationsfehler in der diskreten Lösung, die neben der Gitterfeinheit h jetzt auch noch von den wechselnden Abständen der Gitterpunkte und der Nichtorthogonalität des neuen Gitters abhängen.

Eine naheliegende Voraussetzung an das Ausgangsgebiet $\mathbf{P}$ ist, daß es zusammenhängend ist, da das Problem sonst in disjunkte Teilprobleme zerfällt.[3] Zusätzlich werden die Betrachtungen auf einfach zusammenhängende Gebiete beschränkt, um die notwendigen Untersuchungen nicht durch zusätzliche Schwierigkeiten topologischer Natur zu belasten.

Auch an die Gebietstransformation müssen einige Bedingungen geknüpft werden. Zumindest sollte sie bijektiv sein, um z. B. zu vermeiden, daß sich Koordinatenlinien der gleichen Richtung berühren oder gar schneiden (Faltung des „Gitters“), oder daß Koordinatenlinien teilweise außerhalb des betrachteten Gebiets verlaufen. Im Abschnitt 4.2 werden Methoden zur Erzeugung solcher Gebietstransformationen besprochen, weitere findet man etwa in [Thompson, 1982], [Thompson et al., 1985], [Häuser & Taylor, 1986], [Arcilla et al., 1991] und [Knupp & Steinberg, 1993].

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die Ausgangsgleichung auf das Einheitsintervall transformiert, und es wird betrachtet, welche Auswirkungen dies auf die Koeffizienten der Gleichung hat.

4.1 Transformation der Ausgangsgleichung

Zu dem gegebenen einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^d$ mit den Koordinaten $\underline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_d)^T$ wird für die stetige und H_0^1-elliptische Bilinearform

$$\begin{aligned} a : H_0^1(\mathbf{P}) \times H_0^1(\mathbf{P}) &\to \mathbb{R}, \\ (u, v) &\mapsto \int_{\mathbf{P}} \nabla u\, A (\nabla v)^T + \nabla u\, \underline{b}\, v + ucv \, d\underline{\xi}, \end{aligned}$$

die schwache Formulierung der elliptischen Gleichung

$$a(u, v) = \int_{\mathbf{P}} f v \, d\underline{\xi} \qquad \forall v \in H_0^1(\mathbf{P}) \tag{4.1}$$

über $\mathbf{P}$ betrachtet. Für die Koeffizienten gelte jeweils

$$A \in (L^\infty(\mathbf{P}))^{d \times d}, \;\; \underline{b} \in (L^\infty(\mathbf{P}))^d, \;\; c \in L^\infty(\mathbf{P}), \;\; f \in L^2(\mathbf{P}) .$$

Dieses Problem wird nun behandelt, indem es auf ein Problem mit dem Einheitsintervall als Grundgebiet zurückgeführt wird. Dazu wird auf dem Gebiet $\mathbf{P}$ (physikalisches Gebiet) ein *verallgemeinertes* oder *randangepaßtes* Koordinatensystem eingeführt, was hier mit Hilfe einer

[2]Die Grundlage, einen allgemeinen, linearen, elliptischen Differentialoperator zweiter Ordnung auf dem Einheitsintervall mit Dünngitter-Methoden zu behandeln, wurde in Abschnitt 3.2 geliefert.

[3]Unter einem *Gebiet* werde auch im folgenden eine offene und zusammenhängende Menge verstanden.

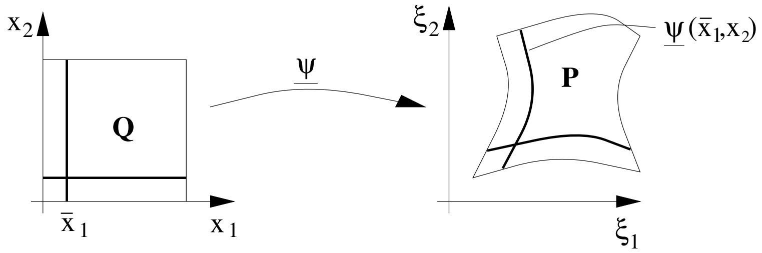


Abb. 4.1 Gebietstransformation in zwei Raumdimensionen

bijektiven C^1-Abbildung $\underline{\psi} : \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$, $\underline{x} \mapsto \underline{\xi} = \underline{\psi}(\underline{x})$ geschieht, die das Einheitsintervall in das Ausgangsgebiet überführt: $\underline{\psi}(\mathbf{Q}) = \mathbf{P}$. Die Koordinatenlinien des verallgemeinerten Koordinatensystems in $\mathbf{P}$ sind dann die Bilder der Koordinatenlinien $x_i = \text{const}$ in $\mathbf{Q}$ nach Anwendung von $\underline{\psi}$ (vgl. Abbildung 4.1).

Die Ausgangsgleichung (4.1) über dem Gebiet $\mathbf{P}$ wird nun durch Transformation in eine Gleichung über dem Einheitsintervall $\mathbf{Q}$ mit einem verallgemeinerten Koordinatensystem überführt. Für diese Transformation werden im wesentlichen zwei Formeln für reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ benötigt, zum einen die Kettenregel[4]

$$\nabla_{\underline{x}}(g \circ \underline{\psi}(\underline{x})) = ((\nabla_{\underline{\xi}} g) \circ \underline{\psi}(\underline{x})) \cdot J_{\underline{\psi}}(\underline{x})$$

$$\text{mit der Jacobimatrix} \quad J_{\underline{\psi}} = (\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j})_{i,j=1,..,d}\,,$$

sowie die Formel zur Integraltransformation

$$\int\limits_{\mathbf{P}} g(\underline{\xi})\, d\underline{\xi} = \int\limits_{\underline{\psi}^{-1}(\mathbf{P})=\mathbf{Q}} g(\underline{\psi}(\underline{x}))\,|\det J_{\underline{\psi}}(\underline{x})|\, d\underline{x}\,.$$

Bei der Integraltransformation muß für die Abbildung $\underline{\psi}$ gefordert werden, daß sie C^1-invertierbar ist (lokaler C^1-Diffeomorphismus), und somit insbesondere

$$\det J_{\underline{\psi}}(\underline{x}) \neq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbf{Q}$$

gilt.[5]

Damit erhält man die neue Bilinearform

$$a^* : H_0^1(\mathbf{Q}) \times H_0^1(\mathbf{Q}) \to \mathbb{R}\,,$$
$$a^*(\hat{u}, \hat{v}) := \int\limits_{\mathbf{Q}} \nabla \hat{u} A^* (\nabla \hat{v})^T + \nabla \hat{u}\, \underline{b}^* \hat{v} + c^* \hat{u}\, \hat{v} d\underline{x}\,,$$

wobei hier das Dach für die Verkettung einer Funktion steht

[4]Zur deutlicheren Unterscheidung wird an dieser Stelle zwischen $\nabla_{\underline{x}} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d})$ und $\nabla_{\underline{\xi}} = (\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_d})$ unterschieden.

[5]Die Formel zur Integraltransformation bleibt auch dann gültig, wenn die Voraussetzungen an $\underline{\psi}$ auf stückweise glatten $(d-1)$-dimensionalen Hyperflächen nicht erfüllt sind, solange dort die Funktion g und die Jacobideterminate $\det J_{\underline{\psi}}$ beschränkt bleiben.

$$\hat{g}(\underline{x}) := g \circ \underline{\psi}(\underline{x}) \,,$$

und die neuen, durch einen Stern gekennzeichneten Koeffizienten wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} A^*(\underline{x}) &:= J_{\underline{\psi}}^{-1}(\underline{x})\,(A \circ \underline{\psi}(\underline{x}))\,J_{\underline{\psi}}^{-T}(\underline{x})\,|\det J_{\underline{\psi}}(\underline{x})|\,, \\ \underline{b}^*(\underline{x}) &:= J_{\underline{\psi}}^{-1}(\underline{x})\,(\underline{b} \circ \underline{\psi}(\underline{x}))\,|\det J_{\underline{\psi}}(\underline{x})|\,, \\ c^*(\underline{x}) &:= (c \circ \underline{\psi}(\underline{x}))\,|\det J_{\underline{\psi}}(\underline{x})|\,, \quad f^*(\underline{x}) := (f \circ \underline{\psi}(\underline{x}))\,|\det J_{\underline{\psi}}(\underline{x})|\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Da die Abbildung $\underline{\psi}$ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus ist, ist die Bilinearform a^* ebenfalls H_0^1-elliptisch,[6] und die Sobolevräume $H_0^1(\mathbf{P})$ und $H_0^1(\mathbf{Q})$ sind bezüglich des Dachoperators $\hat{}$ zueinander äquivalent (vgl. [Wloka, 1982], Satz 4.1, S. 86). Somit ergibt sich aus der Lösung $u(\underline{\xi})$ der Gleichung (4.1) über $\mathbf{P}$ die Funktion $\hat{u}(\underline{x}) = u \circ \underline{\psi}(\underline{x})$ als Lösung der neuen elliptischen Gleichung

$$a^*(\hat{u}, \hat{v}) = \int\limits_{\mathbf{Q}} f^* \hat{v}\, d\underline{x} \qquad \forall \hat{v} \in H_0^1(\mathbf{Q}) \tag{4.3}$$

über dem Einheitsintervall $\mathbf{Q}$.

Die Lösung u des Ausgangsproblems (4.1) erhält man aus $\hat{u}$ schließlich durch

$$u(\underline{\xi}) = \hat{u} \circ \underline{\psi}^{-1}(\underline{\xi}) \,.$$

Bemerkungen:

a) Es gilt $a^*(\hat{u}, \hat{v}) = a(\hat{u} \circ \underline{\psi}^{-1}, \hat{v} \circ \underline{\psi}^{-1}) \quad \forall \hat{u}, \hat{v} \in H_0^1(\mathbf{Q})$.

b) Anstatt die elliptische Gleichung in ihrer schwachen Form (4.1) auf das Einheitsintervall zu transformieren, kann man die Variablentransformation auch an der Differentialgleichung $-\nabla \cdot (A(\nabla u)^T) + \nabla u\, \underline{b} + cu = f$ durchführen. Hier sind die Rechenschritte jedoch aufgrund der höheren Ableitungen weit aufwendiger, für die Koeffizienten ergeben sich aber die gleichen Formeln wie in (4.2) (vgl. [Knupp & Steinberg, 1993], S. 33ff, 152).

c) Zur Berechnung der transformierten Koeffizienten A^*, $\underline{b}^*$, c^* und f^* wird die Jacobimatrix der Gebietstransformation $\underline{\psi}$ benötigt, insbesondere also die partiellen Ableitungen $\partial\psi_i/\partial x_j,\ i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Ist $\underline{\psi}$ als Dünngitter-Funktion gespeichert, so können diese Ableitungen wie in Abschnitt 3.3 beschrieben numerisch auf dem dünnen Gitter berechnet werden. Für den zwei- und dreidimensionalen Fall kann dann die Inverse $J_{\underline{\psi}}^{-1}$ mit Hilfe der Adjunktenformel direkt berechnet werden.

4.2 Methoden zur Gittererzeugung

Hier werden drei verschiedene Methoden besprochen, zu einem vorgegeben Gebiet $\mathbf{P}$ eine Abbildung $\underline{\psi} : \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ zu finden, die eine Gebietstransformation von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{P}$ beschreibt.

[6] Die Bilinearform a^* ist insbesondere deshalb wieder H_0^1-elliptisch, da der neue Diffusionskoeffizient A^* aus A durch eine nichtsinguläre Äquivalenztransfomation hervorgeht.

Häufig wird in diesem Zusammenhang von *Methoden zur Gittererzeugung* gesprochen, obwohl hier weniger die jeweilige Lage der Gitterpunkte interessiert, sondern die Transformation $\underline{\psi}$ an sich von Interesse ist. In der Regel wird zwischen *elliptischen* und *nichtelliptischen* Methoden zur Gittererzeugung unterschieden. Bei elliptischen Methoden werden elliptische Randwertprobleme gelöst, die auf die neuen Koordinaten führen, bei nichtelliptischen Methoden können dies parabolische oder hyperbolische Differentialgleichungen sein, konforme Abbildungstechniken oder algebraische Methoden (Interpolation).

Da das dünne Gitter aus Betrachtungen zur Interpolationsgenauigkeit hervorgegangen ist – insbesondere ist auf ihm die stückweise d-lineare Interpolation mit hierarchischen Basen zu Hause – bieten sich Interpolationsmethoden zur Gittergenerierung hier in natürlicher Weise an. Diese werden in Abschnitt 4.2.1 behandelt. Die beiden Hauptvorteile dieser Methode sind die schnelle Berechnung der neuen Gitter und die Möglichkeit, die Lage innerer Gitterpunkte direkt kontrollieren zu können. Jedoch sind die erzeugten Gitter nicht immer glatt, insbesondere werden Knicke in den Randkurven ins Innere transportiert, die dann zu unstetigen Jacobimatrizen und -determinaten führen. Glatte Gitter erhält man dagegen bei elliptischen Methoden, die jedoch einen erhöhten Grad an Berechnungsaufwand beinhalten. Darauf wird in Abschnitt 4.2.2 eingegangen. In Abschnitt 4.2.3 wird dann eine hybride Vorgehensweise eingeführt, bei der wichtige Vorteile der beiden zuvor eingeführten Methoden vereint werden.

Abschließend werden in Abschnitt 4.3 numerische Experimente auf krummberandeten Gebieten durchgeführt und verschiedene Aspekte hervorgehoben.

4.2.1 Interpolationsmethoden zur Gittererzeugung

Der zweidimensionale Fall

Der allgemeinen Schreibweise Rechnung tragend und zur Vermeidung zu vieler Indizes werden hier (x_1, x_2) und (ξ_1, ξ_2) durch (x, y) und (ξ, η) ersetzt.

Das ebene Gebiet $\mathbf{P}$ werde durch seine vier parametrisierten Randkurven

$$\begin{aligned} &\underline{b_{x0}} : [0,1] \to \partial\mathbf{P}\,,\ x \mapsto \underline{b_{x0}}(x)\,, \quad \underline{b_{x1}} : [0,1] \to \partial\mathbf{P}\,,\ x \mapsto \underline{b_{x1}}(x)\,, \\ &\underline{b_{0y}} : [0,1] \to \partial\mathbf{P}\,,\ y \mapsto \underline{b_{0y}}(y)\,, \quad \underline{b_{1y}} : [0,1] \to \partial\mathbf{P}\,,\ y \mapsto \underline{b_{1y}}(y) \end{aligned} \tag{4.4}$$

beschrieben.[7] Dann wird eine Abbildung $\underline{\psi} : \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ derart gesucht, daß die Randbedingungen

$$\begin{aligned} &\underline{\psi}(x,0) = \underline{b_{x0}}(x)\,, \quad \underline{\psi}(x,1) = \underline{b_{x1}}(x) \quad \forall x \in [0,1]\,, \\ &\underline{\psi}(0,y) = \underline{b_{0y}}(y)\,, \quad \underline{\psi}(1,y) = \underline{b_{1y}}(y) \quad \forall y \in [0,1] \end{aligned} \tag{4.5}$$

erfüllt sind (vgl. Abbildung 4.2).

[7] Die Konsistenzbedingungen

$$\underline{b_{x0}}(0) = \underline{b_{0y}}(0)\,, \ \underline{b_{x0}}(1) = \underline{b_{1y}}(0)\,, \ \underline{b_{x1}}(0) = \underline{b_{0y}}(1)\,, \ \underline{b_{x1}}(1) = \underline{b_{1y}}(1)$$

werden stets als erfüllt vorausgesetzt.

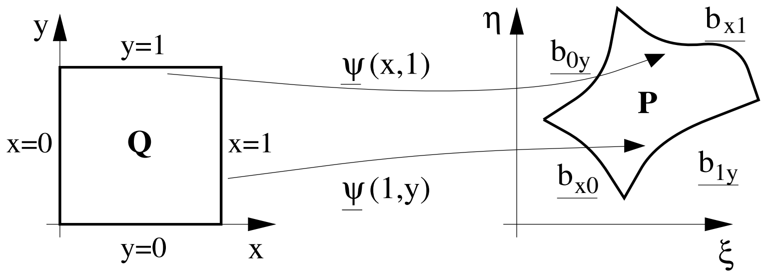


Abb. 4.2 Beschreibung von $\mathbf{P}$ durch seine Randkurven und die Zuordnung der Randkurven von $\mathbf{Q}$ auf die von $\mathbf{P}$

Die einfachste und zugleich eine weit verbreitete Methode, um von der Abbildung der Randpunkte $\underline{\psi} : \partial\mathbf{Q} \rightarrow \partial\mathbf{P}$ auf die vollständige Abbildung $\underline{\psi} : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{P}$ zu schließen, ist die sogenannte *transfinite Interpolation* nach [Gordon & Hall, 1973]:

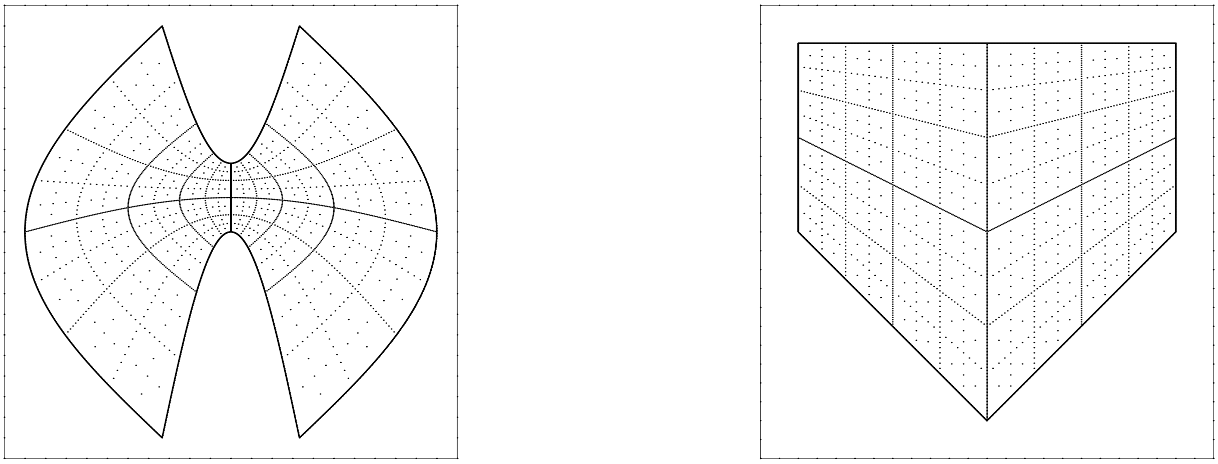
$$\begin{aligned}\underline{\psi}(x,y) = \quad & \Big\{(1-y)\,\underline{b_{x0}}(x) + y\,\underline{b_{x1}}(x)\Big\} + \Big\{(1-x)\,\underline{b_{0y}}(y) + x\,\underline{b_{1y}}(y)\Big\} \\ & -\Big\{(1-y)(1-x)\,\underline{b_{0y}}(0) + (1-y)x\,\underline{b_{1y}}(0) \\ & \qquad +y(1-x)\,\underline{b_{0y}}(1) + yx\,\underline{b_{1y}}(1)\Big\}\,.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Hier wird zwischen zwei gegenüberliegenden Rändern jeweils linear interpoliert, wobei die Ecken einmal zuviel behandelt werden, was die „Korrektur“ in der letzten geschweiften Klammer nötig macht.

