Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität München

Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen mit dünnen Gittern

Christoph Pflaum

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eine

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:		Univ.-Prof. Dr. K. Meyberg
Prüfer der Dissertation:		
	1.	Univ.-Prof. Dr. C. Zenger
	2.	Univ.-Prof. Dr. R. Hoppe

Die Dissertation wurde am 27.11.1995 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Mathematik am 26.1.1996 angenommen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Viele Problemstellungen aus den Ingenieur- und Naturwissenschaften können nicht exakt sondern nur näherungsweise auf einem Diskretisierungsgitter gelöst werden. Damit diese Näherung genau genug ist, muß das Diskretisierungsgitter oft sehr fein gewählt werden. Hierdurch entsteht ein großer Speicheraufwand zur Speicherung der Daten auf dem Gitter und ein hoher Rechenaufwand zur Verarbeitung dieser Daten, was zur Folge hat, daß viele Problemstellungen nur mit großen Rechenkapazitäten und hoher Rechenzeit oder sogar überhaupt nicht gelöst werden können. Deswegen ist es notwendig nach Konzepten zur Reduktion der Datenmenge zu suchen.

Dünne Gitter sind ein besonders wirkungsvolles Konzept zur Reduktion des Rechen- und Speicheraufwandes bzw. zur Erhöhung der Genauigkeit bei gleichem Aufwand. Dies zeigt folgendes Ergebnis aus [41]. Zur Approximation einer hinreichend glatten Funktion auf dem Einheitsquadrat kann man diese auf einem äquidistanten Gitter mit $O(N^2)$ Punkten interpolieren. Wir wollen solche Gitter volle Gitter nennen (siehe Abbildung 1.1). Zur Interpolation kann man zum Beispiel bilineare finite Elemente verwenden. Der Fehler in der L^∞-Norm ist dann von der Ordnung $O(N^{-2})$.

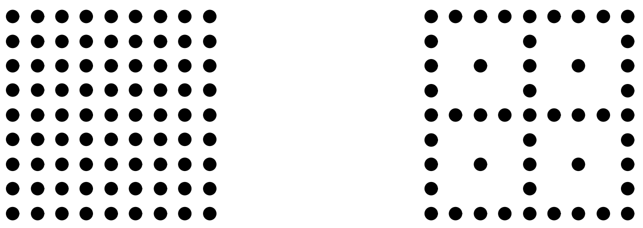


Abbildung 1.1: Beispiel eines vollen und eines dünnen Gitters mit $N = 2^3$.

Ein dünnes Gitter hat im Gegensatz zu einem vollen Gitter nur $O(N \log N)$ Punkte. Der Fehler bei einer Interpolation mit bilinearen finiten Elementen auf einem dünnen Gitter ist jedoch fast genauso klein wie auf einem vollen Gitter, nämlich $O(N^{-2} \log N)$.

Dies zeigt, daß die Interpolation auf einem dünnen Gitter bei nahezu gleicher Genauigkeit wesentlich geringeren Speicheraufwand als auf einem vollen Gitter benötigt.

Mit dünnen Gittern kann man somit eine Reduktion der Datenmenge erreichen. Diese Eigenschaft ist besonders interessant bei der Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen, da man hierdurch auch eine Reduktion des Rechenaufwandes erhält.

Zum Verständnis dieser Arbeit ist es wichtig zu wissen, daß es zwei grundlegend verschiedene Möglichkeiten zur Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen auf dünnen Gittern gibt. Dies ist zum einen die Kombinationstechnik (siehe [19]) und zum anderen der Galerkin-Ansatz (siehe [9]). Diese beiden Ansätze unterscheiden sich wesentlich. Die Kombinationstechnik läßt sich sehr einfach implementieren und parallelisieren (siehe [16]). Der Grund hierfür ist, daß bei der Kombinationstechnik mehrere Vollgitterlösungen berechnet und diese dann in einer geeigneten Weise linear kombiniert werden. Die Vereinigung der hierbei verwendeten vollen Gitter, die auch als Kombinationsgitter bezeichnet werden, bilden ein dünnes Gitter. Zur Berechnung der verschiedenen Vollgitterlösungen muß man lediglich bestehende Algorithmen leicht verändern. Die Konvergenz der Kombinationstechnik ist jedoch schwierig zu beweisen. Wie groß die Konvergenzordnung dieses Verfahrens ist, ist bei vielen Problemen noch nicht ganz klar. Beim Galerkin-Ansatz ist die Konvergenztheorie in bestimmten natürlichen Normen wesentlich einfacher. Man benötigt hierfür nur die Approximationseigenschaften des Dünngitterinterpolanten und bekannte Argumente aus der Konvergenztheorie des Galerkin-Ansatzes. Die Implementierung des Galerkin-Ansatzes ist jedoch schwieriger als die der Kombinationstechnik, da beim Galerkin-Ansatz auf dünnen Gittern kein zum vollen Gitter analoges Vorgehen möglich ist.

In dieser Arbeit wird untersucht, wie man die Kombinationstechnik und das Galerkin-Verfahren zur numerischen Lösung von elliptischen Differentialgleichungen einsetzen kann. Insbesondere wird die Konvergenz dieser Verfahren eingehend untersucht. Wir werden hierbei die Finite-Elemente-Methode verwenden. Bei dünnen Gittern kann man jedoch auch die Finite-Differenzen-Methode und die Finite-Volumen-Methode anwenden (siehe [8], [24] und [10]).

Wir wollen nun die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit zusammenfassen:

1. Allgemeiner Konvergenzsatz bei dünnen Gittern. Die Beweise für die Approximationseigenschaften von dünnen Gittern sind je nach Problemstellung etwas unterschiedlich. Die Konvergenz der Kombinationslösung wird in [8] mit Hilfe einer asymptotischen Fehlerentwicklung bei der Vollgitterlösung bewiesen. Bei der Berechnung des Fehlers der Dünngitterinterpolation spielt die Abschätzung der Größe des hierarchischen Überschusses eine zentrale Rolle (siehe [9], [24] oder [41]). In [34] wird ein konsequenter Tensorproduktansatz zur Berechnung des Fehlers verwendet. Ein wichtiges Ziel dieser Arbeit ist die Gemeinsamkeiten dieser Beweise herauszuarbeiten. Das Ergebnis ist der Konvergenzsatz 2.1 im Abschnitt 2.1. Dieser kann auf viele verschiedene Problemstellungen angewendet werden. Hierfür ist es nur notwendig zu beweisen, daß die Voraussetzungen des Konvergenzsatz 2.1 erfüllt sind. Diese Beweise sind je nach Problemstellung jedoch sehr unterschiedlich.

2. Interpolationseigenschaften dünner Gitter. Man kann Funktionen auf dünnen Gittern mit finiten Elementen verschiedener Ordnung interpolieren. In [9] oder [41] wird zum Beispiel eine Interpolation mit multilinearen finiten Elementen beschrieben, während in [1] oder [24] eine Interpolation mit stückweise konstanten Funktionen definiert wird. Zur Definition des Dünngitterinterpolanten wird in diesen Arbeiten immer eine geeignete hierarchische Basis verwendet. Wir werden hier eine andere Beweistechnik wählen, die auf der Kombinationsformel und der Produktdarstellung des hierarchischen Überschusses beruht (siehe Abschnitt 2.1 und 2.2.2). Erst im Abschnitt 2.3.4 werden wir den Zusammenhang mit der hierarchischen Basis darstellen.

Den Fehler bei der Dünngitterinterpolation zeigen die Sätze 2.2, 2.3 und 2.4. Der Unterschied zwischen den Fehlerabschätzungen in diesen Sätzen und den in [9] bewiesenen Fehlerabschätzungen sind die notwendigen Glattheitsvoraussetzungen. In [9] wurde bewiesen, daß der Fehler der Dünngitterinterpolation mit multilinearen finiten Elementen in der H^1-Norm $O(h)$ ist, falls die gemischten Ableitungen der zu interpolierenden Funktion bis zum Grad $2d$ stetig sind. In Satz 2.2 wird ein Fehler der Ordnung $O(h)$ unter schwächeren Voraussetzungen bewiesen. Hier wird verlangt, daß die gemischten Ableitungen bis zum Grad $d+2$ stetig sind. Man kann dieses Resultat auch erhalten, wenn die Ableitungen der Funktion nur im L^2-Sinne beschränkt sind. Ab der Dimension $d = 4$ muß man hierzu jedoch eine sogenannte „Quasiinterpolation“ verwenden (siehe Satz 2.2 und 2.4).

3. Beweis der globalen Konvergenz der Kombinationstechnik. Wie oben beschrieben, besteht die Kombinationstechnik aus einer Linearkombination von mehreren Vollgitterlösungen. In [8] wird eine punktweise Konvergenz der Kombinationstechnik von der Ordnung $O(h^2 \log h^{-1})$ für das Laplace-Problem bewiesen. Hierbei ist h die kleinste Maschenweite, die zur Konstruktion einer der Vollgitterlösungen verwendet wird.

In dieser Arbeit wird ein anderer Beweis zur Konvergenz der Kombinationstechnik dargestellt. Dieser Beweis verwendet geeignete Sobolev-Räume und liefert für allgemeine elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung einen Konvergenzbeweis in der H^1- und L^2-Norm von der Ordnung $O(h)$ und $O(h^2 \log h^{-1})$ (siehe Satz 4.1).