Genauer betrachtet ist dies jedoch nichts anderes als die bilineare Interpolation mit hierarchischen Basen vom Rand des Einheitsgebiets, denn neben den Bedingungen (4.5) haben die Funktionen ψ_1 und ψ_2 aus (4.6) die spezielle Form $\psi_i(x,y) = xg_i(y) + yf(x)$, weshalb $\frac{\partial^4\psi_i(x,y)}{\partial^2 x \partial^2 y} = 0 \;\forall (x,y) \in]0,1[^2$ folgt, was wiederum gleichbedeutend damit ist, daß bei stückweise bilinearer Interpolation von ψ_1 und ψ_2 mit hierarchischen Basen die hierarchischen Überschüsse im Innern des Gebiets Null sind. Somit zeichnet sich diese Methode zur Gittergenerierung als die natürliche auf dünnen Gittern aus.

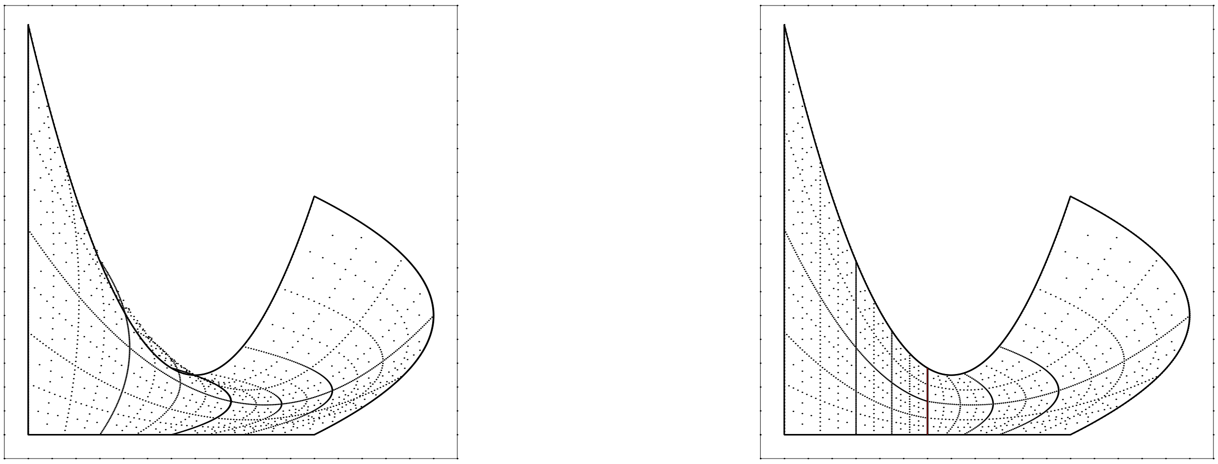
In den Abbildungen 4.3 und 4.4 sind drei grundsätzliche Fälle in Beispielen dargestellt, die bei der Gittererzeugung durch transfinite Interpolation eintreten können. Bild 4.3 (a) zeigt ein glatt berandetes Gebiet, zu dem ein glattes und „wohlgeformtes“ Gitter im Innern erzeugt wird. Bild 4.3 (b) zeigt ein Gebiet, das in einer Randkurve einen Knick hat. Dieser wird ins Gebietsinnere hineintransportiert und nicht ausgeglättet. Dadurch entstehen oft störende Unstetigkeiten in der Jacobimatrix und -determinate im Gebietsinnern. Bild 4.4 (a) schließlich zeigt den seltenen Fall eines glatt berandeten Gebiets, zu dem ein Gitter erzeugt wird, das die Gebietsgrenzen nicht einhält und teilweise außerhalb von $\mathbf{P}$ verläuft. Ein einfacher und oft beschrittener Weg, dieses Gitter zu verbessern, ist die Lage innerer Gitterpunkte vorzugeben. In Abbildung 4.4 (b) ist das verbesserte Gitter gezeigt, das aus transfiniter Interpolation entsteht, bei der zusätzlich die Lage der Gitterlinie $\underline{\psi}(x = \frac{1}{2}, y), y \in [0,1]$, vorgegeben wird. Jedoch führt in der Regel diese einfache Art der Korrektur auch zu Knicken in den Koordinatenlinien, die es gegebenenfalls wieder auszuglätten gilt (vgl. Abschnitt 4.2.3).

[7] Das gleiche Gitter erhält man bei entsprechender Blockstrukturierung des Gebiets $\mathbf{P}$.



(a) (b)

Abb. 4.3 Beispiele zur zweidimensionalen transfiniten Interpolation: links ein glattes Gitter, rechts eines, bei dem sich der Knick in der Randkurve ins Innere fortsetzt



(a) (b)

Abb. 4.4 Links ein glatt berandetes Gebiet, bei dem die einfache transfinite Interpolation versagt, rechts das korrigierte Gitter, bei dem die Lage der inneren Gitterlinie $\underline{\psi}(x = \frac{1}{2}, y)$ vorgegeben wurde

Bemerkungen:

a) Neben der transfiniten Interpolation werden häufig noch die *Zwei-Rand-Technik* und die *Mehr-Rand-Technik* als Standard-Interpolationsmethoden genannt. Hierbei findet die Zwei-Rand-Technik dann Anwendung, wenn das Gebiet $\mathbf{P}$ allein durch zwei gegenüberliegende Ränder beschrieben werden kann (vgl. Abbildung 4.5). Dies ist ein einfacher Spezialfall der transfiniten Interpolation und die Formel (4.6) reduziert sich auf

$$\underline{\psi}(x, y) = (1 - y)\underline{b_{x0}}(x) + y\underline{b_{x1}}(x) .$$

Die Mehr-Rand-Technik ist eine direkte Erweiterung der Zwei-Rand-Technik, bei der zusätzliche innere Linien eingeführt werden, um dort die Gittererzeugung zu kontrollieren. Dies geschieht häufig, um in Randnähe ein möglichst orthogonales Gitter zu erzeugen, damit

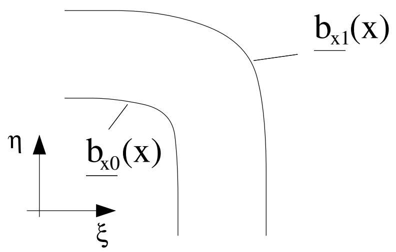


Abb. 4.5 Zweidimensionaler Kanal

die Fehler dort klein bleiben (vgl. hierzu etwa [Eiseman, 1979] und [Fletcher, 1991]). Außerdem ist es vorteilhaft, die Verläufe innerer Gitterlinien vorzuschreiben, wenn man Probleme mit unstetigen Koeffizienten betrachtet. Dann werden die Gitterlinien so gewählt, daß sie entlang der Unstetigkeitsstellen verlaufen, was meist eine adäquate Behandlung der Unstetigkeiten ermöglicht (vgl. [Dornseifer & Pflaum, 1996]).

Auch die Mehr-Rand-Technik ist in die oben beschriebene Methode der stückweise bilinearen Interpolation mit hierarchischen Basen eingebettet, wie schon das Beispiel in Abbildung 4.4 zeigt.

b) In [Eiseman, 1979], [Smith, 1982], und [Fletcher, 1991] werden speziell für die Zwei-Rand-Technik bzw. die Mehr-Rand-Technik weitere Methoden zur Gitterkontrolle im Gebietsinnern vorgestellt, die auf Interpolation höherer Ordnung beruhen.

c) Alternativ zur direkten Implementierung der Formel (4.6) kann diese Transformation auch durch die hierarchische Interpolation ausgedrückt werden. Die Erweiterung auf den d-dimensionalen Fall (vgl. unten) wird dadurch ebenfalls vereinfacht. Hierzu seien einige algorithmische Hinweise gegeben:

   i) Sind die vier Randkurven aus (4.4) gegeben, dann erhält man die neuen Koordinaten $\xi = \psi_1(x, y)$, $\eta = \psi_2(x, y)$ im Innern wie folgt: Belege die Werte für ψ_1 und ψ_2 in den Randpunkten des Gitters und hierarchisiere ψ_1 und ψ_2 am Rand.[8] Setze zudem die hierarchischen Überschüsse von ψ_1 und ψ_2 im Innern auf Null. Somit sind die neuen Koordinaten $\xi = \psi_1(x, y)$, $\eta = \psi_2(x, y)$ auf dem Gitter in hierarchischer Darstellung gegeben. Durch Dehierarchisieren kann man leicht auf die Funktionswerte der neuen Koordinaten schließen.

   ii) Ist neben den vier Randkurven zusätzlich noch eine innere Gitterlinie vorgegeben, etwa die Gitterlinie $\underline{\psi}(x = \frac{1}{2}, y)$, $y \in [0, 1]$, so müssen zum Vorgehen aus i) noch die Werte für ψ_1 und ψ_2 auf der Gitterlinie $x = \frac{1}{2}$ gesetzt und hierarchisiert werden. Alle übrigen hierarchischen Überschüsse von ψ_1 und ψ_2 sind wieder Null.

Der dreidimensionale Fall

Analog zum zweidimensionalen Fall werden hier die Koordinaten des Berechnungsgebiets $\mathbf{Q}$ mit (x, y, z) bezeichnet, die des physikalischen Gebiets $\mathbf{P}$ mit (ξ, η, ζ). Die Spezifikation eines

[8] Zur Erinnerung: Hierarchisieren ist der Übergang von der Knotenbasis-Darstellung einer Funktion zu der Darstellung mit hierarchischen Basen. Beachte, daß die Randlinie hier eindimensional ist.

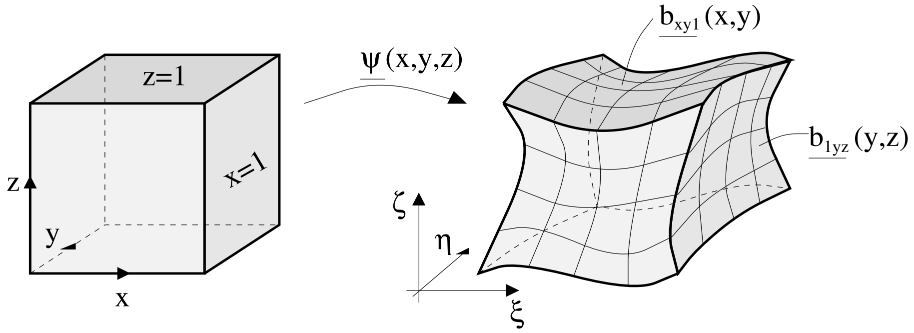


Abb. 4.6 Gebietstransformation in drei Raumdimensionen

räumlichen Gebiets[9] $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^3$ ist entschieden aufwendiger als im ebenen Fall. Hier werde $\mathbf{P}$ durch seine sechs in parametrisierter Form gegebenen Randflächen

$$\begin{aligned} &\underline{b_{xy0}} : [0,1]^2 \to \partial\mathbf{P}\,,\ (x,y) \mapsto \underline{b_{xy0}}(x,y)\,, \quad \underline{b_{xy1}} : [0,1]^2 \to \partial\mathbf{P}\,,\ (x,y) \mapsto \underline{b_{xy1}}(x,y)\,, \\ &\underline{b_{x0z}} : [0,1]^2 \to \partial\mathbf{P}\,,\ (x,z) \mapsto \underline{b_{x0z}}(x,z)\,, \quad \underline{b_{x1z}} : [0,1]^2 \to \partial\mathbf{P}\,,\ (x,z) \mapsto \underline{b_{x1z}}(x,z)\,, \\ &\underline{b_{0yz}} : [0,1]^2 \to \partial\mathbf{P}\,,\ (y,z) \mapsto \underline{b_{0yz}}(y,z)\,, \quad \underline{b_{1yz}} : [0,1]^2 \to \partial\mathbf{P}\,,\ (y,z) \mapsto \underline{b_{1yz}}(y,z) \end{aligned} \tag{4.7}$$

beschrieben. Die notwendigen Konsistenzbedingungen, die im zweidimensionalen Fall nur einer Fußnote wert waren (vgl. Seite 61), blähen sich jetzt auf 28 Bedingungen auf: je eine pro Kante (12 Stück), etwa für die Kante „vorne unten“

$$\underline{b_{xy0}}(x,0) = \underline{b_{x0z}}(x,0) \quad \forall x \in [0,1]$$

und je zwei pro Ecke (2·8 Stück), etwa für die Ecken „vorne unten links“ und „vorne unten rechts“

$$\begin{aligned} \underline{b_{xy0}}(0,0) &= \underline{b_{x0z}}(0,0) = \underline{b_{0yz}}(0,0)\,, \\ \underline{b_{xy0}}(1,0) &= \underline{b_{x0z}}(1,0) = \underline{b_{1yz}}(0,0)\,. \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß bei der Spezifikation des räumlichen Gebiets $\mathbf{P}$ mit großer Sorgfalt vorgegangen werden muß.[10]

Es wird dann eine Abbildung $\underline{\psi} : \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ derart gesucht, daß die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x,y,0) &= \underline{b_{xy0}}(x,y)\,, \quad \underline{\psi}(x,y,1) = \underline{b_{xy1}}(x,y) \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2\,, \\ \underline{\psi}(x,0,z) &= \underline{b_{x0z}}(x,z)\,, \quad \underline{\psi}(x,1,z) = \underline{b_{x1z}}(x,z) \quad \forall (x,z) \in [0,1]^2\,, \\ \underline{\psi}(0,y,z) &= \underline{b_{0yz}}(y,z)\,, \quad \underline{\psi}(1,y,z) = \underline{b_{1yz}}(y,z) \quad \forall (y,z) \in [0,1]^2 \end{aligned} \tag{4.8}$$

erfüllt sind (vgl. Abbildung 4.6).

Anstatt nun die direkte Erweiterung der Formel (4.6) für die transfinite Interpolation anzugeben, wird hier die äquivalente Formulierung gewählt, daß die transfinite Interpolation in drei Raumdimensionen der trilinearen Interpolation mit hierarchischen Basen vom Rand des Einheitswürfels entspricht. Auch im dreidimensionalen Fall gelten die gleichen Vor- und Nachteile der Güte und Flexibilität der transfiniten Interpolation (vgl. Abbildungen 4.3 und 4.4). Ein Beispiel eines dreidimensionalen Gitters ist in Abbildung 4.7 gezeigt.

[9] Das Gebiet $\mathbf{P}$ sei auch hier einfach zusammenhängend.
[10] Im Computerprogramm ist es oft hilfreich, diese Konsistenzbedingungen automatisch überprüfen zu lassen.

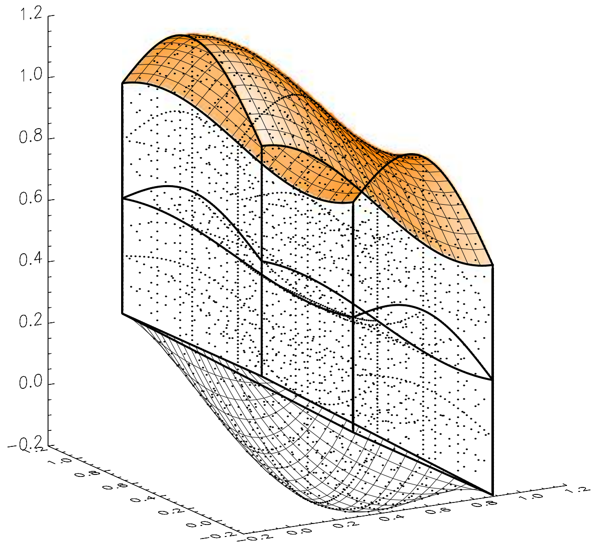


Abb. 4.7 Beispiel eines mit transfiniter Interpolation erzeugten dreidimensionalen Gitters

Bemerkungen:

a) Wie im zweidimensionalen Fall sind hier wieder die Zwei-Rand- und die Mehr-Rand-Technik eingebettet.

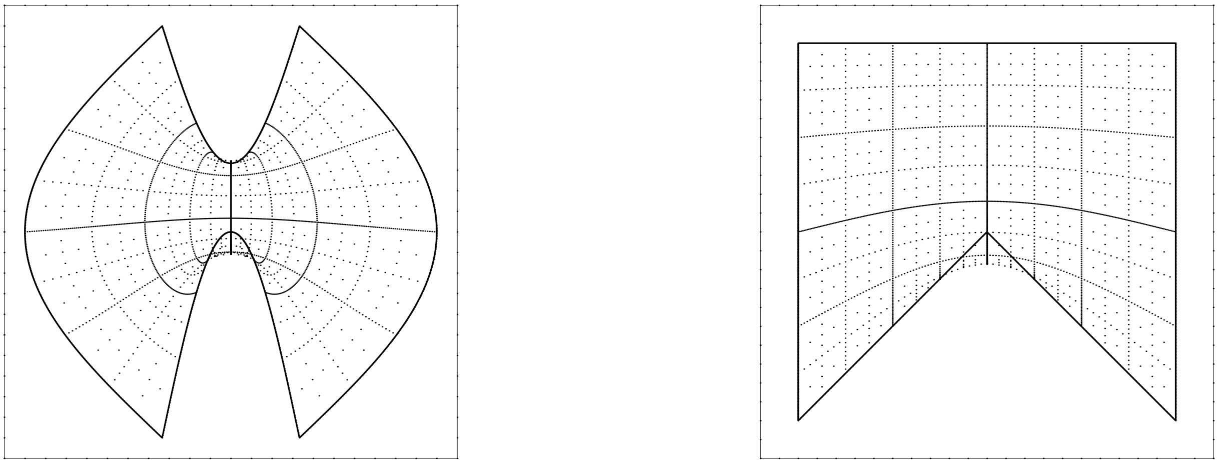
b) Die Erweiterung der Formel (4.6) zur transfiniten Interpolation in drei Raumdimensionen enthält sechs Terme der Form $(1-x)\underline{b_{0yz}(y,z)}$ (Interpolation zwischen den Flächen), zwölf der Form $(1-x)(1-y)\underline{b_{0yz}(0,z)}$ (Interpolation zwischen den Kanten) und acht der Form $(1-x)(1-y)(1-z)\underline{b_{0yz}(0,0)}$ (Interpolation zwischen den Ecken) (vgl. [Knupp & Steinberg, 1993], S. 187f). Sind die sechs Flächen jeweils geeignet parametrisiert, so erhält man die neuen Koordinaten $\xi = \psi_1(x,y,z)$, $\eta = \psi_2(x,y,z)$, $\zeta = \psi_3(x,y,z)$ im Innern des Gebiets jedoch ähnlich einfach wie im zweidimensionalen Fall (vgl. Bemerkung c), S. 64).

c) Ist keine geeignete Parametrisierung der sechs Randflächen vorhanden, so kann man diese mit Hilfe der zweidimensionalen transfiniten Interpolation für jede Randfläche einzeln bestimmen. Dafür müssen dann die Kanten der Randflächen geeignet parametrisiert sein.

d) Abgesehen vom hohen Spezifikationsaufwand für Gebiete in hohen Raumdimensionen stellt die vorgestellte Interpolationsmethode ein Verfahren zur Gittergenerierung im d-dimensionalen Raum dar, das in einem bestehenden d-dimensionalen Programmrahmen mit d-linearer hierarchischer Interpolation – wie er in Dünngitter-Programmen in natürlicher Weise gegeben ist – leicht implementiert werden kann.

4.2.2 Elliptische Methoden zur Gittererzeugung

Hier wird eine zweite wichtige Gruppe von Methoden zur Gittererzeugung vorgestellt: die *elliptischen Gittererzeuger*. Man erhält die neuen Koordinaten als Lösungen von Systemen elliptischer partieller Differentialgleichungen, was zu sehr glatten Gittern im Innern führt – auch bei



(a) (b)

Abb. 4.8 Gemäß des AH-Gittererzeugers generierte Gitter über nichtkonvexen Gebieten: In beiden Fällen faltet sich das Gitter über den Rand, rechts erkennt man zusätzlich, daß der Knick in der unteren Randkurve ausgeglättet wird.

nichtglatten Rändern. Diese Eigenschaft stellt den Hauptvorteil dieser Methoden dar. In vielen Anwendungen wiegt dieser Vorteil so sehr, daß man den großen Nachteil des vergleichsweise hohen Berechnungsaufwands in Kauf nimmt. Allerdings ist es ungleich schwerer, bei elliptischen Gittererzeugern den Verlauf innerer Gitterlinien zu steuern.

Im folgenden werden zwei bekannte und weit verbreitete Methoden der elliptischen Gittererzeugung eingeführt. Zur Vereinfachung der Darstellung wird nur der zweidimensionale Fall besprochen, die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall ist jeweils offensichtlich. Außerdem werden folgende Schreibweisen benutzt:

$$\underline{\psi}(x,y) = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{pmatrix},$$

$$\underline{\psi}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} \psi_1^{-1}(x,y) \\ \psi_2^{-1}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{pmatrix},$$

$$\triangle_{\underline{x}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla_{\underline{\xi}} = (\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}).$$

Gittererzeugung nach Amsden und Hirt (AH)

Die einfachste Methode zur elliptischen Gittererzeugung geht auf [Amsden & Hirt, 1973] zurück. Dort werden die neuen Koordinaten von $\mathbf{P}$ aus dem einfachen Dirichletproblem der Laplacegleichung gewonnen:

$$\triangle_{\underline{x}}\xi = 0\,, \quad \triangle_{\underline{x}}\eta = 0 \qquad \text{in } \mathbf{Q} =]0,1[^2\,, \tag{4.9}$$

mit den Randbedingungen (4.5):

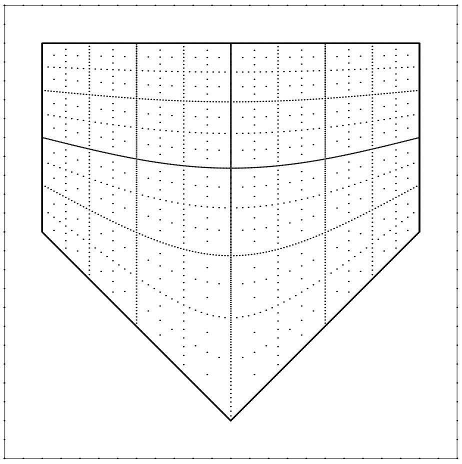


Abb. 4.9 Bei konvexen Gebieten erzeugt der AH-Gittererzeuger ein glattes Gitter im Innern.

$$\begin{pmatrix} \xi(x,0) \\ \eta(x,0) \end{pmatrix} = \underline{b_{x0}}(x)\,, \quad \begin{pmatrix} \xi(x,1) \\ \eta(x,1) \end{pmatrix} = \underline{b_{x1}}(x)\,,$$

$$\begin{pmatrix} \xi(0,y) \\ \eta(0,y) \end{pmatrix} = \underline{b_{0y}}(y)\,, \quad \begin{pmatrix} \xi(1,y) \\ \eta(1,y) \end{pmatrix} = \underline{b_{1y}}(y)\,.$$

Dies ist ein entkoppeltes, lineares System über dem Einheitsquadrat, das mit den Methoden aus Kapitel 3 leicht auf dünnen Gittern gelöst werden kann.

Der größte Nachteil dieser Methode ist, daß die resultierende Abbildung

$$\underline{\psi}(x,y) = (\psi_1(x,y), \quad \psi_2(x,y))^T = (\xi(x,y), \eta(x,y))^T$$

nicht notwendig ein C^1-Diffeomorphismus ist: Über nicht konvexen Gebieten entstehen meist *gefaltete Gitter* – $\underline{\psi}$ ist also nicht injektiv (vgl. Abbildung 4.8).

Die Hauptanwendung dieser einfachen elliptischen Methode liegt bei der Gittererzeugung für konvexe Gebiete mit unglatten Verläufen der Randkurven (Knicke in den Randkurven, vgl. Abbildung 4.9). Die theoretische Begründung dieser Anwendung basiert hierbei auf dem Satz von Rado aus der Theorie harmonischer Abbildungen (vgl. etwa [Liao, 1991]):

Satz 4.1: (*Satz von Rado*)

Die beschränkten Gebiete $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ seien einfach zusammenhängend, Ω_2 sei zusätzlich konvex. Dann gilt für jede Abbildung $\underline{\varphi} : \Omega_1 \to \Omega_2$ mit

i) $\triangle\underline{\varphi} = 0$ in Ω_1 ($\underline{\varphi}$ ist harmonische Abbildung),

ii) $\underline{\varphi} : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ ist ein Homöomorphismus, d.h. $\underline{\varphi} : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ ist bijektiv und stetig, $\underline{\varphi}^{-1} : \partial\Omega_1 \to \partial\Omega_2$ ist ebenfalls stetig,

daß die Jacobideterminante im Innern von Ω_1 nicht verschwindet:

$$\det(J_{\underline{\varphi}}(\underline{x}) \neq 0 \qquad \forall \underline{x} \in \Omega_1.$$

Die Abbildung $\underline{\varphi} : \Omega_1 \to \Omega_2$ ist somit ein Diffeomorphismus.

Bemerkungen:

a) Eine Erweiterung dieses Satzes auf Gebiete in $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 3$ ist bis heute nicht bekannt. Das heißt also, daß bei der Anwendung des AH-Gittererzeugers auf dreidimensionale konvexe Gebiete nicht garantiert werden kann, daß sich keine Gitterlinien überlappen.

b) Die mit dem AH-Gittererzeuger generierten Gitter sind weitestgehend unabhängig von der Parametrisierung der Randkurven. Deshalb ist eine Kontrolle der Gitterlinien im Innern nur schwer möglich.

Gittererzeugung nach Thompson, Thames und Mastin (TTM)

Verbesserte elliptische Gittererzeuger müssen auch auf nichtkonvexen Gebieten anwendbar sein, ohne daß gefaltete Gitter entstehen. Eine weit verbreitete Methode ist der TTM-Gittererzeuger nach Thompson, Thames und Mastin (vgl. [Thompson et al., 1974]). Dieser basiert ebenso auf dem Satz von Rado: Das Berechnungsgebiet $\mathbf{Q}$ erfüllt stets die Voraussetzung der Konvexität, so daß man Satz 4.1 immer auf die Umkehrabbildung $\underline{\psi}^{-1} : \mathbf{P} \to \mathbf{Q}$ anwenden kann. Somit muß also für $\underline{\psi}^{-1} = \binom{x}{y}$ gefordert werden:

$$\triangle_{\underline{\xi}} x = 0 \,, \quad \triangle_{\underline{\xi}} y = 0 \quad \text{in } \mathbf{P}. \tag{4.10}$$

Diese Gleichungen für die Umkehrabbildung $\underline{\psi}^{-1}$ haben für das konkrete Vorgehen jedoch zwei wesentliche Nachteile: i) Sie sind über dem krummberandeten Gebiet $\mathbf{P}$ definiert und ii) man erhält die Umkehrabbildung $\underline{\psi}^{-1}$, man ist aber an der Abbildung $\underline{\psi}$ selbst interessiert. Daher transformiert man (4.10) formal auf das Berechnungsgebiet $\mathbf{Q}$ und erhält dann eine Gleichung für $\underline{\psi}$ – die „invertierte“ Gleichung (4.10).

Im zweidimensionalen Fall erhält man gemäß Formel (4.2) für $\underline{\psi} = \binom{\xi}{\eta}$ die Gleichungen

$$\nabla_{\underline{x}} \cdot (A^* (\nabla_{\underline{x}} \xi)^T) = 0 \,, \quad \nabla_{\underline{x}} \cdot (A^* (\nabla_{\underline{x}} \eta)^T) = 0 \,, \quad \text{in } \mathbf{Q} =]0,1[^2,$$

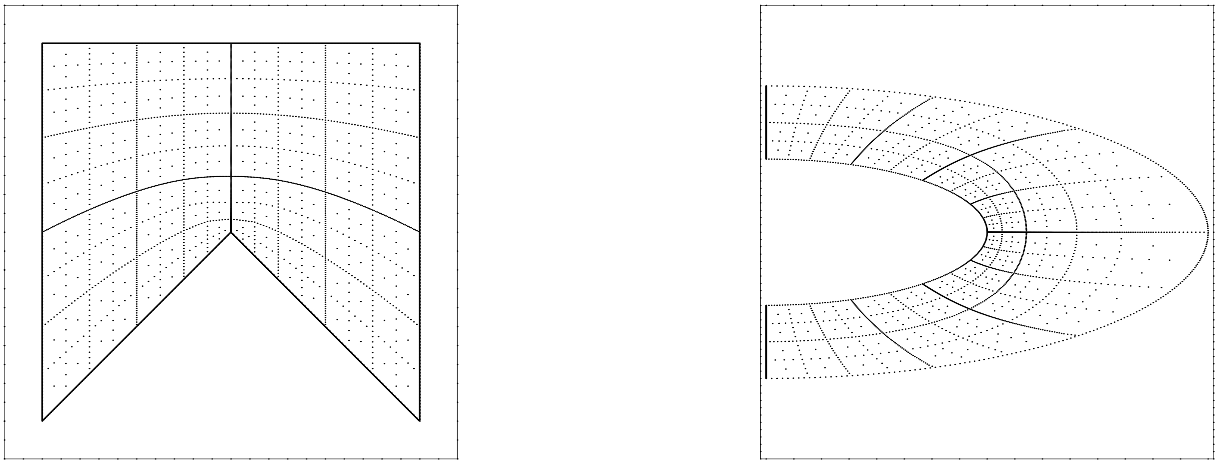
mit

$$A^* = |\det(J_{\underline{\psi}})| J_{\underline{\psi}}^{-1} J_{\underline{\psi}}^{-T} = |\det(J_{\underline{\psi}})| \begin{pmatrix} \xi_y^2 + \eta_y^2 & -(\xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y) \\ -(\xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y) & \xi_x^2 + \eta_x^2 \end{pmatrix} ,$$

die mit den Zusatzbedingungen (4.10) an das Koordinatensystem $\underline{\psi}^{-1}$ in folgende Gleichungen übergehen:

$$\begin{aligned} (\xi_y^2 + \eta_y^2)\xi_{xx} - 2(\xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y)\xi_{xy} + (\xi_x^2 + \eta_x^2)\xi_{yy} &= 0 \,, \\ (\xi_y^2 + \eta_y^2)\eta_{xx} - 2(\xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y)\eta_{xy} + (\xi_x^2 + \eta_x^2)\eta_{yy} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Zusammen mit den Randbedingungen wie für (4.9) erhält man den TTM-Gittererzeuger. Jetzt hat man aber ein *quasilineares* und *gekoppeltes* Problem zu lösen, was den Berechnungsaufwand sogar in zweifacher Hinsicht in die Höhe treibt.



(a) (b)

Abb. 4.10 Der TTM-Gittererzeuger ist auch bei nichtkonvexen Gebieten anwendbar. Bei nichtglatten Rändern entsteht ein glattes Gitter im Gebietsinnern (links), der Gitterpunkt-Abstand jedoch ist in der Regel nur schwer kontrollierbar (rechts).

Bemerkungen:

a) In Abbildung 4.10 (a) ist das TTM-Gitter zu dem schon in Abbildung 4.8 (b) gezeigten nichtkonvexen Gebiet mit unglatter Berandung gezeigt. Im Gegensatz zum AH-Gitter faltet es sich nicht über die Gebietsgrenzen, und es ist im Gegensatz zu einem Interpolationsgitter glatt im Gebietsinnern.

b) In Abbildung 4.10 (b) ist ein TTM-Gitter über einem hufeisenförmigen Gebiet gezeigt. Man sieht, daß die Abstände der Gitterpunkte stark unterschiedlich sind, und bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen ist insbesondere ein Bereich großer Gitterpunkt-Abstände oft nicht erwünscht. Ebenso wie bei dem elliptischen AH-Gittererzeuger hängen aber die TTM-Gitter nur kaum von der Parametrisierung der Randkurven ab. Um dennoch eine Kontrolle der Gitterverläufe durchführen zu können, werden statt der homogenen Gleichungen (4.10) die inhomogenen Gleichungen

$$\triangle_{\underline{\xi}} x = P\,, \quad \triangle_{\underline{\xi}} y = Q$$

betrachtet.[11] Die Funktionen der rechten Seiten P und Q sind sogenannte Gitter-Kontrollfunktionen. Dieser Ansatz ist jedoch nur schwer zu automatisieren und bedarf einiger Erfahrung des Anwenders (vgl. [Knupp & Steinberg, 1993]).

In [Spekreijse, 1995] wird zur Gitterkontrolle zwischen dem Berechnungsgebiet $\mathbf{Q}$ und dem physikalischen Gebiet $\mathbf{P}$ noch ein Parameterraum $\mathbf{R}$ eingeführt. Die endgültige Gebietstransformation wird dann aus der Komposition zweier Einzeltransformationen gebildet: einer elliptischen TTM-Gittertransformation und einer algebraischen Transformation, die zur Umparametrisierung des TTM-Gitters verwendet wird und somit eine Methode der Gitterkontrolle darstellt.

[11] Die Funktionen P und Q haben nichts mit den Gebieten $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ zu tun. Es soll hier nur die in der Literatur übliche Schreibweise nicht verändert werden.

c) Schließlich soll noch eine Herleitung der Gleichungen (4.11) für den allgemeinen d-dimensionalen Fall angegeben werden. Dafür wird zunächst die Transformationsformel für den Laplaceoperator, wie sie aus Gleichung (4.2) resultiert, umformuliert. Es sei nun w eine beliebige, hinreichend glatte Funktion, dann ergibt sich

$$\triangle_{\underline{\xi}} w = \nabla_{\underline{x}} \cdot (A^*(\nabla_{\underline{x}} w)^T) \quad \text{mit} \ \ A^* = |\det(J_{\underline{\psi}})| J_{\underline{\psi}}^{-1} J_{\underline{\psi}}^{-T} .$$

Diese Transformationsformel in Divergenzform wird mit Hilfe der Formel aus der Tensoranalysis für eine $d \times d$-matrixwertige Funktion $A = (\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_d})$ und eine d-vektorwertige Funktion $\underline{b}$

$$\nabla_{\underline{x}} \cdot (A\underline{b}) = \sum_{i=1}^{d} \underline{a_i}^T (\nabla_{\underline{x}} b_i)^T + (\nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{a_1}, \ldots, \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{a_d})\underline{b}$$

in folgende „ausdifferenzierte“ Form überführt:

$$\nabla_{\underline{x}} \cdot (A^*(\nabla_{\underline{x}} w)^T) = \sum_{i=1}^{d} \underline{a_i^*}^T (\nabla_{\underline{x}}(w_{x_i}))^T + (\nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{a_1^*}, \ldots, \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{a_d^*})(\nabla_{\underline{x}} w)^T . \tag{4.12}$$

Setzt man in diese Gleichung zunächst $w := x_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, ein, erhält man unter Verwendung des Kronecker-Symbols δ_{ij} und der Einheitsvektoren $\underline{e_j} = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{dj})^T$

$$\triangle_{\underline{\xi}} x_j = \nabla_{\underline{x}} \cdot (A^*(\nabla_{\underline{x}}\, x_j)) = \sum_{i=1}^{d} \underline{a_i^*}^T \underbrace{(\nabla_{\underline{x}} \delta_{ij})^T}_{=\underline{0}} + (\nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{a_1^*}, \ldots, \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{a_d^*})\underline{e_j} = \nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{a_j^*}$$

und somit aus der Voraussetzung (4.10): $\triangle_{\underline{\xi}} x_j = 0$

$$\nabla_{\underline{x}} \cdot \underline{a_j^*} = 0 \quad \text{für} \ \ j \in \{1, 2, \ldots, d\} . \tag{4.13}$$

Setzt man dann in Gleichung (4.12) noch $w := \xi_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, ein, erhält man mit (4.13) und der einfachen Tatsache $\triangle_{\underline{\xi}} \xi_j = 0$ schließlich die elliptischen Gleichungen für den TTM-Gittererzeuger:

$$\sum_{i=1}^{d} \underline{a_i^*}^T (\nabla_{\underline{x}}\, \xi_{x_i})^T = 0 . \tag{4.14}$$

Es sei hier jedoch nochmals darauf hingewiesen, daß die Grundlage dieses Gittererzeugers – der Satz von Rado – nur in zwei Raumdimensionen bewiesen werden konnte. Somit kann auch bei TTM-Gittern auf dreidimensionalen Gebieten nicht garantiert werden, daß sich keine Gitterlinien überlappen.

4.2.3 Ein hybrides Verfahren zur Gittererzeugung

Der wichtigste Aspekt elliptischer Gittererzeuger ist die Generierung glatter Gitter im Gebietsinnern, selbst bei unglatten Verläufen der Randkurven. Jedoch ist eine direkte und einfache Kontrolle der Gitterverläufe nicht möglich (bisher existieren nur heuristische Ansätze). Sollen überlappende Gitter über nichtkonvexen Gebieten vermieden werden, so muß ein nichtlineares, gekoppeltes System elliptischer Gleichungen gelöst werden (TTM-Gittererzeuger). Dies treibt den Berechnungsaufwand enorm in die Höhe. Dieser ist bei Interpolationsmethoden zur Gittererzeugung dagegen sehr gering, und eine direkte Gitterkontrolle ist einfach möglich (vgl. Abbildung 4.4). Jedoch sind hier glatte Gitterverläufe im Innern nicht gewährleistet, insbesondere setzen sich unglatte Verläufe der Randkurven ins Innere fort.