Für diesen Beweis werden mehrere Superkonvergenzresultate benötigt. Eines von diesen ist die Superkonvergenz des Gradienten. Ähnliche Superkonvergenzresultate findet man zum Beispiel in [25]. Diese bekannten Superkonvergenzresultate reichen jedoch nicht für einen Beweis der Konvergenz der Kombinationstechnik aus, so daß neue Superkonvergenzresultate entwickelt werden mußten. Diese neuen Superkonvergenzresultate beruhen im wesentlichen auf der diskreten Ableitung von Gleichungen in der schwachen Form (siehe Satz 4.2).

4. Adaptive Kombinationstechnik. Um die Konvergenz der Kombinationstechnik zu beweisen, benötigt man gewisse Glattheitsvoraussetzungen. Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Konvergenz verhält, wenn diese Glattheitsvoraussetzungen nicht erfüllt sind. Natürlich sinkt die Konvergenz der Kombinationstechnik, falls die Lösung der elliptischen Differentialgleichung eine Singularität besitzt. Um die Konvergenz der Kombinationslösung zu verbessern, haben wir eine adaptive Erweiterung der Kombinationstechnik entwickelt. Diese wird in den Abschnitten 2.3.3 und 4.4 beschrieben. Es ist zwar noch nicht ganz klar, was für eine Konvergenzordnung man bei diesem adaptiven Verfahren erhält, aber alle numerischen Ergebnisse weisen mindestens auf eine Konvergenz der Ordnung $O(h^{1.5})$ hin. Die gute Parallelisierbarkeit der Kombinationstechnik (vgl. [17]) bleibt bei der adaptive Erweiterung erhalten. Auch bei stark lokal verfeinerten Gittern führt die Parallelisierung der Kombinationstechnik immer zu einer gleichmäßigen Lastverteilung. Bei herkömmlichen Verfahren ist dies nur schwer zu erreichen.

5. Diskretisierung von variablen Koeffizienten beim Galerkin-Ansatz. In [1] wird beschrieben, wie man die d-dimensionale Helmholtz-Gleichung und auch parabolische Differentialgleichungen mit Hilfe des Galerkin-Ansatzes diskretisieren kann. Es wurden aber auch andere Differentialgleichungen wie die Stokes-Gleichung und die biharmonische Gleichung mit dünnen Gittern diskretisiert (siehe [35] und [43]). Die meisten dieser Diskretisierungen kann man jedoch nur dann verwenden, wenn die Koeffizienten in der partiellen Differentialgleichung konstant sind. Der Grund hierfür ist, daß bei der Diskretisierung variabler Koeffizienten mit dünnen Gittern ein Problem entsteht, das bei vollen Gittern nicht auftritt. Dies wird in Abschnitt 5.1.1 erklärt. Eine Diskretisierung, die dieses Problem vermeidet, ist einerseits die Diskretisierung mit Interpolation der variablen Koeffizienten und andererseits die Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität. Man kann diese Diskretisierungen aber auch zusammen verwenden. Die Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität wurde nur für den 2-dimensionalen Fall entwickelt.

In Abschnitt 5.1.2 wird die Konvergenz der Diskretisierung mit Interpolation der variablen Koeffizienten unter sehr allgemeinen Voraussetzungen bewiesen. Insbesondere wird in diesem Abschnitt nicht gefordert, daß die zur elliptischen Differentialgleichung gehörige Bilinearform H_0^1-elliptisch ist. In Abschnitt 5.1.4 wird bewiesen, daß die Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität in der H^1-Norm mit der Ordnung $O(h \log h^{-1})$ konvergiert. Die numerischen Ergebnisse in Abschnitt 5.4 bestätigen dies.

6. Mehrgitterverfahren für den Galerkin-Ansatz. Zur Lösung des linearen Gleichungssystems, das aus einer Diskretisierung auf dünnen Gittern entsteht, kann man natürlich viele der bekannten iterativen Löser wie zum Beispiel das Gauß-Seidel-Verfahren und das cg-Verfahren verwenden (siehe [1] und [9]). Wichtig ist aber, daß das Gleichungssystem schnell gelöst wird, da sonst die Vorteile des dünnen Gitters verloren gehen. Deswegen ist es notwendig, ein Mehrgitterverfahren zu verwenden. Beispiele solcher Mehrgitterverfahren sind der in [18] beschriebene additive Schwarz-Vorkonditionierer, das multiplikative Mehrgitterverfahren in [32] und der in [10] erklärte Algorithmus. Der additive Schwarz-Vorkonditionierer auf dünnen Gittern besitzt ähnliche Eigenschaften wie der additive Schwarz-Vorkonditionierer auf vollen Gittern. Das heißt, daß er zum Beispiel langsamer als ein multiplikatives Mehrgitterverfahren ist und Schwierigkeiten bei nicht symmetrischen Problemen auftreten können. Das in [10] beschriebe Mehrgitterverfahren verwendet ein ‚semi-coarsening‘ und eine Kombination von Grobgitterkorrekturen ähnlich wie in [29]. Insofern unterscheidet sich dieser Algorithmus von dem Mehrgitterverfahren in [32]. Letzterer verwendet einen sogenannten Q-Zyklus. Dieser Zyklus besteht aus mehreren V-Zyklen in einer Richtung. Hierbei wird immer von einer aktuellen Näherungslösung ausgegangen. Je nachdem, in welcher Ebene sich der Mehrgitterzyklus befindet, wird eine Korrektur in Richtung des zu dieser Ebene gehörigen Teilraumes vorgenommen. Insofern ist dieses Mehrgitterverfahren eine ‚Multilevel Projection Method‘ (siehe [27]).

Da der Q-Zyklus eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit besitzt, verwenden wir ihn in dieser Arbeit zur iterativen Lösung der Gleichungssysteme, die bei der Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen entstehen. Wir werden hier nur den 2-dimensionalen Fall betrachten. Eine Verallgemeinerung auf den höher dimensionalen Fall muß noch entwickelt werden.

Die Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität besitzt gerade im Zusammenhang mit dem Q-Zyklus zur Lösung eines Dünngittergleichungssystems sehr vorteilhafte Eigenschaften. Die bei dieser Diskretisierung enstehende Steifigkeitsmatrix läßt sich wie bei vollen Gittern mit 9-Punkte-Sternen abspeichern. Die einzelnen V-Zyklen des Q-Zyklus kann man dann genauso wie bei vollen Gittern durchführen. Diese interessante Eigenschaft des Q-Zyklus im Zusammenhang mit der Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität wird in den Abschnitten 5.3 und 5.3.2 genauer erklärt. Der Q-Zyklus und die Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität wurden für allgemeine elliptische Differentialgleichungen auf adaptiven dünnen Gittern implementiert.

7. Konvergenz des Galerkin-Ansatzes in negativen Normen. Bei der Untersuchung der Konvergenz der Galerkin-Diskretisierung auf dünnen Gittern wurde in [9] eine Konvergenz der Ordnung $O(h)$ in der H^1-Norm bei multilinearen finiten Elementen bewiesen. Die Dünngitterinterpolation besitzt die gleiche Fehlerordnung. Insofern konnte eine optimale Konvergenzordnung in der H^1-Norm bewiesen werden. Für die L^∞- und die L^2-Norm ist dies bis jetzt noch nicht gelungen. Eine weitere Norm, in der eine optimale Konvergenzordnung bewiesen werden konnte, ist eine negative Norm. Diese Norm und der zugehörige Konvergenzbeweis der Galerkin-Diskretisierung ist in Abschnitt 5.2 dargestellt.

In dieser Arbeit gehen wir nicht darauf ein, wie man krummlinig berandete Gebiete im Zusammenhang mit dünnen Gittern behandeln kann. Es gibt jedoch verschiedene Ansätze, die zeigen, daß man sowohl die Kombinationstechnik als auch den Galerkin-Ansatz auf krummlinig berandeten Gebieten verwenden kann. Diese Ansätze werden in [13], [20] und [32] beschrieben.

Für das Verständnis dieser Arbeit sind folgende Vereinbarungen bezüglich der Notation wichtig.