Hier nun soll ein auf der Interpolationsmethode zur Gittererzeugung und dem elliptischen AH-Gittererzeuger basierendes Verfahren vorgestellt werden, das die einfache Gitterkontrolle der Interpolationsmethode mit den glatten Gittern und dem (vergleichsweise immer noch geringen) Aufwand des AH-Gittererzeugers vereint. Die Überlegungen hierzu beginnen mit folgendem Satz, der einer gegebenen Gebietstransformation $\underline{\psi}$ ein elliptisches Randwertproblem zuordnet, das zur elliptischen Gittererzeugung verwendet werden kann.

Satz 4.2: (*Divergenzgleichung der transformierten Koordinaten*)

Ist $\underline{\psi} = \binom{\psi_1}{\psi_2} = \binom{\xi}{\eta} : \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ ein C^2-Diffeomorphismus, so sind die Koordinaten $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$ Lösungen der elliptischen Gleichung

$$\nabla_{\underline{x}} \cdot (|\det(J_{\underline{\psi}})| J_{\underline{\psi}}^{-1} J_{\underline{\psi}}^{-T} (\nabla_{\underline{x}} \psi_i)^T) = 0 \quad \text{in } \mathbf{Q} =]0,1[^2 , \quad i \in \{1, 2\} .$$

Beweis:

Gemäß der Transformationsformel (4.2), $A^* := |\det(J_{\underline{\psi}})| J_{\underline{\psi}}^{-1} A J_{\underline{\psi}}^{-T}$, ist obige Gleichung die auf das Einheitsintervall $\mathbf{Q}$ transformierte triviale Gleichung $\triangle_{\underline{\xi}} \underline{\psi} = \binom{\triangle_{\underline{\xi}} \psi_1}{\triangle_{\underline{\xi}} \psi_2} = \binom{\triangle_{\underline{\xi}} \xi}{\triangle_{\underline{\xi}} \eta} = \underline{0}$.

□

Bemerkung:

Der elliptische AH-Gittererzeuger beruht auf den Gleichungen

$$\triangle_{\underline{x}} \underline{\xi} = 0 ,$$

der elliptische TTM-Gittererzeuger auf

$$\triangle_{\underline{\xi}} \underline{x} = 0 .$$

Wie nun im Beweis gesehen, läßt sich die elliptische Gleichung aus Satz 4.2 durch die einfache Gleichung

$$\triangle_{\underline{\xi}} \underline{\xi} = 0$$

in diesen Zusammenhang eingliedern.

Eine wichtige Folgerung des Satzes 4.2 ist, daß *jede* Methode zur Gittererzeugung (ob elliptisch oder nichtelliptisch), die durch einen C^2-Diffeomorphismus beschrieben wird, äquivalent zu einer bestimmten elliptischen Methode ist. Ist also eine Gebietstransformation $\underline{\psi} : \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ gegeben, gilt nach Konstruktion für die Lösung des Dirichletproblems

$$\nabla_{\underline{x}} \cdot (A^* (\nabla_{\underline{x}} \varphi_1)^T) = 0 , \quad \nabla_{\underline{x}} \cdot (A^* (\nabla_{\underline{x}} \varphi_2)^T) = 0 \quad \text{in } \mathbf{Q} =]0,1[^2 , \tag{4.15}$$

mit den Randbedingungen

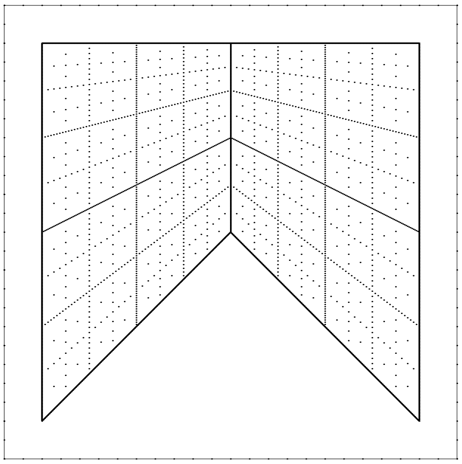


Abb. 4.11 Ein mit der Zwei-Rand-Technik erzeugtes Gitter

$$\underline{\varphi}(x,0) = \underline{\psi}(x,0)\,,\ \underline{\varphi}(x,1) = \underline{\psi}(x,1)\,,\ \underline{\varphi}(0,y) = \underline{\psi}(0,y)\,,\ \underline{\varphi}(1,y) = \underline{\psi}(1,y)$$

und dem Diffusionskoeffizienten

$$A^* = |\det(J_{\underline{\psi}})| J_{\underline{\psi}}^{-1} J_{\underline{\psi}}^{-T}$$

die Identität $\underline{\varphi} \equiv \underline{\psi}$. Hält man die Randbedingungen fest, so hängen die Koordinaten $\underline{\varphi}$ alleine von A^* ab, und man erhält – wie man später sieht – einen direkten Ansatzpunkt zur Gitterkontrolle. Dies gilt insbesondere für unglatte Gitterverläufe, wie sie z.B. bei Interpolationsmethoden bei Gebieten mit unglatten Berandungen auftreten. In Gleichung (4.15) etwa sind Knicke in den Koordinatenlinien $\underline{\psi}(x = \text{const}, y)$ bzw. $\underline{\psi}(x, y = \text{const})$ direkt mit Unstetigkeiten in A^* gekoppelt. Um ein geglättetes Koordinatensystem $\underline{\varphi}$ aus Gleichung (4.15) zu erhalten, muß nur der Koeffizient A^* geglättet werden.[12] Zur Veranschaulichung dient folgendes

Beispiel:

Es sei $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^2$ das Gebiet mit den Randkurven

$$\underline{b_{x0}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}| \end{pmatrix},\ \underline{b_{x1}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{b_{0y}}(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},\ \underline{b_{1y}}(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix},$$

(vgl. Abbildung 4.11). Dann ergibt die Zwei-Rand-Technik aus Abschnitt 4.2.1 (Seite 63)

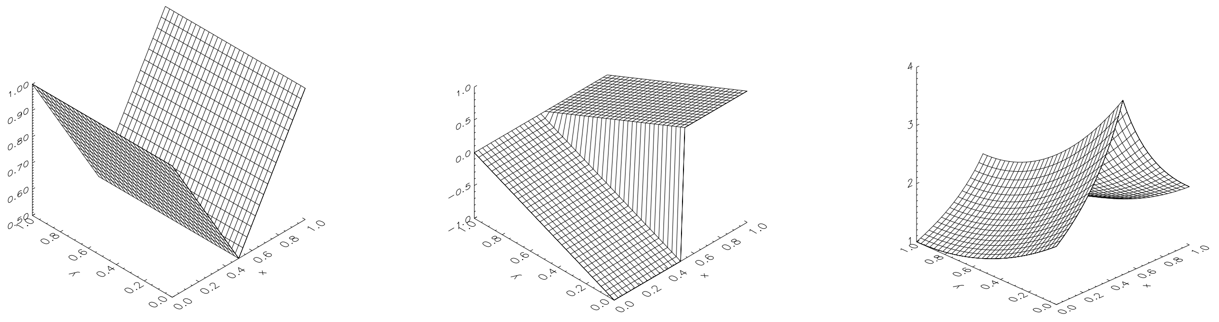
$$\underline{\psi}(x,y) = (1-y)\underline{b_{x0}}(x) + y\underline{b_{x1}}(x) = \begin{pmatrix} x \\ (1-y)(\frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|) + y \end{pmatrix},$$

was zu dem Gitter mit den unglatten Gitterlinien aus Abbildung 4.11 führt. Die Jacobimatrix und -determinante ergeben sich zu[13]

$$J_{\underline{\psi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-y)\mathrm{sign}(\frac{1}{2} - x) & \frac{1}{2} + |x - \frac{1}{2}| \end{pmatrix}, \quad \det(J_{\underline{\psi}}) = \frac{1}{2} + |x - \frac{1}{2}|\,,$$

[12] Bei unstetigen Koeffizienten ist die elliptische Differentialgleichung aus Satz 4.2 durch ihre schwache Formulierung zu ersetzen.

[13] Die Signumfunktion sei hier wie folgt definiert: $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1\,, & x \geq 0 \\ -1\,, & x < 0 \end{cases}$.



$A^*_{11} = \det(J_{\underline{\psi}})$ $\quad$ $A^*_{12} = A^*_{21}$ $\quad$ A^*_{22}

Abb. 4.12 Die Komponentenfunktionen des Koeffizienten A^* aus (4.16)

und daraus der Diffusionskoeffizient

$$A^* = \begin{pmatrix} \det(J_{\underline{\psi}}) & (1-y)\mathrm{sign}(\frac{1}{2}-x) \\ (1-y)\mathrm{sign}(\frac{1}{2}-x) & \dfrac{(1-y)^2+1}{\det(J_{\underline{\psi}})} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Die Komponenten dieses Koeffizienten sind in Abbildung 4.12 gezeigt und man erkennt, daß sich der Knick in den Gitterlinien $\underline{\psi}(x, y = \text{const})$ in den Komponenten A^*_{11} und A^*_{22} als Unstetigkeit in der partiellen Ableitung in x-Richtung auswirkt, in den Komponenten $A^*_{12} = A^*_{21}$ sogar als Unstetigkeit in der Funktion selbst.

Verwendet man nun in (4.15) statt des unstetigen Koeffizienten A^* einen geglätteten Koeffizienten $\tilde{A}^*$, so erhält man ein glatteres Koordinatensystem $\underline{\varphi}$. In Abbildung 4.13 ist das Resultat einer stetigen (und stückweise linearen) Glättung der Komponenten $A^*_{12} = A^*_{21}$ dargestellt. Das aus (4.15) mit dem stetig geglätteten Koeffizienten resultierende Koordinatensystem ist nun C^1. Höhere Glattheit erhält man bei entsprechender Glättung von A^*.

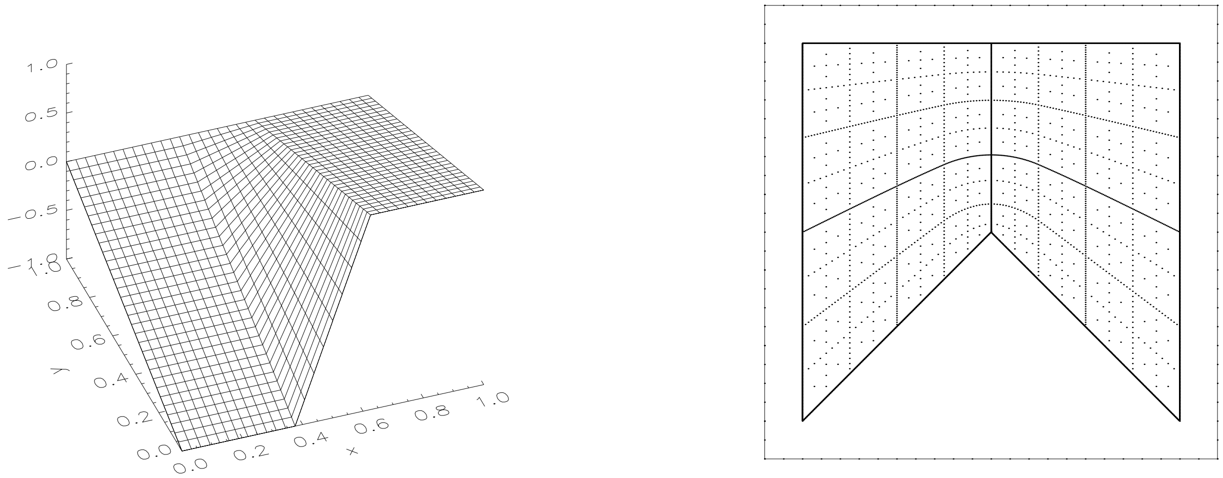


Abb. 4.13 Durch die stetige Glättung der Komponenten A^*_{12} und A^*_{21} (links) entsteht ein C^1-Gitter (rechts).

Das Beispiel demonstriert, wie das neue Verfahren funktioniert: Zuerst wird basierend auf einfachen Interpolationstechniken ohne Beachtung jeglicher Glattheitsanforderungen ein Gitter mit einem günstigen Gitterverhalten erzeugt, zu dem anschließend das zugehörige elliptische Dirichletproblem (4.15) aufgestellt wird. Genügen die Komponentenfunktionen des Koeffizienten A^* nicht vorgeschriebenen Glattheitsvoraussetzungen, werden diese geglättet und mit dem elliptischen Gittererzeuger (4.15) mit dem geglätteten Koeffizienten $\tilde{A}^*$ ein neues geglättetes Koordinatensystem $\underline{\varphi}$ erzeugt.

Eine stetige und stückweise lineare Glättung einer unstetigen Komponentenfunktion kann etwa wie folgt durchgeführt werden: Stelle die unstetige Funktion auf einem groben (dünnen) Gitter dar und interpoliere diese grobe Darstellung auf das feinere Berechnungsgitter. Die unstetige Komponente A^*_{12} aus obigem Beispiel etwa (vgl. Abbildung 4.12) wurde auf einem dünnen Gitter der Tiefe vier dargestellt und dann auf das der Tiefe sieben interpoliert (vgl. Abbildung 4.13). Ein großer Vorteil dieses Vorgehens ist, daß es sich im Algorithmus leicht automatisieren läßt.

4.2.4 Weitere Bemerkungen zur Gittererzeugung

Ein wichtiges Arbeitsfeld im Gebiet der numerischen Gittergenerierung sind *adaptive* Gittererzeuger (*solution adaptive grids*). Hier ist das erklärte Ziel, eine möglichst genaue Lösung des zugrundeliegenden Problems (hier des elliptischen Randwertproblems) zu erhalten bei einem möglichst geringen Aufwand an Gitterpunkten. Dies geschieht – neutral ausgedrückt – durch eine „Häufung“ von Gitterpunkten in Teilbereichen, in denen sich die Lösung stark ändert. Diese Häufung der Gitterpunkte wird durch zwei Grundmechanismen bewirkt: durch Verfeinerung des Gitters in den benötigten Bereichen (a) durch Hinzufügen von Gitterpunkten und (b) durch lokale Verschiebung von benachbarten Gitterpunkten (vgl. [Thompson, 1985], [Eiseman, 1987], [Hawken et al., 1991]).

Da nun die in diesem Kapitel beschriebenen Gittererzeuger sämtlich auf dünnen Gittern aufsetzen, wird der adaptive Grundmechanismus (a) der dünnen Gitter automatisch auf die Gittererzeuger vererbt. In den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.3 werden zwei Beispiele dazu betrachtet, in denen sich die Adaptivität deutlich auszahlt.

In [Dornseifer & Pflaum, 1996] wurden elliptische Gleichungen mit unstetigen Koeffizienten behandelt. Hier erweist es sich als wesentlich, das Koordinatensystem so zu wählen, daß die Unstetigkeiten entlang von (verallgemeinerten) Gitterlinien verlaufen. Somit können die unstetigen Koeffizienten gut dargestellt werden, und es bedarf (in der Regel) keiner zusätzlicher Adaption. In Abschnitt 4.3.6 werden hierzu zwei Spezialfälle untersucht.

Die in diesem Kapitel behandelten physikalischen Gebiete $\mathbf{P}$ gehen allesamt aus einer Transformation des d-dimensionalen Einheitsintervalls hervor. Im Zweidimensionalen bedeutet dies, daß $\mathbf{P}$ von vier Kurven berandet sein muß und somit auch (mindestens) vier Ecken besitzt. Zwei Grenzfälle bilden hier die „Dreiecke“ und „Zweiecke“, bei denen eine bzw. zwei Randkurven zu einem Punkt zusammengezogen sind. Die Gebietstransformation kann hier so gewählt werden, daß die Gitterlinien einer Koordinatenrichtung in diesen, zu einem Punkt zusammengezogenen Randkurven zusammenlaufen (vgl. Abbildung 4.14). Dieser Fall wird in Abschnitt 4.3.5 näher besprochen und kann analog ins Dreidimensionale übertragen werden, wo eine Randfläche zu einer Kurve bzw. zu einem Punkt zusammengezogen wird.

Für die Behandlung komplizierterer Geometrien bietet sich eine Blockstrukturierung des phy-

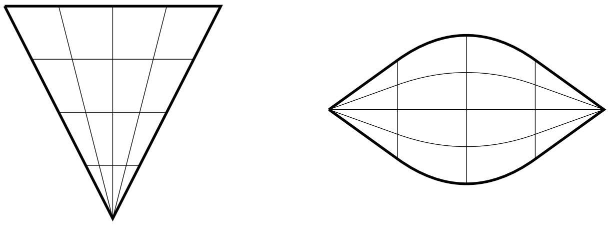


Abb. 4.14 Dreieck und Zweieck

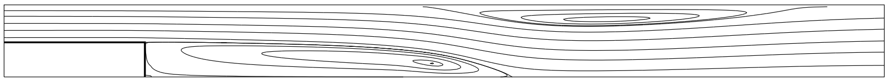


Abb. 4.15 Strömung über eine Stufe aus [Griebel et al., 1995]

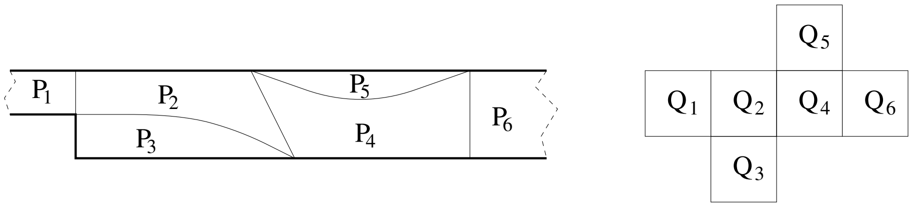


Abb. 4.16 Mögliche Blockstrukturierung des Problems der Stufenströmung aus Abbildung 4.15

sikalischen Gebiets $\mathbf{P}$ in einfache Teilgebiete an, für die dann jeweils eine Abbildung auf das d-dimensionale Einheitsintervall gefunden werden kann. Die Struktur der Gebietszerlegung von $\mathbf{P}$ überträgt sich somit auf das Berechnungsgebiet $\mathbf{Q}$, das nun aus zusammengesetzten Einheitsintervallen besteht. In Abbildung 4.15 etwa ist ein häufig verwendetes Benchmark-Problem für numerische Strömungsprogramme gezeigt: die Strömung über eine Stufe (engl. *backward facing step*). Der durch Stromlinien visualisierte Strömungsverlauf weist zwei Wirbelgebiete auf, in denen sich das Strömungsverhalten stark von dem im Hauptfluß unterscheidet. Daher wird die in Abbildung 4.16 dargestellte Blockstrukturierung nahe gelegt. Hierbei wird das Teilgebiet $\mathbf{P}_3$ wie ein Dreieck, $\mathbf{P}_5$ wie ein Zweieck behandelt.

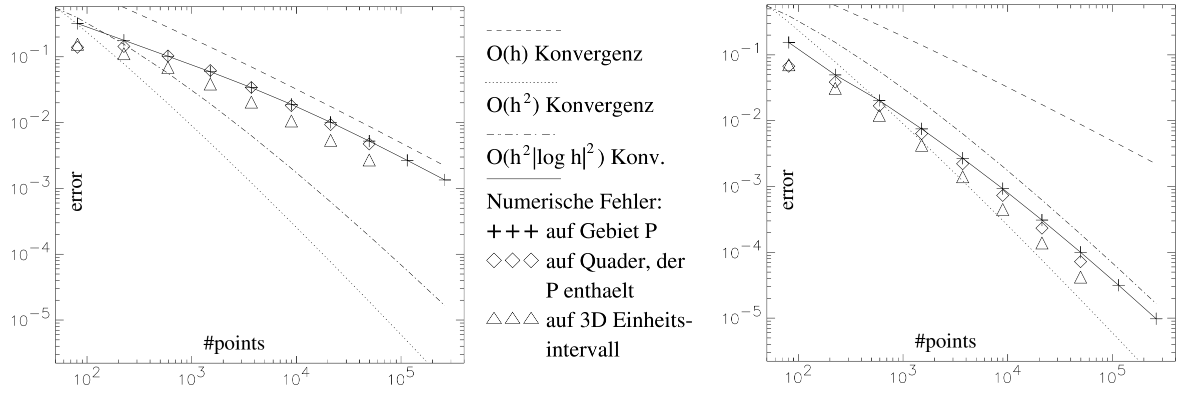
4.3 Numerische Experimente

4.3.1 Elliptische Differentialgleichung auf einem 3 D Gebiet

Die elliptische Differentialgleichung

$$-\nabla \cdot (A(\nabla u)^T) + \nabla u\, \underline{b} + cu = f \tag{4.17}$$

mit den gleichen Koeffizienten $A(\underline{\xi})$, $\underline{b}(\underline{\xi})$, $c(\underline{\xi})$ wie in Abschnitt 3.6.3, Formel (3.31) (Seite 52), wird nun auf dem krummflächig berandeten Gebiet $\mathbf{P}$ aus Abbildung 4.7 auf Seite 66



H^1-Fehler L_2-Fehler

Abb. 4.17 Die numerischen Ergebnisse zum Problem (4.17) auf den drei verschiedenen Gebieten $\mathbf{P}$ aus Abbildung 4.7, dem kleinsten, das Gebiet $\mathbf{P}$ einschließenden Quader und dem 3 D Einheitsintervall wurden auf regulären Gittern berechnet. Links sind die H^1-Fehler, rechts die L_2-Fehler gezeigt.

betrachtet. Das Gitter über $\mathbf{P}$ wird mit der transfiniten Interpolation aus Abschnitt 4.2.1 erzeugt. Die Randwerte und die rechte Seite f sind so gewählt, daß sich

$$u(\underline{\xi}) = \sin(\pi\xi_1)\sin(\pi\xi_2)\sin(\pi\xi_3)$$

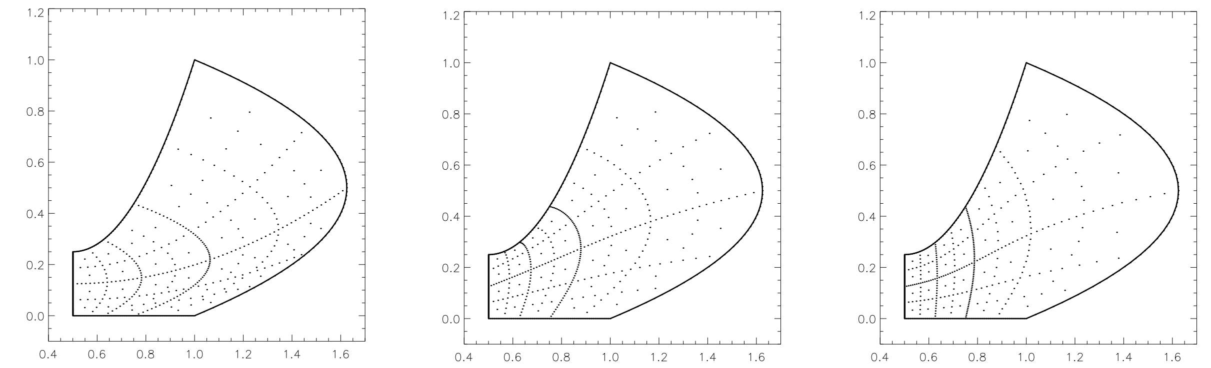
als Lösung ergibt.

Die Transformation von $\mathbf{P}$ auf $\mathbf{Q}$ wirkt sich nun in zweifacher Weise auf das Fehlerverhalten der numerischen Lösung aus: zum einen werden die Koeffizienten der Gleichung (4.17) komplizierter, und zum anderen ist das physikalische Gebiet $\mathbf{P}$ größer als das Einheitsintervall. Um die Auswirkung der Gebietsvergrößerung abzuschätzen, sind in Abbildung 4.17 zusätzlich die numerischen Resultate auf dem Einheitswürfel und dem kleinsten, $\mathbf{P}$ einschließenden Quader gezeigt. Hier werden die Koeffizienten von (4.17) nicht oder nur wenig verändert. Somit erhält man einen Eindruck, wie sich allein die Gebietsvergrößerung auf den Fehler auswirkt. Anhand der Fehlerverläufe in Abbildung 4.17 erkennt man, daß sich die Gebietsvergrößerung stärker auf die Fehler auswirkt, als die Veränderung der Koeffizienten des Differentialoperators durch die Transformation auf das krummberandete Gebiet $\mathbf{P}$ aus Abbildung 4.7.

4.3.2 Gitterverbesserung durch Adaption

In diesem Beispiel wird die in Abschnitt 4.2.4 angesprochene Verknüpfung der Gittererzeugung mit dem adaptiven Dünngitter-Algorithmus veranschaulicht. Als physikalisches Gebiet $\mathbf{P}$ wird das in Abbildung 4.18 gezeigte Gebiet verwendet. In dieser Abbildung sind zudem drei regelmäßige Gitter über $\mathbf{P}$ dargestellt, das Gitter aus transfiniter Interpolation (links), das elliptische AH-Gitter (mitte) und das elliptische TTM-Gitter (rechts) über $\mathbf{P}$. Bei allen drei fällt auf, daß der Abstand der Gitterpunkte untereinander nicht gleichmäßig verteilt ist und im oberen Teil von $\mathbf{P}$ am größten wird. Daher ist auch kein großer Unterschied in der Approximationsgüte der drei verschiedenen regulären dünnen Gitter zu erwarten.

Auf diesem Gebiet wird nun die Poissongleichung



Transfinite Interpolation AH-Gitter TTM-Gitter

Abb. 4.18 Das physikalische Gebiet ist mit drei verschiedenen Gittern überzogen. Bei allen drei haben die Gitterpunkte im oberen Teil von $\mathbf{P}$ den größten Abstand untereinander.

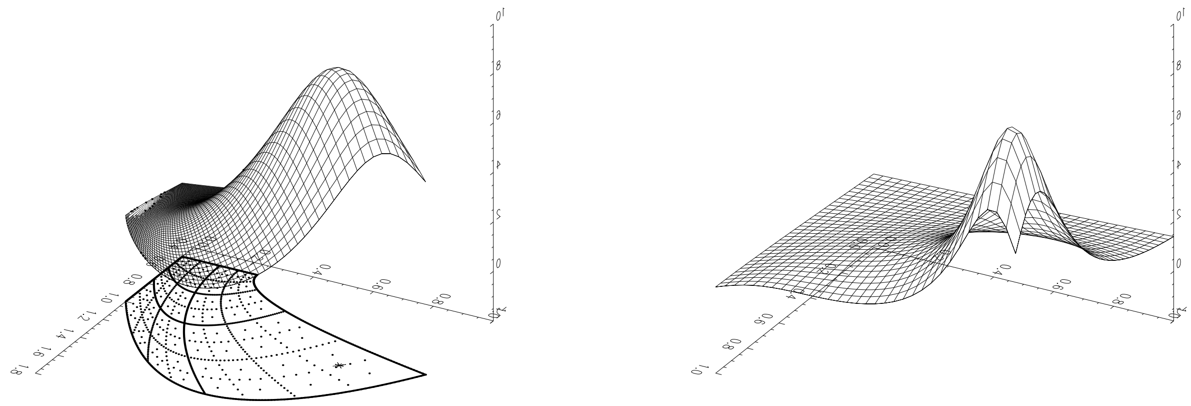


Abb. 4.19 Die Lösungsfunktion u aus (4.18) auf dem physikalischen Gebiet $\mathbf{P}$ (links) und die auf das Berechnungsgebiet $\mathbf{Q}$ transformierte Lösung $\hat{u}$

$$-\triangle u = f$$

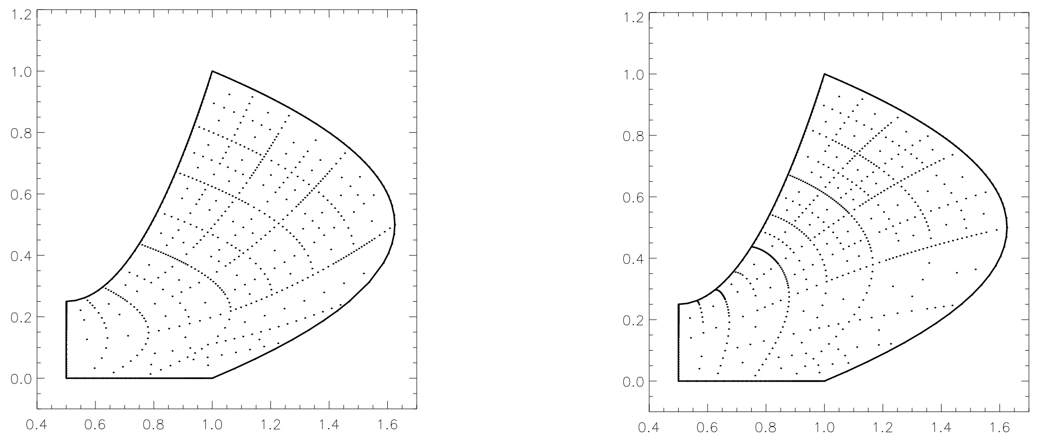
gelöst, bei der die rechte Seite f und die Randwerte so gewählt sind, daß sich

$$u = \frac{1}{(\xi_1 - 1.1)^2 + (\xi_2 - 0.75)^2 + 0.1} \tag{4.18}$$

als Lösung einstellt (vgl. Abbildung 4.19, wo u über $\mathbf{P}$ und $\hat{u}$ über $\mathbf{Q}$ gezeigt sind).

Als Berechnungsgitter werden sowohl reguläre dünne Gitter als auch sich adaptiv verfeinernde Gitter verwendet. Als Adaptionskriterium dienen die hierarchischen Überschüsse der approximierten Lösung. Bei der adaptiven Gitterverfeinerung wird wie in Abschnitt 3.6.4 vorgegangen, wobei jetzt noch zusätzlich die Gebietstransformationen durchzuführen sind:

1.) Initialisiere das Startgitter der Tiefe 1, berechne die Gebietstransformation und berechne



Transfinite Interpolation AH-Gitter

Abb. 4.20 Bei adaptiver Verfeinerung bildet sich schnell eine gleichmäßigere Punkteverteilung aus als bei den regulären Gittern aus Abb. 4.18. Links ist ein aus transfiniter Interpolation erzeugtes adaptives Gitter mit 677 Punkten gezeigt, rechts ein AH-Gitter mit 761 Punkten.

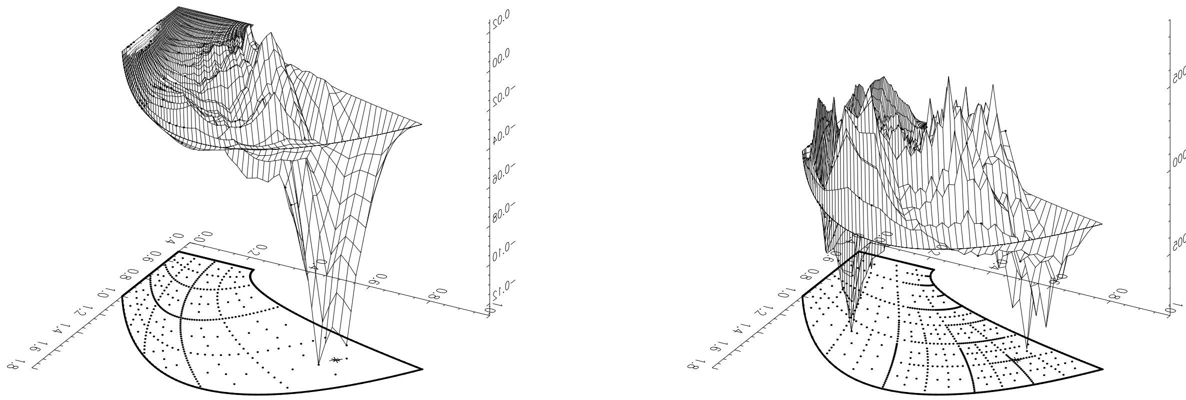


Abb. 4.21 Der Vergleich der Fehlerfunktionen $u - u_h$ über einem regulären dünnen Gitter mit 577 Punkten (links) und über einem adaptiven Gitter mit 677 Punkten (rechts) zeigt eine Reduktion des maximalen Fehlers um den Faktor 20.

die zugehörige approximierte Lösung.
Setze die Adaptionsschranke $\varepsilon := \varepsilon_0$.

2.) Vergleiche alle hierarchischen Überschüsse mit ε und verfeinere das Gitter entsprechend.

3.) Falls das Gitter verfeinert wurde, berechne die Gebietstransformation und die zugehörige approximierte Lösung neu und gehe zu 2.).
Falls das Gitter nicht verfeinert wurde, gehe zu 4.)

4.) Setze $\varepsilon := \varepsilon/4$. Wenn $\varepsilon > \varepsilon_{\text{end}}$ gehe zu 2.), sonst stoppe.

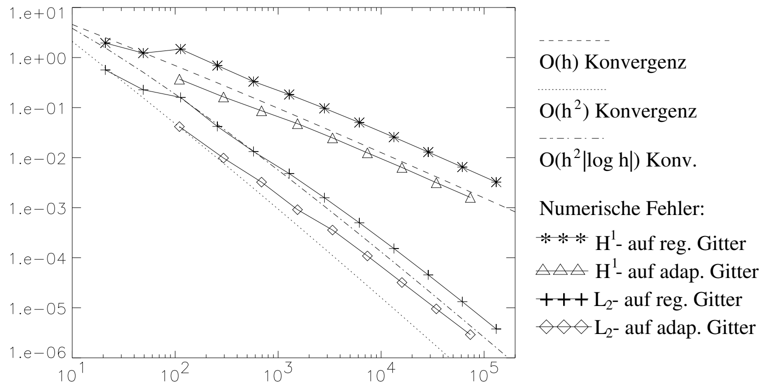


Abb. 4.22 Bei der numerischen Berechnung ergeben sich für den H^1- und den L_2-Fehler auf regulär und adaptiv verfeinerten Gittern jeweils die gleichen numerischen Konvergenzordnungen ($O(h)$ für die H^1-Norm, $O(h^2|\log h|)$ für die L_2-Norm des Fehlers). Bei gleicher Fehlergröße werden aber auf dem adaptiven Gitter erheblich weniger Punkte benötigt.

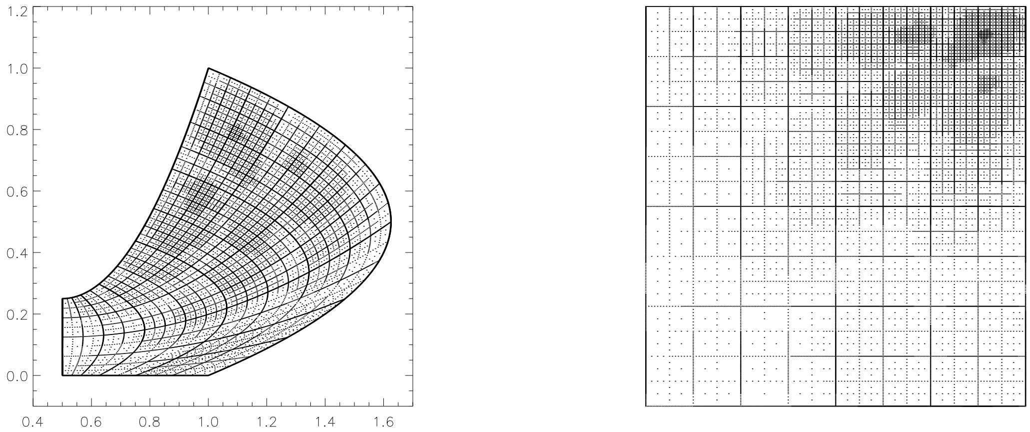


Abb. 4.23 Das finale Gitter der adaptiven Berechnung mit 34336 Punkten zeigt dort eine deutliche Gitterverfeinerung, wo sich die Lösungsfunktion aus Abb. 4.19 stark ändert: links das adaptive Gitter über $\mathbf{P}$, rechts das über $\mathbf{Q}$.

In Abbildung 4.20 sind zwei adaptive Gitter mit zu den regulären Gittern in Abbildung 4.18 vergleichbarer Anzahl von Gitterpunkten gezeigt. Man erkennt sofort, daß sich die Gitterpunkt-Verteilung viel gleichmäßiger als im regulären Fall gestaltet. Zudem sind in Abbildung 4.21 die Fehlerfunktionen $u - u_h$ über dem mittels transfiniter Interpolation erzeugten regulären dünnen Gitter aus Abbildung 4.18 und dem entsprechenden adaptiven Gitter aus Abbildung 4.20 gezeigt. Die Fehlerverteilung ist über dem adaptiven Gitter viel gleichmäßiger und der Maximumfehler ist ca. um einen Faktor 20 kleiner als über dem regulären Gitter.