Für jeden Multiindex $I = (i_1, i_2, \cdots, i_d) \in \mathbb{R}^d$ und jedes $a \in \mathbb{R}^+$ sei

$$\begin{aligned} |I| &:= i_1 + i_2 + \cdots + i_d, \\ a^I &:= \left(a^{i_1}, \cdots, a^{i_d}\right) \quad \text{und} \\ \overline{a} &:= (a, a, \cdots, a) \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Es seien F_l und F_r Funktionen $\mathcal{W} \to \mathbb{R}$. Wir schreiben

$$F_l(w) \stackrel{\sim}{<} F_r(w) \quad \text{für alle} \quad w \in \mathcal{W}$$

falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß gilt

$$F_l(w) < C F_r(w) \quad \text{für alle} \quad w \in \mathcal{W}.$$

Im allgemeinen werden wir den d-dimensionalen Fall betrachten. Die Dimension wird dann meistens durch einen Index angegeben. Für reguläre dünne Gitter im d-dimensionalen Raum schreiben wir zum Beispiel $\mathcal{D}_n^d$. Falls der Index d weggelassen wird, ist der 2-dimensionale Fall gemeint. Das heißt zum Beispiel

$$\mathcal{D}_n := \mathcal{D}_n^2.$$

Des weiteren soll immer folgende Beziehung zwischen $n \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathbb{R}$ bestehen:

$$h = 2^{-n}.$$

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinen Kollegen Thomas Dornseifer und Dr. Ulrich Rüde für die wissenschaftliche Zusammenarbeit bedanken. Für die Korrektur des Manuskriptes bedanke ich mich bei Ralf Hiptmair und Tilman Neunhoeffer.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Christoph Zenger für die Überlassung des sehr interessanten Themas, dessen Bearbeitung mir viel Freude bereitet hat. Durch viele anregende Diskussionen hat er wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Kapitel 2

Grundlegende Eigenschaften dünner Gitter

2.1 Konvergenz der Kombinationslösung

Die Beweise für die Approximationseigenschaften dünner Gitter sind je nach Problemstellung etwas unterschiedlich. Es stellt sich jedoch heraus, daß ein bestimmter Beweiskern immer gleich ist. Dieser wird im Konvergenzsatz 2.1 allgemein dargestellt. Mit Hilfe dieses Konvergenzsatzes erhält man leicht den Interpolationsfehler bei der Dünngitterinterpolation (siehe Kapitel 2.2) oder die Konvergenzordnung der Kombinationstechnik zur Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen (siehe Kapitel 4), falls die Größe des sogenannten „hierarchischen Überschusses" abgeschätzt werden kann.

Es sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$ und $(u_I)_{I\in\mathbb{N}^d}$ eine Mehrfachfolge in $\mathcal{B}$, wobei I ein Multiindex ist.

Bei den folgenden Summationen gelte für die Multiindizes I und K immer

$$\begin{aligned} I = (i_1, i_2, \cdots, i_d) &\in \mathbb{N}_0^d \quad \text{und} \\ K = (k_1, k_2, \cdots, k_d) &\in \{1, \cdots, n+1\}^d. \end{aligned}$$

Der hierarchische Überschuß der Mehrfachfolge $(u_I)_{I\in\mathbb{N}^d}$ ist definiert durch

$$v_I := \sum_{J\in\{0,1\}^d} (-1)^{|J|} u_{I-J}. \tag{2.1}$$

Hierbei setzen wir

$$u_{i_1,\cdots,i_d} = 0 \quad \text{falls für einen Index } i_k \text{ gilt:} \quad i_k = 0.$$

Somit ist der hierarchische Überschuß v_I für alle $I \in \mathbb{N}^d$ wohldefiniert.

Die Kombinationslösung der Mehrfachfolge $(u_I)_{I\in\mathbb{N}^d}$ wird durch folgende Kombinationsformel definiert

$$u_n^\kappa := \sum_{s=1}^{d}(-1)^{s+1}\binom{d-1}{s-1}\sum_{|K|=n+d-s} u_K. \tag{2.2}$$

In dieser Summe haben wir den Index K aus $\{1,\cdots,n+1\}^d$ gewählt. Wegen $|K| = n+d-s$ muß aber $k_i \leq n$ für alle $i = 1,\cdots,d$ sein. Daher kann man auch schreiben

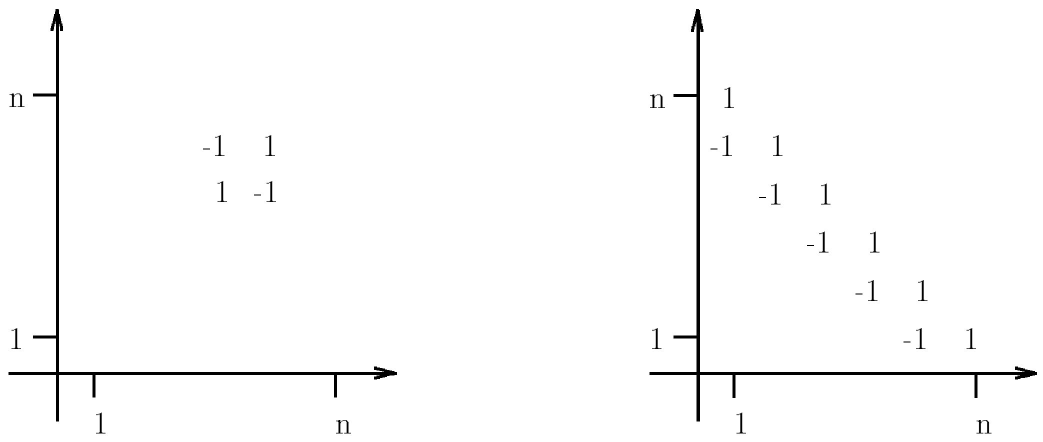
$$u_n^\kappa = \sum_{s=1}^{d}(-1)^{s+1}\binom{d-1}{s-1}\sum_{\substack{|I|=n+d-s\\ I\in\mathbb{N}^d}} u_I = \sum_{s=1}^{d}(-1)^{s+1}\binom{d-1}{s-1}\sum_{\substack{|I|=n+d-s\\ I\in\{1,\cdots,n\}^d}} u_I.$$

Beispiel 2.1 *Im 2-dimensionalen Raum besitzt der hierarchische Überschuß und die Kombinationsformel folgende Darstellung:*

$$v_{(i_1,i_2)} := u_{(i_1,i_2)} + u_{(i_1-1,i_2-1)} - u_{(i_1,i_2-1)} - u_{(i_1-1,i_2)} \quad \textit{und} \tag{2.3}$$

$$u_n^\kappa := \sum_{k=1}^{n} u_{(k,n+1-k)} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{(k,n-k)}. \tag{2.4}$$

Die Abbildung 2.1 verdeutlicht diese Formeln graphisch.



hierarchischer Überschuß Kombinationsformel

Abbildung 2.1: Hierarchischer Überschuß und Kombinationsformel im 2-dimensionalen Raum

Wir erhalten nun folgenden grundlegend wichtigen Konvergenzsatz:

Satz 2.1 (Konvergenz der Kombinationslösung) *Es sei $(u_I)_{I\in\mathbb{N}^d}$ eine Mehrfachfolge aus dem Banachraum $\mathcal{B}$ und u_n^κ die durch (2.2) definierte Kombinationslösung. Für den durch (2.1) definierten hierarchischen Überschuß v_I gelte*

$$\|v_I\| \lesssim 2^{-|I|}$$

für alle I. Dann konvergieren die Folge $(u_n^\kappa)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Diagonalfolge $(u_{\overline{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den selben Wert $u \in \mathcal{B}$. Außerdem gilt:

1. *Falls $\|v_I\| \leq C2^{-|I|}$ für alle I und eine Konstante C, dann folgt*

$$\|u - u_n^\kappa\| \leq C'C2^{-n}n^{d-1}$$

   für alle n und eine Konstante C', welche unabhängig von n und C ist.

2. *Es sei $1 \leq k \leq d$.*
   Falls $\|v_I\| \leq C2^{-|I|} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}}$ für alle I und eine Konstante C, dann folgt

$$\|u - u_n^\kappa\| \leq C'C2^{-n(1+\frac{k}{d})}n^{k-1}$$

   für alle n und eine Konstante C', welche unabhängig von n und C ist.

3. *Es sei $1 \leq k \leq d$.*
   Falls $\|v_I\| \leq C2^{-|I|} \min_{1\leq l\leq d, l\neq k} 2^{-i_l}$ für alle I und eine Konstante C, dann folgt

$$\|u - u_n^\kappa\| \leq C'C2^{-n}$$

   für alle n und eine Konstante C', welche unabhängig von n und C ist.

Hierbei ist $I = (i_1, \cdots, i_d) \in \mathbb{N}^d$. Die in diesen Ordnungsabschätzungen vorkommenden Konstanten sind unabhängig von n aber nicht unbedingt von d.

Beweis: Zuerst ist eine Vorbemerkung notwendig. Die Indizes K, K', $\tilde{I}$, I, I', J und J' seien im folgenden immer aus den Indexmengen

$$\begin{aligned}
K = (k_1, \cdots, k_d) &\in \{1, \cdots, n+1\}^d, \\
K' = (k_1, \cdots, k_{d-1}) &\in \{1, \cdots, n+1\}^{d-1}, \\
\tilde{I} = (\tilde{i}_1, \cdots, \tilde{i}_d), \quad I = (i_1, \cdots, i_d) &\in \mathbb{N}^d, \\
I' = (i_1, \cdots, i_{d-1}) &\in \mathbb{N}^{d-1}, \\
J = (j_1, \cdots, j_d) &\in \{0,1\}^d \quad \text{und} \\
J' = (j_1, \cdots, j_{d-1}) &\in \{0,1\}^{d-1}.
\end{aligned}$$

Wir werden den Beweis in mehrere Schritte unterteilen. Für den 2-dimensionalen Raum ist der Beweis etwas einfacher. Einige der folgenden Beweisschritte kann man sich daher leicht mit Hilfe der Abbildung 2.1 veranschaulichen.

1. Schritt: Es gilt:

$$\sum_K v_K = u_{\overline{n+1}}. \tag{2.5}$$

Beweis: Diese Formel erhält man mit Beweis durch Induktion nach d. Induktionsbeginn und Induktionsschluß folgen aus

$$\begin{aligned}\sum_K v_K &= \sum_K \sum_{J\in\{0,1\}^d} (-1)^{|J|} u_{K-J} = \\ &= \sum_{K'} \sum_{J'\in\{0,1\}^{d-1}} (-1)^{|J'|} \sum_{k_d=1}^{n+1} \left(u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},k_d)} - u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},k_d-1)}\right) \\ &= \sum_{K'} \sum_{J'\in\{0,1\}^{d-1}} (-1)^{|J'|} u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},n+1)}.\end{aligned}$$

q.e.d.