Die numerischen Ergebnisse für die Berechnungen bei regulärer und adaptiver Gitterverfeinerung werden in Abbildung 4.22 dargestellt. Hier wurde die transfinite Interpolation zur Gittererzeugung verwendet, und es sind jeweils die beiden H^1- bzw. Maximumfehler gegenübergestellt. In Abbildung 4.23 sind die finalen adaptiven Gitter über dem physikalischen Gebiet $\mathbf{P}$

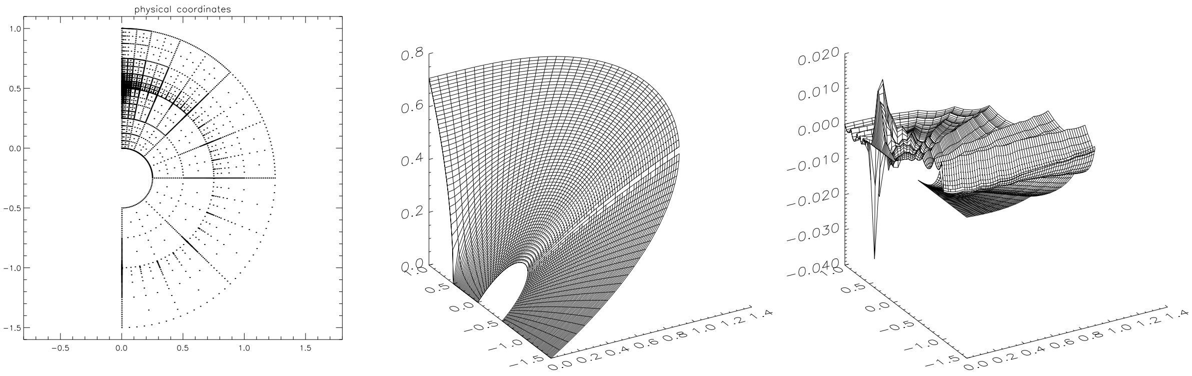


Abb. 4.24 Adaptives Gitter über dem Kreisring-Gebiet (links), Lösungsfunktion u aus (4.19) (mitte), Fehlerfunktion $u - u_h$ auf einem adaptiven Gitter mit 151 Gitterpunkten

und dem Berechnungsgebiet $\mathbf{Q}$ gezeigt.

Unter Verwendung des AH-Gittererzeugers ergeben sich ähnliche Resultate.

4.3.3 Laplacegleichung mit Randsingularität auf Kreisring-Gebiet

Hier wird eine weitere Anwendung adaptiver Gitterverfeinerung behandelt. Betrachtet wird das Laplaceproblem

$$\triangle u = 0$$

auf dem zweidimensionalen Kreisring-Gebiet $\mathbf{P}$ (vgl. Abbildung 4.24, links). Die Randwerte enthalten eine Wurzelsingularität im Punkt (0,1/2), und als Lösung ergibt sich

$$u(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{Re}(\sqrt{\xi_1 + i\xi_2}) \tag{4.19}$$

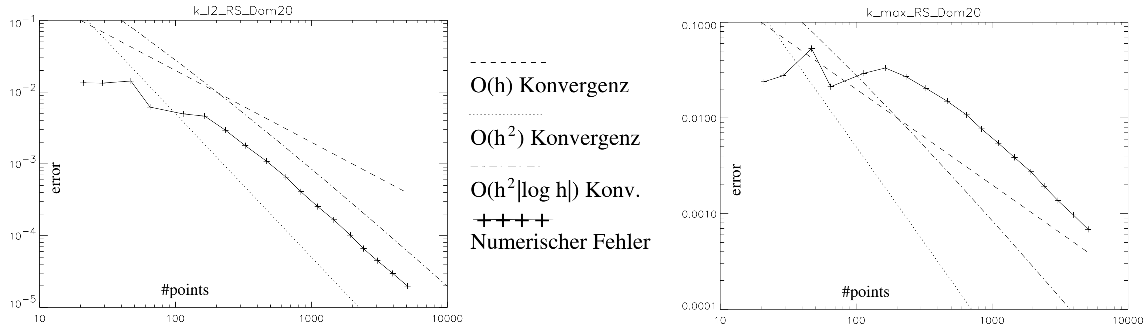
(vgl. Abbildung 4.24, mitte). Die gittererzeugende Gebietstransformation $\underline{\psi}$ wird mit transfiniter Interpolation erzeugt, was zu der Diagonalmatrix

$$A^*(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{\pi(1+4x_2)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\pi(1+4x_2)}{4} \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

als transformierten Diffusionskoeffizienten führt.[14]

Die Berechnungen wurden wieder auf sich adaptiv verfeinernden Gittern durchgeführt. Als Adaptionskriterium wird eine Schranke für den hierarchischen Überschuß verwendet, was den L_2- bzw. Maximumfehler bewertet. Die Adaptionsschranke ε wurde hierbei sukzessive um den Faktor 2 verringert. Dies führt dazu, daß sich pro Verfeinerungsschritt für ε das Randgitter um die Singularität um zwei Stufen verfeinert, da dort der hierarchische Überschuß nur um den Faktor $\sqrt{2}$ abfällt und nicht um den Faktor 4 wie bei glatten Funktionen (vgl. [Balder, 1994], Seite 25).

[14] Das erzeugte Gitter ist *orthogonal*, d. h. daß die Gitterlinien der einen Schar die der anderen stets im rechtem Winkel schneiden und somit $\underline{\psi}_x \cdot \underline{\psi}_y = 0$ gilt. Dies ist auch der Grund, weshalb der Diffusionskoeffizient A^* eine Diagonalmatrix bleibt.



L_2-Fehler Maximumfehler

Abb. 4.25 Die numerischen Ergebnisse der Laplacegleichung mit Singularität in den Randdaten wurden auf adaptiv verfeinerten Gittern berechnet. Links ist der sich auf dem jeweiligen adaptiven Gitter ergebende L_2-Fehler gezeigt, rechts der Maximumfehler.

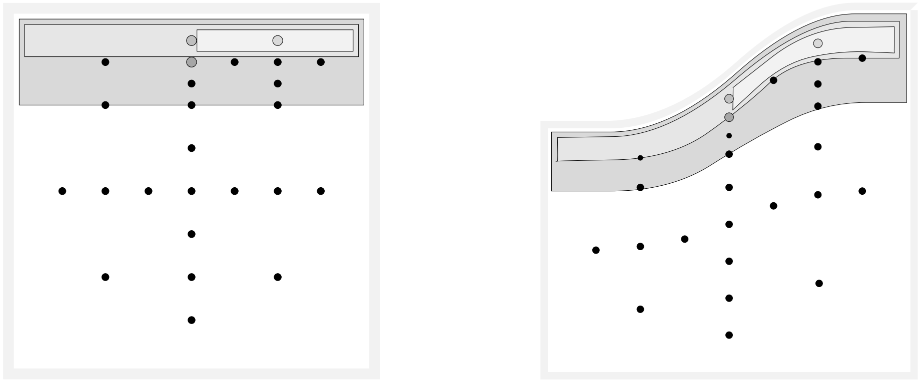


Abb. 4.26 Durch die Gebietstransformation schmiegen sich die Träger der Finiten Elemente am krummen Rand an.

Die Berechnung auf adaptiven Gittern resultiert in einer Gitterverfeinerung in der Nähe der Randsingularität, wo die Fehlerfunktion $u - u_h$ ihr Maximum besitzt (vgl. Abbildung 4.24, rechts). In Abbildung 4.25 sind die numerischen Ergebnisse in Form des L_2- und des Maximumfehlers gezeigt. Für beide ergibt sich eine numerische Konvergenz der Ordnung $O(h^2|\log h|)$.

4.3.4 Grenzschichten

Ein in Anwendungen häufig auftretendes Problem sind Grenzschichten in der Lösung in Randnähe (engl. *boundary layers*) – etwa bei Strömungen durch glatte Geometrien mit Haftbedingungen am Rand. Diese Grenzschichten zeichnen sich zumeist dadurch aus, daß die Lösung in Richtung senkrecht zum Rand stark variiert, parallel dazu jedoch nur wenig. Aufgrund der langgestreckten Finiten Elemente, die sich große Strecken den Rand entlang schmiegen (vgl. Abb. 4.26), stellen dünne Gitter eine besonders geeignete Methode dar, solche Grenzschichten aufzulösen.

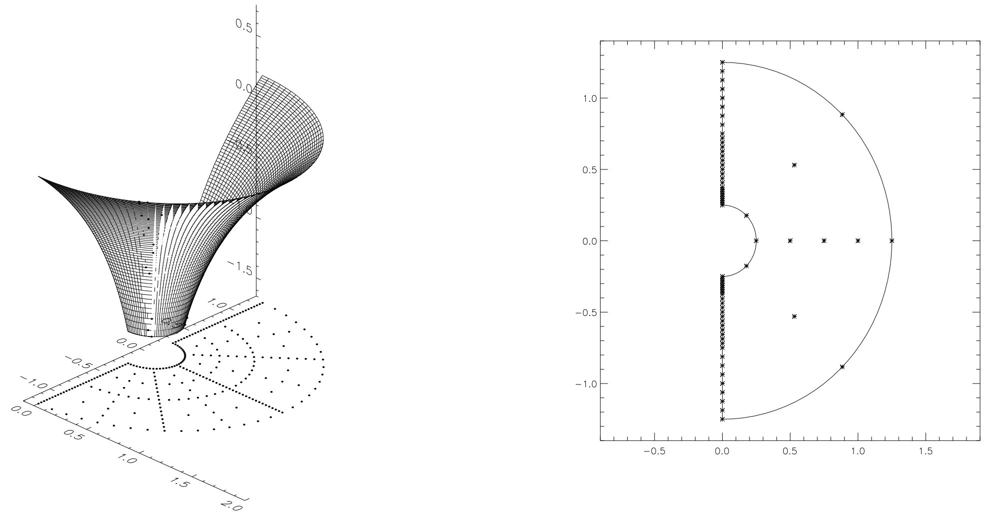


Abb. 4.27 Die Funktion $u(\xi, \eta) = \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ auf dem Kreisringgebiet (links) kann alleine durch Randpunkte des dünnen Gitters beschrieben werden. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die Finite-Elemente-Lösung auf adaptiven dünnen Gittern. Das adaptive Gitter zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-4}$ (rechts) enthält fünf innere Punkte, da die Berechnung auf einem regulären Startgitter mit fünf inneren Punkten begonnen wurde.

Ein extremes Beispiel stellt etwa die Funktion

$$u(\xi, \eta) = \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \tag{4.21}$$

auf dem Kreisringgebiet $\mathbf{P}$ aus Abbildung 4.27 dar. Hier variiert u nur in Richtung senkrecht zum gekrümmten Rand, parallel dazu hingegen nicht.

Wählt man nun das orthogonale Gitter über $\mathbf{P}$, das aus der Zwei-Rand-Methode entsteht, erhält man die Koordinatentransformation

$$\underline{\psi}(x, y) = \begin{pmatrix} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + 4y)\sin(\pi x) \\ (1 + 4y)\cos(\pi x) \end{pmatrix} .$$

Mit $\xi^2 + \eta^2 = ((1 + 4y)/4)^2$ schreibt sich u aus (4.21) in neuen Koordinaten als

$$\hat{u}(x, y) = \ln((1 + 4y)/4) .$$

Damit ist $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\hat{u} = 0$, und bei der hierarchischen Interpolation von $\hat{u}$ sind alle hierarchischen Überschüsse im Gebietsinnern null. Die Funktion $\hat{u}$ (und somit auch u) kann also allein mittels der Randpunkte eines dünnen Gitters approximiert werden.

Betrachtet man das zur Funktion (4.21) gehörende Dirichletproblem

$$\triangle_{\underline{\xi}} u = 0 \text{ in } \mathbf{P} , \quad u|_{\partial \mathbf{P}} = \ln \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \tag{4.22}$$

so überträgt sich die Eigenschaft des Dünngitter-Interpolanten auf das Dünngitter-Verfahren zum approximativen Lösen dieses Dirichletproblems: Auch hier werden nur die Randpunkte zur Approximation benötigt – insbesondere deshalb, weil der transformierte Diffusionskoeffizient A^* auch nur von y abhängt (vgl. Gleichung (4.20), S. 81).

ε	#Pkte	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{\max}$	$\tilde{\rho}_{\max}$	$\|\|\tilde{e}_n^{(2)}\|\|_{l2}$	$\tilde{\rho}_{l2}$	$\|\tilde{e}_n^{(2)}\|_{h1}$	$\tilde{\rho}_{h1}$	$\|\tilde{e}_n^{(2)}\|_a$	$\tilde{\rho}_a$
4^{-1}	21	1.28e-02	—	8.14e-03	—	2.51e-02	—	2.72e-02	—
4^{-2}	25	2.89e-03	4.42	1.44e-03	5.66	5.28e-03	4.75	5.99e-03	4.54
4^{-3}	41	1.46e-04	19.9	1.05e-04	13.7	3.84e-04	13.8	5.64e-04	10.6
4^{-4}	69	3.75e-05	3.89	2.71e-05	3.88	9.95e-05	3.86	1.46e-04	3.86
4^{-5}	117	8.08e-06	4.63	5.24e-06	5.18	2.37e-05	4.20	3.40e-05	4.30
4^{-6}	229	2.38e-06	3.40	1.95e-06	2.69	8.17e-06	2.90	1.14e-05	2.97
4^{-7}	437	5.40e-07	4.41	3.88e-07	5.02	1.71e-06	4.77	2.43e-06	4.70
4^{-8}	869	1.41e-07	3.83	1.08e-07	3.59	4.65e-07	3.68	6.57e-07	3.70
4^{-9}	1717	3.44e-08	4.10	2.55e-08	4.23	1.11e-07	4.18	1.58e-07	4.16
4^{-10}	3421	8.59e-09	4.00	6.37e-09	4.00	2.78e-08	4.00	3.95e-08	4.00
4^{-11}	6829	2.14e-09	4.01	1.59e-09	4.00	6.96e-09	4.00	9.87e-09	4.00
4^{-12}	13645	5.54e-10	3.87	4.02e-10	3.97	1.75e-09	3.98	2.46e-09	4.01

Tabelle 4.1 Die auf dem adaptiven Gitter gemessenen diskreten Fehlernormen des Dirichletproblems (4.22) auf dem Kreisringgebiet $\mathbf{P}$ aus Abbildung 4.27 konvergieren numerisch sämtlich von der Ordnung $O(1/(\#\text{Pkte})^2)$.

In Tabelle 4.1 sind die numerischen Ergebnisse bei adaptiver Gitterverfeinerung angegeben, wobei die Schranke ε für die hierarchischen Überschüsse sukzessive um den Faktor 4 verringert wird. Das Startgitter enthält fünf innere Punkte, die im Laufe der adaptiven Verfeinerung auch tatsächlich nicht mehr verfeinert werden, es kommen stets nur Randpunkte hinzu (vgl. Abbildung 4.27, rechts). Asymptotisch verdoppelt sich die Anzahl der Punkte pro Viertelung der Adaptionsschranke ε und *alle* Fehlernormen nehmen um den Faktor 4 ab, sodaß sich hier eine $O(1/(\#\text{Pkte})^2)$-Konvergenz sowohl in der Maximum- und L_2-Norm als auch in der H^1- und Energienorm einstellt.

Bemerkung:

Anders als zum Ende des Abschnitts 4.1 beschrieben, wird hier der Diffusionskoeffizient A^* nicht numerisch auf dem dünnen Gitter berechnet, sondern a priori analytisch zur Verfügung gestellt. Andernfalls bewirken die kleinen Ungenauigkeiten in A^* eine stärkere Adaption am Rand und auch im Innern.

4.3.5 Dreieck und Pyramide

Bei dem verwendeten Transformationsansatz zur Behandlung verzerrter Gebiete stellen Drei- und Zweiecke im Zweidimensionalen (vgl. Abbildung 4.14, S. 76) und Pyramiden im Dreidimensionalen Grenzfälle dar. Diese sollen hier behandelt werden.

Dazu wird zunächst die Transformation des Berechnungsgebiets auf ein Dreiecksgebiet $\mathbf{P}$ mit der Zwei-Rand-Technik untersucht (vgl. Abbildung 4.28, rechts). Es ergibt sich die Gebietstransformation

$$\underline{\psi}(x,y) = \begin{pmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-y)x + \dfrac{y}{2} \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Jacobimatrix und -determinante

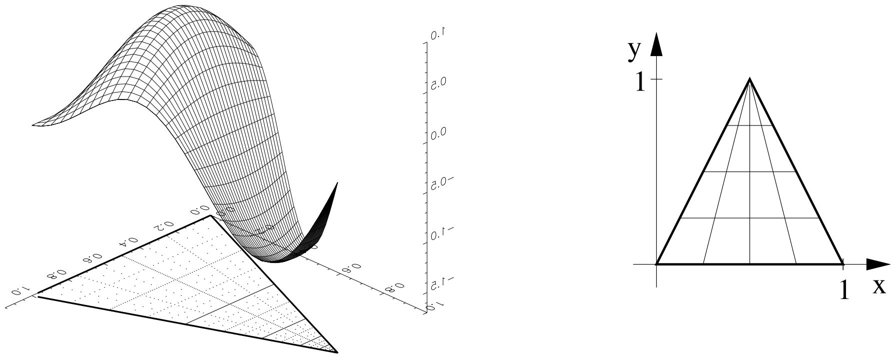


Abb. 4.28 Auf dem Dreieck (rechts) wird das Dirichletproblem (4.23) mit der Lösung (4.24) (links) behandelt.

$$J_{\underline{\psi}} = \begin{pmatrix} \nabla\psi_1 \\ \nabla\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y & \frac{1}{2}-x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det J_{\underline{\psi}} = 1-y\,.$$

Damit ergibt sich aus dem Laplaceoperator über dem Dreieck $\mathbf{P}$ der Differentialoperator $\nabla \cdot (A^*\nabla)$ über $\mathbf{Q}$ mit

$$A^* = \begin{pmatrix} \dfrac{1+(x-1/2)^2}{1-y} & x-\dfrac{1}{2} \\ x-\dfrac{1}{2} & 1-y \end{pmatrix}.$$

Man beachte, daß durch diese Gebietstransformation die Träger der Finiten Elemente überwiegend ihre viereckige Form behalten, nur die Basisfunktionen, die an den Punkt $(1/2, 1)$ angrenzen, haben einen dreieckigen Träger.

Eine genauere Betrachtung von A^* ergibt, daß die Komponente A^*_{11} für $y \longrightarrow 1$ im gleichen Maß gegen unendlich konvergiert, wie $\det J_{\underline{\psi}}$ gegen null. Die Bilinearform a^* über $\mathbf{Q}$ lautet ausgeschrieben

$$a^*(\hat{u},\hat{v}) = \int\limits_{\mathbf{Q}} \frac{1+(x-1/2)^2}{1-y}\hat{u}_x\hat{v}_x + (x-\frac{1}{2})(\hat{u}_x\hat{v}_y + \hat{u}_y\hat{v}_x) + (1-y)\hat{u}_y\hat{v}_y\,dxdy$$

und erzwingt somit im Innern von $\mathbf{Q}$: $\hat{u}_x \xrightarrow{y\to 1} 0$. Dies ist kompatibel mit der Bedingung, die sich aus der Dirichlet-Randbedingung auf der Randkante $y = 1$ – dem Urbild unter $\underline{\psi}$ vom Punkt $(1/2, 1)$ des Dreiecks – ergibt:

$$\hat{u}\Big|_{y=1} = \text{const} \quad \Longrightarrow \hat{u}_x\Big|_{y=1} = 0\,.$$

Auf dem Dreiecksgebiet $\mathbf{P}$ soll nun das Dirichletproblem

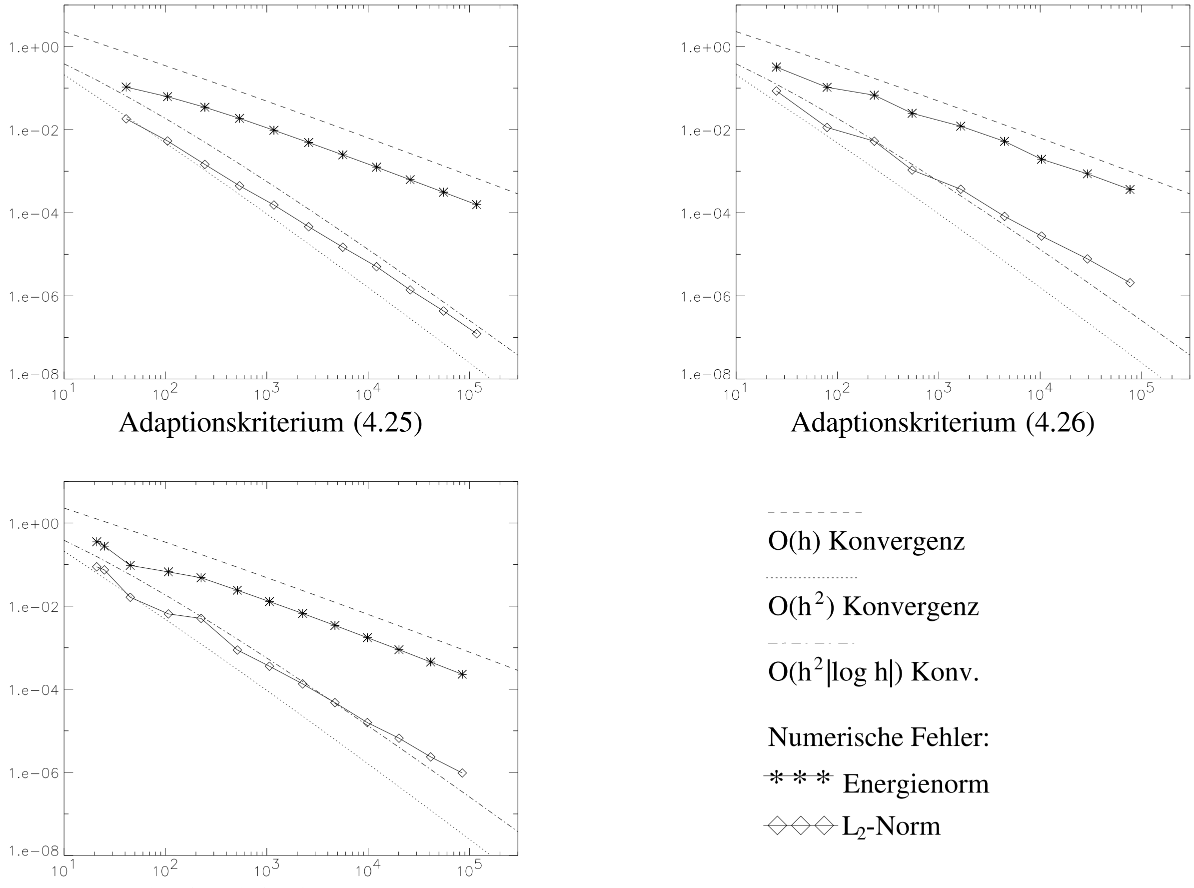


Abb. 4.29 Die numerischen Ergebnisse der adaptiven Berechnung des Dirichletproblems (4.23) weisen jeweils in der L_2-Norm eine $O(h^2|\log h|)$-, in der Energienorm eine $O(h)$-Konvergenz auf. Das Kriterium (4.25) erweist sich wie erwartet für den L_2-Fehler als das Günstigste, für den Energienormfehler sind die Kriterien hier alle ungefähr gleichwertig.

$$-\triangle u = f \tag{4.23}$$

mit der Lösung

$$u(\xi,\eta) = \sin(\pi\xi)\sin(2\pi\eta) \tag{4.24}$$

betrachtet werden (vgl. Abbildung 4.28, links).

Die numerischen Berechnungen zu diesem Problem werden adaptiv durchgeführt. Neben der bisher verwendeten Adaptionsstrategie, bei der der reine hierarchische Überschuß der approximierten Lösung bewertet wird

$$\mathrm{\ddot{U}}(\varphi) \geq \varepsilon\ ?\,, \tag{4.25}$$

wobei $\mathrm{\ddot{U}}(\varphi)$ den jeweiligen hierarchischen Überschuß bezeichne, werden jetzt noch zusätzlich zwei auf die Energienorm bezogene Adaptionsstrategien verwendet: zum einen die schon in Abschnitt 2.2.2 angesprochene, bei der die hierarchischen Überschüsse mit der Energienorm der zugehörigen Basisfunktionen φ gewichtet werden

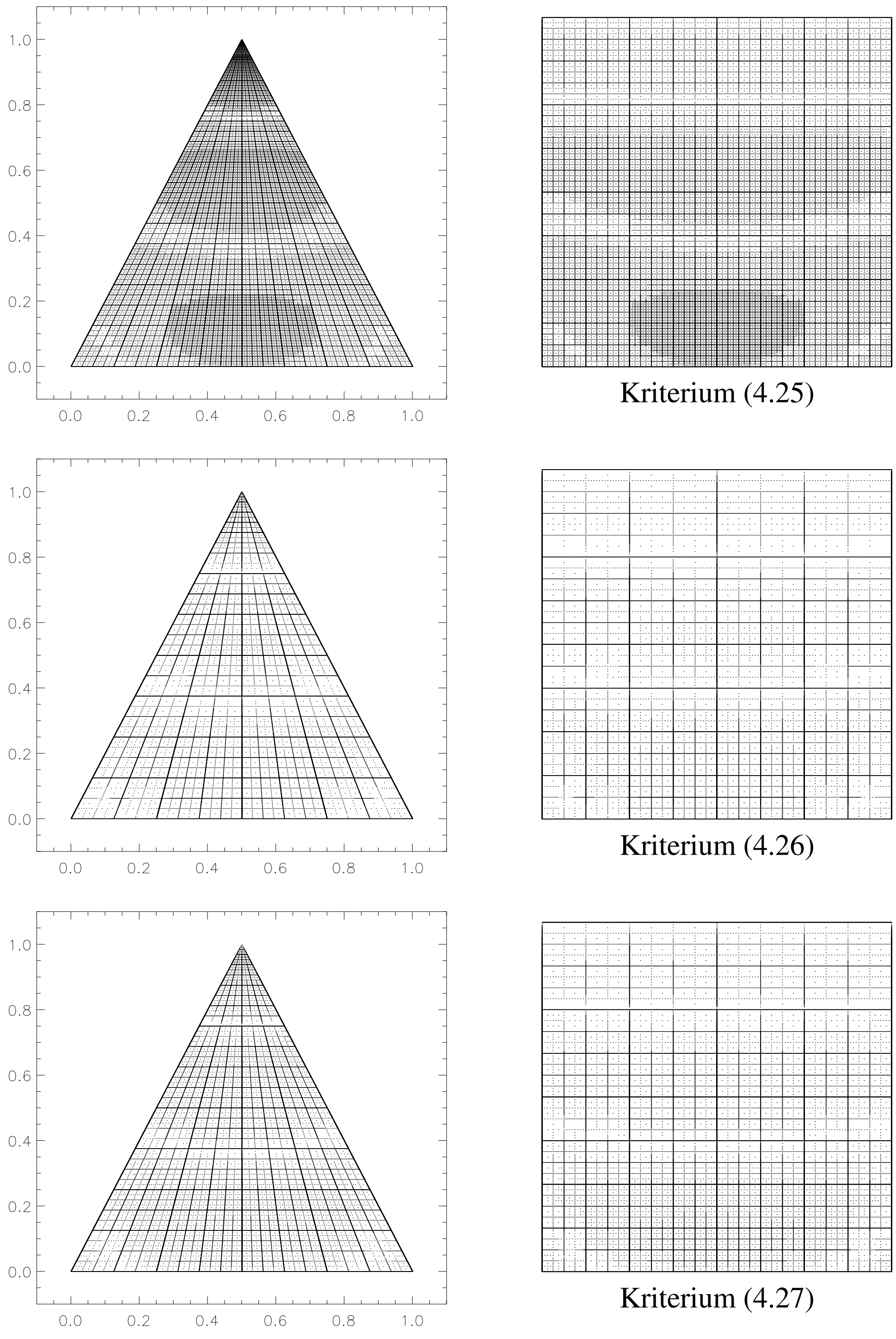


Abb. 4.30 Die finalen adaptiven Gitter zu den verschiedenen Adaptionskriterium: Kriterium (4.25) mit 117739 Gitterpunkten (oben), Kriterium (4.26) mit 77071 Gitterpunkten (mitte), Kriterium (4.27) mit 84833 Gitterpunkten (unten)

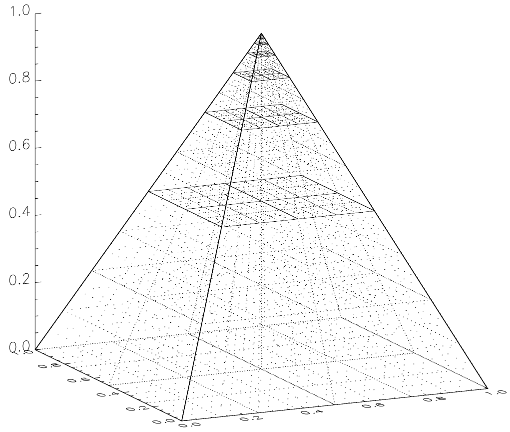


Abb. 4.31 Die Pyramide als Beispiel für den 3 D-Fall

$$\ddot{\mathrm{U}}(\varphi)\left(\int\limits_{\mathbf{Q}} \nabla\varphi A^*(\nabla\varphi)^T\, d\underline{x}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \varepsilon\ ?\,, \tag{4.26}$$

zum anderen das an das Dreieck angepaßte Kriterium aus [Bungartz, 1992] (Formel (39), S. 44), bei dem im zweidimensionalen Fall der hierarchische Überschuß mit der größten Seitenlänge des Trägers der zugehörigen Basisfunktion φ gewichtet wird:

$$\ddot{\mathrm{U}}(\varphi)\max\{h_{\varphi,x}\det J_{\underline{\psi}}(p_\varphi), h_{\varphi,y}\} \geq \varepsilon\ ?\,, \tag{4.27}$$

wobei p_φ den Stützpunkt von φ bezeichne, $h_{\varphi,x}$ die Feinheit von φ in x-Richtung und $h_{\varphi,y}$ die in y-Richtung.

Abbildung 4.29 zeigt die numerischen Ergebnisse der L_2- und Energienormfehler, bei denen sich das Kriterium (4.25) wie erwartet für den L_2-Fehler als das günstigste erweist, für den Energienormfehler sind die Kriterien gleichwertig. In Abbildung 4.30 sind die finalen adaptiven Gitter auf $\mathbf{P}$ und $\mathbf{Q}$ zum jeweiligen Adaptionskriterium dargestellt. Man erkennt bei allen Gittern eine starke Ausdünnung der Gitterpunkte in der Nähe der Spitze (1/2,1) des Dreiecks, die bei den Gittern zu den Energienorm-Kriterien (4.26) und (4.27) noch ausgeprägter ist (vgl. Abbildungen 4.30 mitte und unten). Diese beiden Gitter wirken auch dünner besetzt, obwohl die Gitter jeweils ungefähr gleich viele Punkte besitzen. Dies liegt daran, daß die Kriterien (4.26) und (4.27) die Finiten Elemente mit höherer Energie bevorzugen. Dies sind bei gleicher Trägerfläche die langgestreckten Finiten Elemente. Somit entsteht eine starke Punktehäufung entlang der in mindestens einer Koordinatenrichtung groben Gitterlinien.

Für den dreidimensionalen Fall wird das Dirichletproblem (4.23) mit der Lösung

$$u(\xi,\eta,\zeta) = \sin(\pi\xi)\sin(\pi\eta)\sin(\pi\zeta) \tag{4.28}$$

auf der Pyramide $\mathbf{P}$ (vgl. Abbildung 4.31) behandelt. Die numerischen Ergebnisse der L_2- und Energienormfehler bei regulärer und adaptiver Verfeinerung nach Kriterium (4.25) sind in Abbildung 4.32 gezeigt.

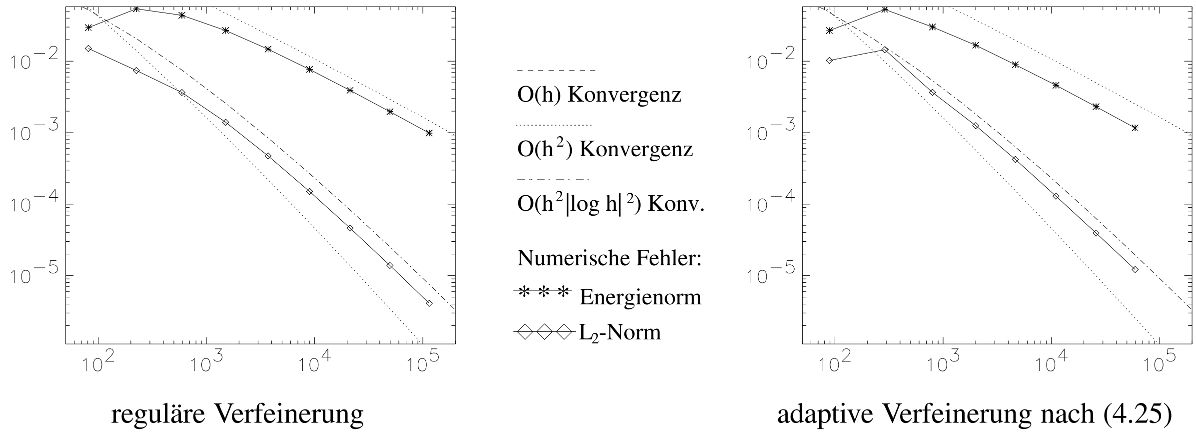


Abb. 4.32 Die numerischen Ergebnisse weisen auch im 3 D-Fall die erwarteten numerischen Konvergenzraten auf: $O(h^2|\log h|^2)$ für den L_2-Fehler, $O(h)$ für den Energienormfehler.

4.3.6 Interface-Linie und L-Gebiet

In diesem Abschnitt werden zwei Probleme betrachtet, in denen unstetige Koeffizienten auftreten. Beim ersten tritt die Unstetigkeit entlang einer inneren Begrenzungslinie (engl. *interface*) auf, beim anderen wird diese Unstetigkeit durch die Gebietstransformation verursacht.

Zunächst wird die Diffusionsgleichung

$$-\nabla \cdot (k(\xi,\eta)\nabla u) = f \tag{4.29}$$

mit

$$k(\xi,\eta) = \begin{cases} 1\,, & \eta \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sin(2\pi\xi) \\ 10\,, & \eta < \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sin(2\pi\xi) \end{cases}$$

betrachtet. Die rechte Seite f und die Randwerte sind so gewählt, daß

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{k(\xi,\eta)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sin(2\pi\xi)\right)\sin(2\pi\xi)\sin(2\pi\eta) \tag{4.30}$$

die Gleichung (4.29) löst. Die Lösung u ist entlang der Begrenzungslinie $\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}\sin(2\pi\xi)$ konstant und erfüllt somit die in Abschnitt 3.4 erwähnte Bedingung, daß die Ableitung von u entlang dieser Linie verschwindet. In Abbildung 4.33 ist die Lösungsfunktion (4.30) und das physikalische Gebiet $\mathbf{P}$ mit der Interface-Linie gezeigt, ebenso die Fehlerfunktion über einem adaptiven Gitter mit 705 Punkten. Die numerischen Ergebnisse für den Maximumfehler sind in Abbildung 4.34 angegeben, sowohl für reguläre Gitterverfeinerung als auch für adaptive, bei der der reine hierarchische Überschuß bewertet wurde. Man erkennt eine $O(h^2|\log h|)$-Konvergenz in beiden Fällen, wobei der Fehler bei adaptiver Verfeinerung stets kleiner ist. Das adaptive Gitter zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-9}$ ist in Abbildung 4.35 dargestellt. Man erkennt, daß bei der Berechnung der Lösung zur Auflösung der Unstetigkeiten keine Adaption in einer Umgebung der Interface-Linie benötigt wird, was auch die Fehlerfunktion aus Abbildung 4.33, rechts, zeigt. Diese weist keine Spitzen längs der Interface-Linie auf.

Als zweites Problem wird die Poissongleichung

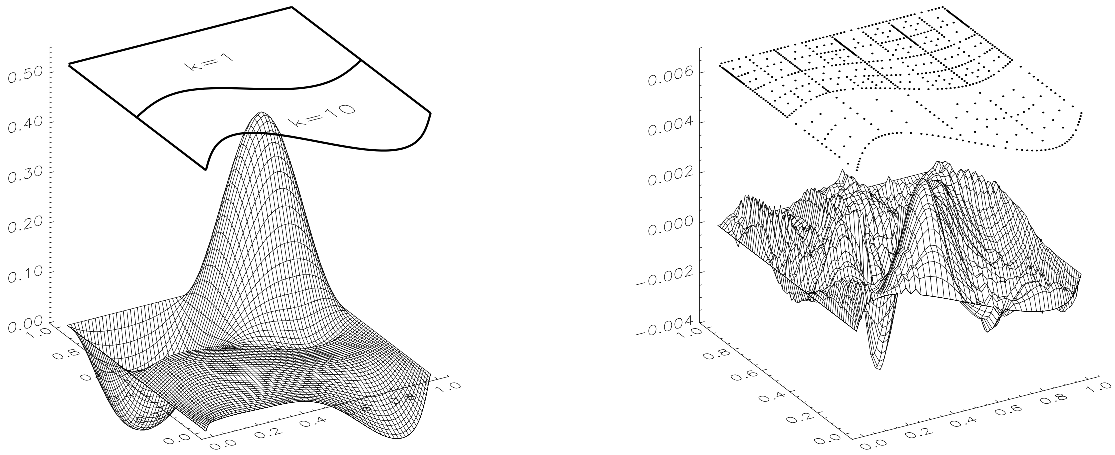


Abb. 4.33 Die Lösungsfunktion (4.30) über dem physikalischen Gebiet $\mathbf{P}$ (links) und die Fehlerfunktion über dem adaptiven Gitter zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-4}$ mit 705 Punkten

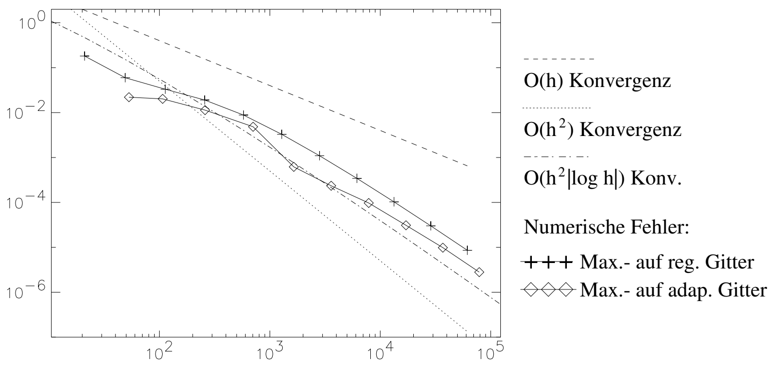


Abb. 4.34 Verlauf des Maximumfehlers zum Problem (4.29) bei regulärer und adaptiver Verfeinerung

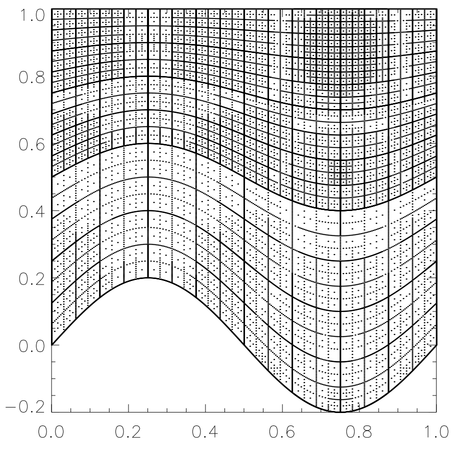


Abb. 4.35 Das adaptive Gitter zum Problem (4.29) und zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-9}$ mit 36876 Punkten weist keine Verfeinerung längs der Interface-Linie auf.