2. Schritt: Diesen Schritt wollen wir als Lemma formulieren, da wir dessen Ergebnis später noch benötigen.

Lemma 2.1 *Es gilt:*

$$\sum_{|K|\geq n+d} v_K = u_{\overline{n+1}} - u_n^\kappa. \tag{2.6}$$

Beweis: Mit Hilfe von (2.5) für die Dimension $d-1$ folgt

$$\begin{aligned}\sum_{|K|\geq n+d} v_K &= \sum_{|K|\geq n+d} \sum_{J\in\{0,1\}^d} (-1)^{|J|} u_{K-J} = \\ &= \sum_{J\in\{0,1\}^d} (-1)^{|J|} \left\{ \sum_{|K'|=d-1}^{n+d-2} \sum_{k_d=n+d-|K'|}^{n+1} u_{K-J} + \sum_{|K'|\geq n+d-1} \sum_{k_d=1}^{n+1} u_{K-J} \right\} = \\ &= \sum_{J'\in\{0,1\}^{d-1}} (-1)^{|J'|} \cdot \\ &\quad \left\{ \sum_{|K'|=d-1}^{n+d-2} \sum_{k_d=n+d-|K'|}^{n+1} \left(u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},k_d)} - u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},k_d-1)}\right) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{|K'|\geq n+d-1} \sum_{k_d=1}^{n+1} \left(u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},k_d)} - u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},k_d-1)}\right) \right\} = \\ &= \sum_{J'\in\{0,1\}^{d-1}} (-1)^{|J'|} \cdot \\ &\quad \left\{ \sum_{|K'|=d-1}^{n+d-2} \left(u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},n+1)} - u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},n+d-|K'|-1)}\right) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{|K'|\geq n+d-1} u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},n+1)} \right\} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{J' \in \{0,1\}^{d-1}} (-1)^{|J'|} \cdot \\
&\quad \left\{ \sum_{K'} u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},n+1)} - \sum_{|K'|=d-1}^{d+n-2} u_{(k_1-j_1,\cdots,k_{d-1}-j_{d-1},n+d-|K'|-1)} \right\} = \\
&= u_{\overline{n+1}} - \sum_{J' \in \{0,1\}^{d-1} \wedge j_d=0} (-1)^{|J|} \sum_{|K|=n+d-1} u_{K-J}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\sum_{|K| \geq n+d} v_K = u_{\overline{n+1}} - \sum_{J' \in \{0,1\}^{d-1} \wedge j_d=0} (-1)^{|J|} \sum_{|K|=n+d-1} u_{K-J}. \tag{2.7}$$

Die letzten beiden Summen wollen wir in eine andere Form bringen. Hierzu sei $|K| = n + d - s$ mit $1 \leq s \leq d$. Es gibt

$$\binom{d-1}{s-1}$$

Möglichkeiten für Indizes $J' \in \{0,1\}^{d-1}$ mit $|J'| = s - 1$. Für jeden solchen Index gilt $|K + J| = n + d - 1$, wobei wir $j_d = 0$ setzen. Daher folgt

$$\sum_{J' \in \{0,1\}^{d-1} \wedge j_d=0} (-1)^{|J|} \sum_{|K|=n+d-1} u_{K-J} = \sum_{s=1}^{d} (-1)^{s+1} \binom{d-1}{s-1} \sum_{|K|=n+d-s} u_K = u_n^\kappa.$$

Zusammen mit (2.7) erhalten wir somit die Behauptung. *q.e.d.*

Wir nehmen nun an, daß es eine Konstante C_0 gibt, so daß gilt

$$\|v_I\| \leq C_0 \; 2^{-|I|}. \tag{2.8}$$

3. Schritt: Es gilt

$$\sum_{|K| \geq n+d} \|v_K\| \leq C_1 C_0 2^{-n} n^{d-1} \tag{2.9}$$

für alle n und eine Konstante C_1, welche unabhängig von n und C_0 ist.

Beweis: Die Mächtigkeit der Menge der Indizes K deren Summe eine fest vorgegebene Zahl $s \in \mathbb{N}$ ergibt, läßt sich in folgender Weise abschätzen

$$\left| \left\{ K \middle| \; |K| = s \right\} \right| \leq s^{d-1}. \tag{2.10}$$

Dies erhält man leicht mit Beweis durch Induktion. Hieraus folgt nun wegen (2.8)

$$\sum_{|K| \geq n+d} \|v_K\| \;\leq\; \sum_{|K| \geq n+d} C_0 \; 2^{-|K|} \leq C_0 \sum_{s=n+d}^{\infty} 2^{-s} s^{d-1} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \; C_0 \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-(s+n+d)}(s+n+d)^{d-1} \leq \\ &\leq \; 2^{-n} n^{d-1} C_0 2^{-d} d^{d-1}((d-1)!)^2 \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} s^{d-1}. \end{aligned}$$

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} s^{d-1}$ folgt leicht aus dem Quotientenkriterium. Damit ist (2.9) bewiesen. *q.e.d.*

4. Schritt: Die Folgen $(u_n^\kappa)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(u_{\overline{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen denselben Wert $u \in \mathcal{B}$ und es gilt

$$\|u - u_n^\kappa\| \leq C_2 C_0 2^{-n} n^{d-1}$$

für alle n und eine Konstante C_2, welche unabhängig von n und C_0 ist.

Beweis: Wegen (2.5) und (2.9) folgt

$$\left\| u_{\overline{n+1}} - u_{\overline{n}} \right\| = \left\| \sum_{\max(K)=n+1} v_K \right\| \leq \sum_{|K|\geq n+d} \|v_K\| \leq C_1 C_0 2^{-n} n^{d-1}.$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe kann man hieraus bekanntlich beweisen, daß $(u_{\overline{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, die gegen einen Wert $u \in \mathcal{B}$ konvergiert. Außerdem zeigt dies, daß es eine Konstante C_3 unabhängig von n und C_0 gibt, so daß gilt

$$\|u - u_{\overline{n}}\| \leq C_3 C_0 2^{-n} n^{d-1}.$$

Aus (2.6) und (2.9) folgt

$$\|u_{\overline{n+1}} - u_n^\kappa\| \leq C_1 C_0 2^{-n} n^{d-1}.$$

Daher gibt es eine Konstante C_2 unabhängig von n und C_0, so daß gilt

$$\|u - u_n^\kappa\| \leq C_2 C_0 2^{-n} n^{d-1}.$$

Dies zeigt, daß auch die Kombinationslösung u_n^κ gegen u konvergiert. *q.e.d.*

5. Schritt: Es sei $1 \leq k \leq d$ und $p \geq d$, wobei $k, p \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Konstante $\hat{C}$ unabhängig von p, so daß gilt

$$\sum_{|I|=p} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^{k} i_{l_s}} \leq \hat{C} 2^{-\frac{p}{d}k} p^{k-1}. \tag{2.11}$$

Beweis: Es sei $w \in \mathbb{N}$ die kleinste ganze Zahl, so daß gilt

$$p < dw. \tag{2.12}$$

Daher ist $0 < dw - p \leq d$. Für einen Index I mit $|I| = p$ sei
$\tilde{I} = I + (dw - p, 0, \cdots, 0)$. Dann gilt natürlich $|\tilde{I}| = dw$ und

$$\min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}} \leq 2^d \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k \tilde{i}_{l_s}}.$$

Dies zeigt

$$\sum_{|I|=p} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}} \leq 2^d \sum_{|I|=dw} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}}.$$

Außerdem gilt wegen $-w < -\frac{p}{d}$ und $w \leq 1 + \frac{p}{d}$

$$2^{-wk} w^{k-1} \leq k!\ 2^{-\frac{p}{d}k} p^{k-1}.$$

Es reicht also zu zeigen, daß es eine Konstante $\hat{C}$ unabhängig von w gibt, so daß gilt

$$\sum_{|I|=dw} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}} \leq \hat{C} 2^{-wk} w^{k-1}. \tag{2.13}$$

Für $0 \leq r < \infty$ sei

$$S_{r,w} := \left\{ I \,\middle|\, |I| = dw, \max_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} \sum_{s=1}^k i_{l_s} = kw + r \right\}.$$

Für einen Index I mit $|I| = dw$ muß es auf jeden Fall $\{l_1, \cdots, l_k\} \subset \{1, \cdots, d\}$ geben, so daß gilt

$$\sum_{s=1}^k i_{l_s} \geq kw.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \sum_{|I|=dw} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}} &= \sum_{r=0}^\infty \sum_{I\in S_{r,w}} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}} = \\ &= \sum_{r=0}^\infty \sum_{I\in S_{r,w}} 2^{-(kw+r)} = 2^{-kw} \sum_{r=0}^\infty |S_{r,w}| 2^{-r}. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, es gibt eine Konstante $\tilde{C}$ unabhängig von r und w, so daß gilt

$$|S_{r,w}| \leq \tilde{C} w^{k-1} r^{d-k}. \tag{2.14}$$

Dann erhalten wir

$$\sum_{|I|=dw} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}} \leq 2^{-kw} \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{C} w^{k-1} r^{d-k} 2^{-r} \leq 2^{-kw} w^{k-1} \tilde{C} \sum_{r=0}^{\infty} r^{d-k} 2^{-r}.$$

Die letzte Reihe konvergiert wegen dem Quotientenkriterium. Damit ist (2.13) bewiesen. Es reicht also (2.14) zu zeigen.

Es sei $I \in S_{r,w}$. Durch Vertauschen der Indizes kann man erreichen, daß die i_s der Größe nach geordnet sind. Das heißt

$$i_1 \geq \cdots \geq i_d.$$

Daher gilt

$$\sum_{s=1}^{d} i_s = dw \quad \text{und} \tag{2.15}$$

$$\sum_{s=1}^{k} i_s = kw + r. \tag{2.16}$$

Wegen (2.15) folgt

$$i_s \leq dw \quad \text{falls} \quad 1 \leq s \leq k. \tag{2.17}$$

Außerdem gilt

$$i_s \leq w + \frac{r}{k} \quad \text{falls} \quad k+1 \leq s \leq d. \tag{2.18}$$

Dies beweisen wir nun mit einer Widerspruchsannahme. Falls (2.18) nicht gilt, dann folgt, da die Indizes i_s der Größe nach geordnet wurden,

$$\sum_{s=1}^{k} i_s > \left(w + \frac{r}{k}\right) k = kw + r.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (2.16). Daher ist (2.18) richtig.

Aus den Ungleichungen (2.15), (2.16) und (2.18) folgt nun für $k+1 \leq s' \leq d$

$$\begin{aligned} i_{s'} - w &= \sum_{s=1}^{d}(i_s - w) - \sum_{s=1}^{k}(i_s - w) - \sum_{\substack{s = k+1 \\ s \neq s'}}^{d} (i_s - w) \geq \\ &\geq -r - (d-k-1)\frac{r}{k} \geq -r\left(1 + \frac{d}{k}\right) \geq -2dr. \end{aligned}$$

Zusammen mit (2.18) folgt also

$$|i_s - w| \leq 2dr \quad \text{falls} \quad k+1 \leq s \leq d. \tag{2.19}$$

Nun können wir die Mächtigkeit von $S_{r,w}$ abschätzen. Wegen (2.16) und (2.17) gibt es maximal $(dw)^{k-1}$ Möglichkeiten für die Indizes $i_1, \cdots, i_k$. Wegen (2.19) gibt es maximal $(5dr)^{d-k}$ Möglichkeiten für die Indizes $i_{k+1}, \cdots, i_d$. Die Indizes von I wurden der Größe nach geordnet. Es gibt insgesamt $d!$ Möglichkeiten die Indizes zu vertauschen. Daher erhalten wir

$$|S_{r,w}| \leq (dw)^{k-1}(5dr)^{d-k}d! = \left(d^{k-1}(5d)^{d-k}d!\right) w^{k-1}r^{d-k}.$$

Das ist die Ungleichung (2.14). *q.e.d.*

6. Schritt: Teil 2 des Satzes ist richtig.

Beweis: Es sei $1 \leq k \leq d$ und es gelte für eine Konstante C_4

$$\|v_I\| \leq C_4\ 2^{-|I|} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}}.$$

Wegen (2.11) folgt daher

$$\begin{aligned}
\sum_{|K|\geq n+d} \|v_K\| &\leq \sum_{|I|\geq n+d} \|v_I\| \leq \\
&\leq \sum_{|I|\geq n+d} C_4\ 2^{-|I|} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}} \leq \\
&\leq C_4 \sum_{p=n+d}^{\infty} 2^{-p} \sum_{|I|=p} \min_{\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}} 2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}} \leq \\
&\leq C_4 \sum_{p=n+d}^{\infty} 2^{-p}\hat{C}2^{-\frac{p}{d}k}p^{k-1} \leq \\
&\leq 2^{-n}2^{-\frac{n}{d}k}n^{k-1}\left((k-1)!\ C_4\hat{C}\sum_{p=d}^{\infty} 2^{-p}2^{-\frac{p}{d}k}p^{k-1}\right) = \\
&= 2^{-n(1+\frac{k}{d})}n^{k-1}\left((k-1)!\ C_4\hat{C}\sum_{p=d}^{\infty} 2^{-p}2^{-\frac{p}{d}k}p^{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung konvergiert wegen dem Quotientenkriterium. Der Teil 2 des Satzes folgt nun analog wie im *4. Schritt.* *q.e.d.*

7. Schritt: Teil 3 des Satzes ist richtig.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, können wir aus Symmetriegründen $k = d$ setzen. Daher gibt es eine Konstante C_5, so daß gilt

$$\|v_I\| \leq C_5 2^{-|I|} \min_{1\leq l\leq d-1} 2^{-i_l}.$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{|K|\geq n+d} \|v_K\| &\leq \sum_{|I|\geq n+d} \|v_I\| \leq \\
&\leq \sum_{|I|\geq n+d} C_5 2^{-|I|} \min_{1\leq l\leq d-1} 2^{-i_l} = \\
&= \sum_{w=n+d}^{\infty} \sum_{w=|I|} C_5 2^{-|I|} \min_{1\leq l\leq d-1} 2^{-i_l} = \\
&= C_5 2^{-n} \sum_{w=d}^{\infty} 2^{-w} \sum_{|I|=w+n} \min_{1\leq l\leq d-1} 2^{-i_l} = \\
&= C_5 2^{-n} \sum_{w=d}^{\infty} 2^{-w} \sum_{i_d=1}^{w+n} \sum_{|I'|=w+n-i_d} \min_{1\leq l\leq d-1} 2^{-i_l}.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung (2.11) für die Dimension $d-1$ und $k=1$ ist

$$\sum_{|I'|=p} \min_{1\leq l\leq d-1} 2^{-i_l} \leq \hat{C} 2^{-\frac{p}{d-1}}.$$

Zusammen erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{|K|\geq n+d} \|v_K\| &\leq 2^{-n} C_5 \sum_{w=d}^{\infty} 2^{-w} \sum_{i_d=1}^{w+n} \hat{C} 2^{-\frac{w+n-i_d}{d-1}} \leq \\
&\leq 2^{-n} C_5 \sum_{w=d}^{\infty} 2^{-w} \sum_{s=0}^{w+n-1} \hat{C} 2^{-\frac{s}{d-1}} \leq \\
&\leq 2^{-n} C_5 \hat{C} \sum_{w=d}^{\infty} 2^{-w} \left(1 - 2^{-\frac{1}{d-1}}\right)^{-1} \leq \\
&\leq 2^{-n} C_5 \hat{C} \left(1 - 2^{-1}\right)^{-1} \left(1 - 2^{-\frac{1}{d-1}}\right)^{-1} = O(2^{-n}).
\end{aligned}$$

Der Teil 3 des Satzes folgt nun analog wie im *4. Schritt.* **q.e.d.**

2.2 Dünngitterinterpolation

2.2.1 Geeignete Räume

Um den Interpolationsfehler der Dünngitterinterpolation berechnen zu können, benötigen wir geeignete Räume. Bei diesen Räumen müssen nicht alle Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung beschränkt sein, sondern nur alle gemischten Ableitungen. Ähnliche Räume wurden von Nikol'skiĭ in [30] und Šarygin in [37] definiert.

Für $l \in \mathbb{N}$ definieren wir den Raum

$$\begin{aligned} H^{G,l}(\Omega^d) &:= \Big\{ f \in L^2(\Omega^d) \Big| D^\alpha f \in L^2(\Omega^d), \\ &\qquad \text{wobei} \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| \le l \quad \text{und} \quad \max(\alpha) < \frac{l}{d} + 1 \Big\} \end{aligned}$$

mit Norm

$$\|f\|_{H^{G,l}} := \left\{ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| \le l, \\ \max(\alpha) < \frac{l}{d}+1}} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Räume verwenden wir zur Abschätzung des Interpolationsfehlers bei einer Interpolation mit stückweise multilinearen Funktionen. Bei einer Interpolation mit stückweise konstanten Funktionen verwenden wir folgende Räume

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{G,l}(\bar{\Omega}^d) &:= \Big\{ f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d) \Big| D^\alpha f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d), \\ &\qquad \text{wobei} \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| \le l \quad \text{und} \quad \max(\alpha) < \frac{l}{d} + 1 \Big\} \end{aligned}$$

mit Norm

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{G,l}} := \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| \le l, \\ \max(\alpha) < \frac{l}{d}+1}} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Zur Untersuchung der Interpolation mit stückweise konstanten Funktionen benötigen wir außerdem noch die Räume

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{\Omega}^d) &:= \Big\{ f : \bar{\Omega}^d \to \mathbb{R} \Big\} \quad \text{und} \\ \mathcal{C}_i(\bar{\Omega}^d) &:= \Big\{ f \in \mathcal{F}(\bar{\Omega}^d) \Big| \; \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}, x_i \mapsto f(x_1, \cdots, x_d) \quad \text{ist stetig} \\ &\qquad \text{für fast alle } (x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_d) \in [0,1]^{d-1} \Big\}, \end{aligned}$$

wobei $1 \le i \le d$.