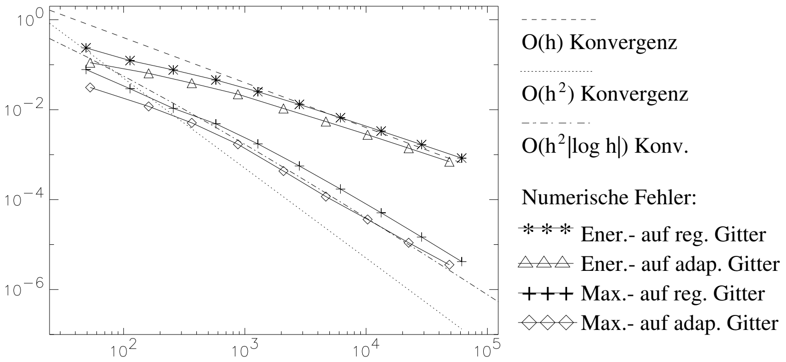


Abb. 4.36 Verlauf des Maximum- und Energienorm-Fehlers zum Problem (4.31) auf dem L-Gebiet bei regulärer und adaptiver Verfeinerung

$$-\triangle u = f \tag{4.31}$$

auf dem L-Gebiet $\mathbf{P} :=]0,1[^2 \setminus]0,0.5[^2$ betrachtet. Unter Verwendung der Gebietstransformation

$$\psi_1(x,y) = \begin{cases} x(1+y)\,, & x \le 0.5 \\ (1+y)/2\,, & 0.5 < x \end{cases}\,,$$

$$\psi_2(x,y) = \begin{cases} (1+y)/2\,, & x \le 0.5 \\ 1+y-x(1+y)\,, & 0.5 < x \end{cases}\,,$$

ergibt sich das Gitter aus Abbildung 4.37 (rechts) über $\mathbf{P}$. Dies hat einen Knick in den Gitterlinien und der transformierte Diffusionskoeffizient A^* über $\mathbf{Q}$ hat in den Komponenten $A^*_{12} = A^*_{21}$ eine Unstetigkeit in $x = 1/2$:

$$A^*_{12} = \begin{cases} -x\,, & x \le 0.5 \\ 1-x\,, & 0.5 < x \end{cases}\,.$$

Die rechte Seite f von (4.31) und die Randwerte sind so gewählt, daß sich

$$u(\xi,\eta) = (\xi - \eta)\sin(2\pi\xi)\sin(2\pi\eta) \tag{4.32}$$

als Lösung ergibt (vgl. Abbildung 4.37, links). Auch dieses u hat längs der Unstetigkeitslinie eine verschwindende Ableitung.

Die Berechnung wurde auf regulären und adaptiven Gittern (Adaptionskriterium: hierarchische Überschüsse) durchgeführt, und die numerischen Ergebnisse für die Maximum- und Energienorm-Fehler sind in Abbildung 4.36 graphisch dargestellt. Das adaptive Gitter zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-9}$ wird in Abbildung 4.37, rechts, gezeigt.

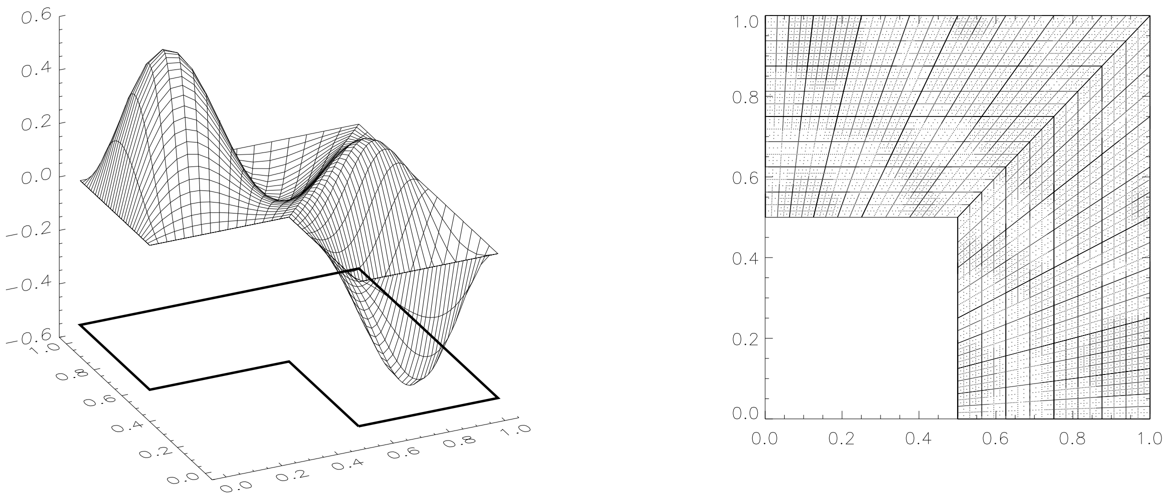


Abb. 4.37 Die Lösungsfunktion (4.32) über dem L-Gebiet (links) und das adaptive Gitter zur Adaptionsschranke $\varepsilon = 4^{-9}$ mit 48609 Punkten

5 Abschließende Bemerkungen

In dieser Arbeit wurde die Klasse von elliptischen Randwertproblemen, die bislang auf dünnen Gittern behandelt werden konnten, um zwei wesentliche Aspekte erweitert. Dies beinhaltet zum einen den Schritt von dem einfachen Helmholtzoperator hin zu allgemeinen, linearen elliptischen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Im Gegensatz zu der Arbeit [Pflaum, 1996] stand hier bei der Formulierung der Diskretisierung der implementierungstechnische Aspekt im Vordergrund, so daß in Anlehnung an [Balder, 1994] die Implementierung für den allgemeinen d-dimensionalen Fall stark vereinfacht wurde. Aufsetzend auf die Verallgemeinerung des behandelbaren Operators konnte unter Verwendung von Gebietstransformationsmethoden in einem zweiten Schritt die Klasse der Problemgebiete von dem Einheitsintervall auf Gebiete mit krummen Berandungen erweitert werden. Hier wurden Methoden zur Gittergenerierung, also zum Finden einer Transformationsvorschrift behandelt, die sich für dünne Gitter besonders eignen und sich auch auf den allgemeinen d-dimensionalen Fall erweitern lassen. Ausführliche Betrachtungen wurden für zwei und drei Raumdimensionen angestellt.

Da in vielen Anwendungsfällen die geometrischen Verhältnisse – krumme Berandungen, innere Interface-Linien – besonderer Behandlung bedürfen und auch die zugrundeliegenden Gleichungen meist komplizierter sind, wird in dieser Arbeit ein wichtiger Schritt weg von den rein akademischen Testbeispielen, hin zu anwendungsrelevanteren Problemen vollzogen. So stellen insbesondere Dünngitter-Algorithmen zur Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen ein aktuelles Forschungsinteresse dar.

Ebenso wird in Zukunft die Erhöhung der Ordnung von Interesse sein. Hier bietet sich das Kombinieren des Ansatzes dieser Arbeit mit dem zur Ordnungserhöhung aus [Bungartz, 1995] an. Eine wichtige Voraussetzung für das Kombinieren dieser Ansätze ist dann, die Ableitung einer Dünngitter-Funktion höherer Ordnung zu berechnen und diese auch wieder in einer geeigneten hierarchischen Basisdarstellung repräsentieren zu können. Dies ist für den Fall stückweise quadratischer Ansatzfunktionen direkt möglich. Zusätzlich zeichnet sich der stückweise quadratische Ansatz dadurch aus, daß sich im Vergleich zum stückweise linearen Ansatz der Speicherbedarf überhaupt nicht und der Algorithmus nur wenig verändert. Man gewinnt aber eine ganze h-Potenz in der Approximationsordnung.

Neben den Finite-Elemente-Diskretisierungen stellen die Finiten Differenzen eine große Klasse zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen dar. Auch hierzu sollten in Zukunft genauere Untersuchungen für die Realisierung auf dünnen Gittern angestellt werden. Dadurch können insbesondere auch die notwendigen algorithmischen Überlegungen vereinfacht werden, da hier die trickreiche Berechnung der Integrale zur Steifigkeitsmatrix wegfällt. Dies wäre nicht zuletzt auch im didaktischen Sinne eine Bereicherung. Erste Ansätze zeigen hier eine zum Finite-Elemente-Ansatz vergleichbare Leistungsfähigkeit.

Literaturverzeichnis

[Amsden & Hirt, 1973] Amsden, A. & Hirt, C. (1973). A simple scheme for generating general curvilinear grids. *Journal of Computational Physics*, 11, 348–359.

[Arcilla et al., 1991] Arcilla, A., Häuser, J., Eiseman, P. & Thompson, J. (1991). *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*. Amsterdam: North-Holland.

[Balder, 1994] Balder, R. (1994). Adaptive Verfahren für elliptische und parabolische Differentialgleichungen auf dünnen Gittern. Dissertation, Technische Universität München.

[Balder & Zenger, 1996] Balder, R. & Zenger, C. (1996). The solution of multidimensional real Helmholtz equations on sparse grids. *SIAM J. Sci. Comput.*, 17, 631–646.

[Bonk, 1994] Bonk, T. (1994). A new algorithm for multi-dimensional adaptive numerical quadrature. In W. Hackbusch (Ed.), *Proceedings of the* 9^{th} *GAMM-Seminar, Kiel, January 1993*: Vieweg, Braunschweig.

[Braess, 1992] Braess, D. (1992). *Finite Elemente*. Berlin: Springer.

[Bungartz, 1992] Bungartz, H.-J. (1992). Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson-Gleichung. Dissertation, Technische Universität München.

[Bungartz, 1995] Bungartz, H.-J. (1995). Concepts for higher order finite elements on sparse grids. In A. V. Ilin & L. R. Scott (Eds.), *Houston Journal of Mathematics: Proceedings of the* 3^{rd} *Int. Conf. on Spectral and High Order Methods, 5.–9. 6. 1995, Houston* (pp. 159–170).

[Bungartz et al., 1994] Bungartz, H.-J., Griebel, M., Röschke, D. & Zenger, C. (1994). Pointwise convergence of the combination technique for Laplace's equation. *East-West Journal of Numerical Mathematics*, 2(1), 21–45.

[Dobrowolski, 1996] Dobrowolski, M. (1996). Finite Elemente. Vorlesungsskript, http://wmax54.mathematik.uni-wuerzburg.de/vorlesungen.html, Universität Würzburg.

[Dornseifer & Pflaum, 1996] Dornseifer, T. & Pflaum, C. (1996). Discretization of elliptic differential equations on curvilinear bounded domains with sparse grids. *Computing*, 53, 197–213.

[Eiseman, 1979] Eiseman, P. (1979). A multi-surface method of coordinate generation. *J. Comput. Phys.*, 33, 118–150.

[Eiseman, 1987] Eiseman, P. (1987). Adaptive grid generation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 64, 321–376.

[Fletcher, 1991] Fletcher, C. (1991). *Computational Techniques for Fluid Dynamics I* & *II*. Berlin: Springer, 2nd edition.

[Frank, 1995] Frank, A. (1995). Hierarchische Polynombasen zum Einsatz in der Datenkompression mit Anwendung auf Audiodaten. Diplomarbeit, Technische Universität München.

[Gordon & Hall, 1973] Gordon, W. & Hall, C. (1973). Construction of curvilinear coordinate systems and application to mesh generation. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 7, 461–477.

[Griebel et al., 1995] Griebel, M., Dornseifer, T. & Neunhoeffer, T. (1995). *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*. Braunschweig: Vieweg.

[Griebel & Oswald, 1993] Griebel, M. & Oswald, P. (1993). On additive Schwarz preconditioners for sparse grid discretizations. *Numer. Math.*, 66, 449–463.

[Griebel et al., 1992] Griebel, M., Schneider, M. & Zenger, C. (1992). A combination technique for the solution of sparse grid problems. In P. de Groen & R. Beauwens (Eds.), *Iterative Methods in Linear Algebra: Proceedings of the IMACS International Symposium, Brussels, 2.-4. 4. 1991* (pp. 263–281).: Elsevier, Amsterdam.

[Griebel & Thurner, 1993] Griebel, M. & Thurner, V. (1993). *The Efficient Solution of Fluid Dynamics Problems by the Combination Technique*. SFB-Bericht 342/1/93 A, Institut für Informatik, TU München.

[Griebel & Zimmer, 1992] Griebel, M. & Zimmer, S. (1992). *Improved Multilevel Algorithms for Full and Sparse Grid Problems*. SFB-Bericht 342/15/92 A, Institut für Informatik, TU München.

[Großmann & Roos, 1992] Großmann, C. & Roos, H.-G. (1992). *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Stuttgart: Teubner.

[Hallatschek, 1992] Hallatschek, K. (1992). Fouriertransformation auf dünnen Gittern mit hierarchischen Basen. *Numer. Math.*, 63(1), 83–97.

[Häuser & Taylor, 1986] Häuser, J. & Taylor, C. (1986). *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*. Swansea: Pineridge Press.

[Hawken et al., 1991] Hawken, D., Gottlieb, J. & Hansen, J. (1991). Review of some adaptive node-movement techniques in finite-element and finite-difference solutions of partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 95, 254–302.

[Hemker, 1994] Hemker, P. W. (1994). Sparse grid finite-volume multigrid for 3D problems. *Advances in Computational Mathematics*, Special issue on multiscale techniques, 215–232.

[Hilgenfeldt, 1994] Hilgenfeldt, S. (1994). Numerische Lösung der stationären Schrödingergleichung mit Finite-Element-Methoden auf dünnen Gittern. Diplomarbeit, Technische Universität München.

[Huber, 1996] Huber, W. (1996). Turbulenzsimulation mit der Kombinationsmethode auf Workstation-Netzen und Parallelrechnern. Dissertation, Technische Universität München.

[Johnson, 1987] Johnson, C. (1987). *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge: Cambridge University Press.

[Knupp & Steinberg, 1993] Knupp, P. & Steinberg, S. (1993). *Fundamentals of Grid Generation*. London: CRC Press, Inc.

[Liao, 1991] Liao, G. (1991). On harmonic maps. In J. Castillo (Ed.), *Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation* (pp. 123–130). Philadelphia: SIAM.

[Paul, 1995] Paul, A. (1995). Kompression von Bildfolgen mit hierarchischen Basen. Diplomarbeit, Technische Universität München.

[Pflaum, 1992] Pflaum, C. (1992). Anwendung von Mehrgitterverfahren auf dünnen Gittern. Diplomarbeit, Technische Universität München.

[Pflaum, 1994] Pflaum, C. (1994). *A Multi-Level-Algorithm for the Finite-Element-Solution of General Second Order Elliptic Differential Equations on Adaptive Sparse Grids*. SFB-Bericht 342/12/94 A, Technische Universität München.

[Pflaum, 1996] Pflaum, C. (1996). Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen mit dünnen Gittern. Dissertation, Technische Universität München.

[Schmid et al., 1993] Schmid, W., Paffrath, M. & Hoppe, R. (1993). *Application of Iterative Methods for Solving Nonsymmetric Linear Systems in the Simulation of Semiconductor Processing*. TUM Bericht TUM-M9316, Institut für Mathematik, Technische Universität München.

[Smith, 1982] Smith, R. (1982). Algebraic grid generation. In J. Thompson (Ed.), *Numerical Grid Generation* (pp. 137–170). Amsterdam: North–Holland.

[Spekreijse, 1995] Spekreijse, S. (1995). Elliptic grid generation based on Laplace equations and algebraic transformations. *Journal of Computational Physics*, 118, 38–61.

[Störtkuhl, 1994] Störtkuhl, T. (1994). *Ein numerisches, adaptives Verfahren zur Lösung der biharmonischen Gleichung auf dünnen Gittern*. Dissertation, Institut für Informatik, Technische Universität München.

[Strang & Fix, 1973] Strang, G. & Fix, G. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

[Thompson, 1982] Thompson, J. (1982). *Numerical Grid Generation*. Amsterdam: North–Holland.

[Thompson, 1985] Thompson, J. (1985). A survey of dynamically-adaptive grids in the numerical solution of partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 1, 3–27.

[Thompson et al., 1974] Thompson, J., Thames, F. & Mastin, C. (1974). Automatic numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. *Journal of Computational Physics*, 15, 299–319.

[Thompson et al., 1985] Thompson, J., Warsi, Z. & Mastin, C. (1985). *Numerical Grid Generation, Foundations and Applications*. Amsterdam: North–Holland.

[van der Vorst, 1992] van der Vorst, H. (1992). Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13, 631–644.

[Wloka, 1982] Wloka, J. (1982). *Partielle Differentialgleichungen*. Stuttgart: Teubner.

[Yserentant, 1986] Yserentant, H. (1986). On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49, 379–412.

[Zenger, 1990] Zenger, C. (1990). Sparse Grids. In W. Hackbusch (Ed.), *Parallel Algorithms for Partial Differential Equations: Proceedings of the sixth GAMM-Seminar, Kiel, 19.1.-21.1.1990*. Vieweg, Braunschweig (1991). (auch: Technische Universität München, SFB-Bericht Nr. 342/18/90 A).

[Zimmer, 1991] Zimmer, S. (1991). Lösung der Stokes-Gleichungen durch ein adaptives Verfahren mit hierarchischen Basisfunktionen. Diplomarbeit, Technische Universität München.