Beispiel 2.2 *Im 2-dimensionalen Raum haben diese Räume zum Beispiel folgende Form:*

$$\begin{aligned} H^{G,1}(\Omega) &= H^1(\Omega), \\ H^{G,2}(\Omega) &= \left\{ f \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L^2(\Omega) \right\}, \\ H^{G,3}(\Omega) &= \left\{ f \in H^2(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \in L^2(\Omega) \right\} \quad \textit{und} \\ H^{G,4}(\Omega) &= \left\{ f \in H^2(\Omega) \;\middle|\; \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \in L^2(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

2.2.2 Fehler der Dünngitterinterpolation

Für den Galerkin-Ansatz zur Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen ist es notwendig, die Approximationseigenschaften des verwendeten Finite-Elemente-Raumes genau zu untersuchen. Deswegen konstruieren wir in diesem Abschnitt Dünngitterinterpolanten und untersuchen deren Approximationseigenschaften. Die Dünngitterinterpolanten definieren dabei als Kombinationslösungen von geeigneten Vollgitterinterpolanten. Die Vollgitterinterpolanten wiederum werden aus mehreren 1-dimensionalen Interpolationen konstruiert.

Es sei $h = \frac{1}{N}$. Der 1-dimensionale stückweise lineare Interpolationsoperator ist

$$\begin{aligned} I_h^{lin} : \mathcal{C}([0,1]) &\rightarrow \mathcal{C}([0,1]) \\ I_h^{lin}(f)(ih+s) &\mapsto f(ih) + \frac{f((i+1)h) - f(ih)}{h} s \\ &\qquad \text{für } i = 0, \cdots, N-1 \text{ und } 0 \leq s \leq h \end{aligned}$$

und der 1-dimensionale stückweise konstante Interpolationsoperator ist

$$\begin{aligned} I_h^{kon} : \mathcal{C}([0,1]) &\rightarrow \mathcal{F}([0,1]) \\ I_h^{kon}(f)(ih+s) &\mapsto \frac{f(h) + f((i+1)h)}{2} \\ &\qquad \text{für } i = 0, \cdots, N-1 \text{ und } 0 < s \leq h \\ I_h^{kon}(f)(0) &\mapsto \frac{f(0) + f(h)}{2}. \end{aligned}$$

Im d-dimensionalen Raum kann man diese Operatoren in Richtung der i-ten Koordinate verwenden. Man erhält dann für $1 \leq i \leq d$ die Interpolationsoperatoren

$$\begin{aligned} I_{h,i}^{lin} : \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d) &\rightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d) \quad \text{und} \\ I_{h,i}^{kon} : \mathcal{C}_i(\bar{\Omega}^d) &\rightarrow \mathcal{F}(\bar{\Omega}^d). \end{aligned}$$

Diese Operatoren interpolieren also nur in Richtung der i-ten Koordinate. Man sieht leicht ein, daß diese Operatoren mit der Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j}$ vertauschen, falls $j \neq i$. Aus der Interpolationstheorie im 1-dimensionalen Raum ist bekannt, daß für die 1-dimensionalen Interpolationsoperatoren folgendes Lemma gilt:

Lemma 2.2 *Es sei $1 \leq i \leq d$. Es gibt eine Konstante C_{int} so daß gilt:*

1. *Falls $f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$, dann gilt $\|I_{h,i}^{lin}(f) - f\|_{L^2} \leq h C_{int} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^2}$.*

2. *Falls $f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$, dann gilt $\|I_{h,i}^{lin}(f) - f\|_{L^2} \leq h^2 C_{int} \left\| \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2}$.*

3. *Falls* $f, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$, *dann gilt* $\left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(I_{h,i}^{lin}(f) - f) \right\|_{L^2} \le hC_{int} \left\| \frac{\partial f^2}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2}$.

4. *Falls* $f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}_i(\bar{\Omega}^d)$, *dann gilt* $\|I_{h,i}^{kon}(f) - f\|_{L^\infty} \le hC_{int} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty}$.

Die Vollgitterinterpolationsoperatoren sind nun definiert durch

$$I_H^{lin} : \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d) \to \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d), \qquad I_H^{lin} := \prod_{i=1}^{d} I_{h_i,i}^{lin} \quad \text{und}$$

$$I_H^{kon} : \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d) \to \mathcal{F}(\bar{\Omega}^d), \qquad I_H^{kon} := \prod_{i=1}^{d} I_{h_i,i}^{kon},$$

wobei $H = (h_1, \cdots, h_d)$. Man prüft leicht nach, daß I_H^{kon} wohldefiniert ist. Die Operatoren I_H^{lin} und I_H^{kon} sind nichts anderes als die Standard-Interpolationsoperatoren auf dem vollen Gitter mit der Maschenweite $H = (h_1, \cdots, h_d)$.

Es sei nun I_H^{art} einer der beiden Interpolationsoperatoren I_H^{lin} oder I_H^{kon}. Für $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$ ist dann

$$u_I := I_{2^{-I}}^{art}(u)$$

eine Mehrfachfolge. Für diese können wir die in Abschnitt 2.1 definierte Kombinationslösung bilden. Dies ist der Dünngitterinterpolant

$$u_h^{art} := \sum_{s=1}^{d} (-1)^{s+1} \binom{d-1}{s-1} \sum_{|K|=n+d-s} I_{2^{-K}}^{art}(u), \tag{2.20}$$

wobei $h = 2^{-n}$ und $n \in \mathbb{N}$. Der Index K ist hierbei natürlich aus der Indexmenge $\mathbb{N}^d$.

Wichtig für die Berechnung des Fehlers der Kombinationslösung ist die Abschätzung der Größe des hierarchischen Überschusses (siehe Satz 2.1). Im Fall der Dünngitterinterpolation besitzt der hierarchische Überschuß eine besondere Darstellung, was diese Abschätzung sehr erleichtert. Diese Darstellung formulieren wir als Lemma.

Lemma 2.3 (Hierarchischer Überschuß) *Es sei* $I_{h,i}^{art}$ *einer der 1-dimensionalen Interpolationsoperatoren* $I_{h_i,i}^{lin}$ *oder* $I_{h_i,i}^{kon}$ *und* I_H^{art} *der entsprechende Vollgitterinterpolationsoperator* I_H^{lin} *beziehungsweise* I_H^{kon}. *Dann ist der hierarchische Überschuß der Mehrfachfolge* $(u_I)_{I \in \mathbb{N}^d}$:

$$v_I = \sum_{J \in \{0,1\}^d} (-1)^{|J|} I_{2^{-(I-J)}}^{art} = \prod_{s=1}^{d} \left(I_{2^{-i_s},s}^{art} - I_{2 \cdot 2^{-i_s},s}^{art} \right).$$

Beweis: Vollständige Induktion nach d. **q.e.d.**

Die beiden folgenden Sätze beschreiben den Interpolationsfehler der Dünngitterinterpolanten u_h^{lin} und u_h^{kon}.

Satz 2.2 (Stückweise multilineare Dünngitterinterpolation)

1. *Falls* $1 \le k \le d$, *dann gilt für alle* $u \in \mathcal{C}^{G,d+k}(\Omega^d)$ *und* $h = 2^{-n}$

$$\left\| u - u_h^{lin} \right\|_{L^2} \stackrel{\sim}{<} h^{1+\frac{k}{d}} (\log(h^{-1}))^{k-1} \|u\|_{H^{G,d+k}}.$$

Falls $2 \le d \le 3$, *dann gilt diese Ungleichung auch für die Funktionen* $u \in H^{G,d+k}(\Omega^d)$.

2. *Für alle* $u \in \mathcal{C}^{G,d+1}(\Omega^d)$ *und* $h = 2^{-n}$ *gilt*

$$\left\| u - u_h^{lin} \right\|_{H^1} \stackrel{\sim}{<} h (\log(h^{-1}))^{d-1} \|u\|_{H^{G,d+1}}.$$

Falls $2 \le d \le 3$, *dann gilt diese Ungleichung auch für die Funktionen* $u \in H^{G,d+1}(\Omega^d)$.

3. *Für alle* $u \in \mathcal{C}^{G,d+2}(\Omega^d)$ *und* $h = 2^{-n}$ *gilt*

$$\left\| u - u_h^{lin} \right\|_{H^1} \stackrel{\sim}{<} h \|u\|_{H^{G,d+2}}.$$

Falls $2 \le d \le 3$, *dann gilt diese Ungleichung auch für die Funktionen* $u \in H^{G,d+2}(\Omega^d)$.

Beispiel 2.3 *Satz 2.2 zeigt, daß man im 2-dimensionalen Raum folgenden Fehler in der* H^1*-Norm erhält*

$$\begin{array}{llll} \left\| u - u_h^{lin} \right\|_{H^1} \stackrel{\sim}{<} & h \log(h^{-1}) \|u\|_{H^{G,3}} & \textit{falls } u \in H^{G,3}(\Omega) & \textit{und} \\ \left\| u - u_h^{lin} \right\|_{H^1} \stackrel{\sim}{<} & h \|u\|_{H^{G,4}} & \textit{falls } u \in H^{G,4}(\Omega). & \end{array}$$

Beweis des Satzes 2.2 :

Wir werden die Ungleichungen zuerst für den Fall beweisen, daß $u \in \mathcal{C}^{G,d+k}(\Omega^d)$ gilt. Mit folgender Überlegung erhält man diese Ungleichungen dann aber auch sofort für $u \in H^{G,d+k}(\Omega^d)$. Falls $2 \le d \le 3$ und $1 \le k \le d$, dann folgt mit Hilfe des Lemmas von Sobolev (siehe [38]), daß die Inklusionen

$$H^{G,d+k}(\Omega^d) \hookrightarrow H^{G,d+1}(\Omega^d) \hookrightarrow H^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$$

stetig sind. Des weiteren ist $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}^d)$ dicht in $H^{G,d+k}(\Omega^d)$. Dies beweist man wie bei den Sobolev-Räumen $H^m(\Omega^d)$. Es sei nun u^n eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}^d)$, die in $H^{G,d+k}(\Omega^d)$ gegen u konvergiert. Da die obigen Inklusionen stetig sind, konvergiert auch der hierarchische Überschuß von $I_I^{lin}(u^n)$ gegen den hierarchischen Überschuß von $I_I^{lin}(u)$. Ein Grenzübergang $n \to \infty$ zeigt, daß die angegebenen Ungleichungen nun auch für $u \in H^{G,d+k}(\Omega^d)$ gelten.

Wir zeigen nun die gesuchten Ungleichungen für $u \in \mathcal{C}^{G,d+k}(\Omega^d)$ bzw. $u \in \mathcal{C}^{G,d+1}(\Omega^d)$ bzw. $u \in \mathcal{C}^{G,d+2}(\Omega^d)$.

Zu 1. Wegen Teil 2 in Satz 2.1 reicht es für den hierarchischen Überschuß $(v_I)_{I\in\mathbb{N}^d}$ der Mehrfachfolge $(u_I)_{I\in\mathbb{N}^d}$ folgendes zu beweisen. Es gibt eine Konstante C, so daß für jede Teilmenge $\{l_1,\cdots,l_k\}\subset\{1,\cdots,d\}$ gilt

$$\|v_I\|_{L^2}\le C2^{-|I|}2^{-\sum_{s=1}^k i_{l_s}}\|u\|_{H^{G,d+k}}.$$

Man sieht leicht, daß die Operatoren $I^{lin}_{h_i,i}$ und $I^{lin}_{h_j,j}$ vertauschen falls $i\neq j$. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, daß gilt $l_1=1,\cdots,l_k=k$. Nun reicht es zu zeigen

$$\|v_I\|_{L^2}\le\left\|\frac{\partial^{d+k}u}{\partial x_1^2\cdots\partial x_k^2\partial x_{k+1}\cdots\partial x_d}\right\|_{L^2}(5C_{int})^k(3C_{int})^{d-k}2^{-|I|}2^{-\sum_{s=1}^k i_s}, \tag{2.21}$$

da es gilt $\left\|\frac{\partial^{d+k}u}{\partial x_1^2\cdots\partial x_k^2\partial x_{k+1}\cdots\partial x_d}\right\|_{L^2}\le\|u\|_{H^{G,d+k}}$.

Wir zeigen nun die Ungleichung (2.21) mittels Induktion nach d. Für $d=1$ ist $k=1$ und daher folgt die Ungleichung (2.21) direkt aus Lemma 2.2.

Nun beweisen wir den Induktionsschritt $d-1\mapsto d$.

1. Fall: $k<d$ Wegen Lemma 2.3 und Teil 1 in Lemma 2.2 folgt

$$\begin{aligned}
\|v_I\|_{L^2} &= \left\|\prod_{s=1}^d\left(I^{lin}_{2^{-i_s},s}-I^{lin}_{2\cdot2^{-i_s},s}\right)(u)\right\|_{L^2}=\\
&=\left\|\left(I^{lin}_{2^{-i_d},d}-Id+Id-I^{lin}_{2\cdot2^{-i_d},d}\right)\circ\prod_{s=1}^{d-1}\left(I^{lin}_{2^{-i_s},s}-I^{lin}_{2\cdot2^{-i_s},s}\right)(u)\right\|_{L^2}\le\\
&\le(3C_{int})2^{-i_d}\left\|\frac{\partial}{\partial x_d}\prod_{s=1}^{d-1}\left(I^{lin}_{2^{-i_s},s}-I^{lin}_{2\cdot2^{-i_s},s}\right)(u)\right\|_{L^2}\le\\
&\le(3C_{int})2^{-i_d}\left\|\prod_{s=1}^{d-1}\left(I^{lin}_{2^{-i_s},s}-I^{lin}_{2\cdot2^{-i_s},s}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x_d}\right)\right\|_{L^2}\le\\
&\le(5C_{int})^k(3C_{int})^{d-1-k}\quad 2^{-\sum_{s=1}^{d-1}i_s}\quad 2^{-\sum_{s=1}^k i_s}\quad(3C_{int})2^{-i_d}\cdot\\
&\quad\cdot\left\|\frac{\partial^{d-1+k}}{\partial x_1^2\cdots\partial x_k^2\partial x_{k+1}\cdots\partial x_{d-1}}\left(\frac{\partial u}{\partial x_d}\right)\right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Dies ist die Ungleichung (2.21).

2. Fall: $k=d$ Dieser Fall folgt ganz analog wie der 1. Fall. Anstelle von Teil 1 in Lemma 2.2 ist es aber notwendig den Teil 2 zu verwenden.

Zu 2. Analog wie beim Beweis der Ungleichung (2.21) erhält man für jedes $1\le k\le d$

$$\left\|\frac{\partial v_I}{\partial x_k}\right\|_{L^2}\le\left\|\frac{\partial^{d+1}u}{\partial x_1\cdots\partial x_{k-1}\partial x_k^2\partial x_{k+1}\cdots\partial x_d}\right\|_{L^2}(3C_{int})^d\quad 2^{-|I|}.$$

Mit Hilfe von Teil 1 in Satz 2.1 folgt nun für alle $u\in\mathcal{C}^{G,d+1}(\Omega^d)$ und $h=2^{-n}$

$$\left\|\frac{\partial(u-u_h^{lin})}{\partial x_k}\right\|_{L^2}\ \tilde{<}\ h(\log(h^{-1}))^{d-1}\|u\|_{\mathcal{C}^{G,d+1}}.$$

Wegen $\left|u-u_h^{lin}\right|_{H^1}^2 = \sum_{i=1}^d \left\|\frac{\partial(u-u_h^{lin})}{\partial x_k}\right\|_{L^2}^2$ folgt die Behauptung.

Zu 3. Analog wie beim Beweis der Ungleichung (2.21) erhält man für alle $1 \leq l, k \leq d$ mit $l \neq k$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial v_I}{\partial x_k}\right\|_{L^2} \leq & \left\|\frac{\partial^{d+2} u}{\partial x_1 \cdots \partial x_{k-1} \partial x_k^2 \partial x_{k+1} \cdots \partial x_{l-1} \partial x_l^2 \partial x_{l+1} \cdots \partial x_d}\right\|_{L^2} \cdot \\ & \cdot 5C_{int}(3C_{int})^{d-1} \quad 2^{-|I|}2^{-i_l}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Teil 3 in Satz 2.1 folgt nun für alle $u \in \mathcal{C}^{G,d+2}(\Omega^d)$ und $h = 2^{-n}$

$$\left\|\frac{\partial(u-u_h^{lin})}{\partial x_k}\right\|_{L^2} \stackrel{\sim}{<} h\|u\|_{\mathcal{C}^{G,d+2}}.$$

Wegen $\left|u-u_h^{lin}\right|_{H^1}^2 = \sum_{i=1}^d \left\|\frac{\partial(u-u_h^{lin})}{\partial x_i}\right\|_{L^2}^2$ folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Satz 2.3 (Stückweise konstante Dünngitterinterpolation)
Für alle $u \in \mathcal{C}^{G,d}(\Omega^d)$ und $h = 2^{-n}$ gilt

$$\left\|u-u_h^{kon}\right\|_{L^\infty} \stackrel{\sim}{<} h(\log(h^{-1}))^{d-1}\|u\|_{\mathcal{C}^{G,d}}.$$

Beweis: Analog wie beim Beweis der Ungleichung (2.21) erhält man

$$\|v_I\|_{L^\infty} \leq \left\|\frac{\partial^d u}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}\right\|_{L^\infty} (3C_{int})^d \quad 2^{-|I|}.$$

Die Behauptung folgt nun mit Hilfe des Teils 1 in Satz 2.1. **q.e.d.**

Satz 2.2 ist nicht ganz zufriedenstellend, wenn für die Dimension des Raumes gilt: $d > 3$. Dann ist es nämlich nicht möglich Fehlerabschätzungen in den Räumen $H^{G,d+k}(\Omega^d)$ zu erhalten. Der Grund hierfür ist klar. Mit dem Lemma von Sobolev kann man in diesem Fall nicht mehr zeigen, daß die Funktionen aus $H^{G,d+k}(\Omega^d)$ stetig sind. Für unstetige Funktionen ist der Dünngitterinterpolant u_h^{lin} aber nicht einmal mehr definiert. Einen Ausweg aus diesem Problem erhält man mit Hilfe von Quasiinterpolationsoperatoren (siehe [31], Seite 17-19). Den Wert des Quasiinterpolaten an einem Gitterpunkt definieren wir hier durch ein gewichtetes Integral. Einen 1-dimensionalen Quasiinterpolationsoperator kann man wie folgt konstruieren. Es sei

$$q(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{2h} + 2\left(1+\frac{x}{2h}\right)\right)\frac{1}{2h} & \text{falls} \quad -\frac{h}{2} \leq x \leq 0 \\ \left(-\frac{x}{2h} + 2\left(1-\frac{x}{2h}\right)\right)\frac{1}{2h} & \text{falls} \quad 0 \leq x \leq \frac{h}{2} \\ 0 & \text{falls} \quad \frac{h}{2} < |x| \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned}
I_h^{lin,quasi} : L^2(]0,1[) &\rightarrow \mathcal{C}([0,1]) \\
I_h^{lin,quasi}(f)(ih) &= \int_0^1 f(x)q\,(x-ih)\ dx \quad \forall i=1,\cdots,N-1, \\
I_h^{lin,quasi}(f)(0) &= 2\int_0^1 f(x)q\,(x)\ dx, \\
I_h^{lin,quasi}(f)(1) &= 2\int_0^1 f(x)q\,(x-1)\ dx.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Bramble-Hilbert Lemmas (siehe [22]) kann man zeigen, daß das Lemma 2.2 auch für $I_h^{lin,quasi}$ anstelle von I_h^{lin} gilt. Genauso wie wir aus I_h^{lin} den Interpolationsoperator I_H^{lin} konstruiert haben, können wir nun den Interpolationsoperator

$$I_H^{lin,quasi} : L^2(\Omega^d) \rightarrow \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$$

konstruieren. Die Kombinationslösung der Mehrfachfolge $I_{2^{-I}}^{lin,quasi}(u)$ sei

$$u_h^{lin,quasi} := \sum_{s=1}^{d}(-1)^{s+1}\binom{d-1}{s-1}\sum_{|K|=n+d-s} I_{2^{-I}}^{lin,quasi}(u), \quad \text{wobei}$$

$u \in L^2(\Omega^d)$. Der Vorteil des Operators $I_H^{lin,quasi}$ ist, daß er stetig bezüglich der L^2-Norm ist, während der Operator I_H^{lin} nur stetig bezüglich der $\mathcal{C}$-Norm ist. Daher gilt der Satz 2.2 auch ohne Einschränkung an die Dimension d, wenn dort anstelle der Funktion u_h^{lin} die Funktion $u_h^{lin,quasi}$ verwendet wird. Diesen Satz wollen wir nun genau formulieren.

Satz 2.4 (Stückweise multilineare Quasidünngitterinterpolation)

1. *Falls $1 \leq k \leq d$, dann gilt für alle $u \in H^{G,d+k}(\Omega^d)$ und $h = 2^{-n}$*

$$\left\|u - u_h^{lin,quasi}\right\|_{L^2} \stackrel{\sim}{<} h^{1+\frac{k}{d}}(\log(h^{-1}))^{k-1}\|u\|_{H^{G,d+k}}.$$

2. *Für alle $u \in H^{G,d+1}(\Omega^d)$ und $h = 2^{-n}$ gilt*

$$\left\|u - u_h^{lin,quasi}\right\|_{H^1} \stackrel{\sim}{<} h(\log(h^{-1}))^{d-1}\|u\|_{H^{G,d+1}}.$$

3. *Für alle $u \in H^{G,d+2}(\Omega^d)$ und $h = 2^{-n}$ gilt*

$$\left\|u - u_h^{lin,quasi}\right\|_{H^1} \stackrel{\sim}{<} h\|u\|_{H^{G,d+2}}.$$

Bemerkung:

Einen zu u_h^{lin} ganz ähnlichen Dünngitterinterpolanten erhält man, indem man eine Mehrfachfolge aus Interpolanten auf noch gröberen Gittern konstruiert. Es sei

$$\begin{aligned}\tilde{u}_I &:= I_{2^{-I}\cdot 2}^{lin}(u) \quad \text{und} \\ \tilde{u}_h^{lin} &:= \sum_{s=1}^{d}(-1)^{s+1}\binom{d-1}{s-1}\sum_{|K|=n+d-s} I_{2^{-K}\cdot 2}^{lin}(u).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Man sieht leicht, daß für diesen Dünngitterinterpolanten auch Satz 2.2 gilt.

2.3 Dünne Gitter und Adaptivität

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß der Fehler bei der Dünngitterinterpolation von der Maschenweite h und der Glattheit der Funktion abhängt. Zur Abschätzung des Fehlers in der H^1-Norm wurde dabei vorausgesetzt, daß die zu interpolierende Funktion mindestens in $H^{G,d+1}(\Omega)$ enthalten ist. Auch bei der Diskretisierung von elliptischen Differentialgleichungen mit dünnen Gittern wird der Diskretisierungsfehler von der Maschenweite und der Glattheit der Funktion abhängen (siehe Abschnitt 4.1 und 5.1). Falls die exakte Lösung der elliptischen Differentialgleichung oder die zu interpolierende Funktion nicht glatt genug ist, dann kann man mit einem adaptiven Verfahren die Konvergenzordnung bezüglich der Anzahl der Gitterpunkte verbessern. Wir werden zwei Zugänge zu adaptiven Verfahren erklären.

Der eine Zugang geht von einem uniformen vollen beziehungsweise uniformen dünnen Gitter aus. Auf dieses Gitter werden dann ein oder mehrere lokale feine Gitter gelegt. Man erhält hierdurch zusammengesetzte Gitter. Für volle Gitter findet man eine Beschreibung dieses Verfahrens in [6]. In Abschnitt 2.3.3 wird dieses Verfahren für dünne Gitter erklärt und in Abschnitt 4.4 auf die Kombinationstechnik zur näherungsweisen Lösung von elliptischen Differentialgleichungen angewendet.

Einen anderen Zugang zu adaptiven Verfahren mit dünnen Gittern erhält man mit Hilfe der hierarchischen Basis. Dieser Zugang wird in [9] ausführlich erklärt. Eine Beschreibung der Eigenschaften von hierarchischen Basen findet man in [31], [39] und [41]. Die Idee des adaptiven Verfahrens mit hierarchischen Basen ist, daß man eine Funktion als unendliche Summe von hierarchischen Basisfunktionen darstellen kann. Eine näherungsweise Interpolation einer Funktion erhält man dadurch, daß man nur geeignete endliche Teilsummen dieser unendlichen Summe betrachtet. Dabei sind nur bestimmte endliche Teilsummen erlaubt, nämlich die, die zur Interpolation auf „abstrakten dünnen Gittern" gehören. In Abschnitt 2.3.4 werden wir hierarchische Basen auf dünnen Gittern definieren und den Zusammenhang zu abstrakten dünnen Gittern darstellen.

Bevor wir genauer auf adaptive dünne Gitter eingehen, erklären wir in Abschnitt 2.3.1 was nicht adaptive d.h. reguläre dünne Gitter sind und in Abschnitt 2.3.2 was für Gitterpunkte wir für adaptive dünne Gitter verwenden.

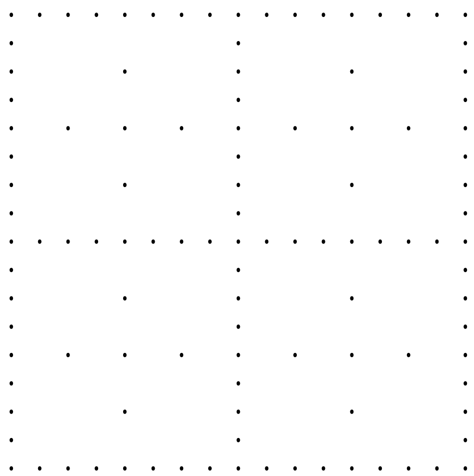


Abbildung 2.2: Reguläres dünnes Gitter der Tiefe 4 im 2-dimensionalen Raum: $\mathcal{D}_4$

2.3.1 Reguläre dünne Gitter

Bei der Definition der Dünngitterinterpolation in Abschnitt 2.2 wurde genaugenommen nie erklärt was ein dünnes Gitter ist. Auch wurde nicht erklärt an welchen Gitterpunkten die Dünngitterinterpolanten u_h^{lin}, $u_h^{lin,quasi}$ und u_h^{kon} die Funktion u interpolieren. Beim Interpolanten u_h^{kon} kann die Menge der Punkte $\{z \in \Omega^d | u(z) = u_h^{kon}(z)\}$ bei unterschiedlichen Funktionen u auch tatsächlich völlig disjunkt sein. Das gleiche gilt für den Interpolanten $u_h^{lin,quasi}$. Bei dem Interpolanten u_h^{lin} gibt es aber eine feste Menge von Interpolationspunkten. Dies ist das reguläre dünne Gitter

$$\mathcal{D}_n^d := \bigcup_{|K|=n+d-1} \Omega_K, \tag{2.23}$$

wobei Ω_K das volle Gitter

$$\Omega_K := \left\{ (i_1 2^{-k_1}, \cdots, i_d 2^{-k_d}) \middle| \quad i_s \in \{0, 1, \cdots, 2^{k_s}\} \quad \text{für alle} \quad s = 1, \cdots, d \right\}$$

ist. Hierbei ist der Index K immer aus der Indexmenge $\mathbb{N}^d$. Abbildung 2.2 zeigt ein Beispiel eines solchen Gitters.

Die Interpolationseigenschaft des Dünngitterinterpolanten u_h^{lin} wollen wir in einem Lemma festhalten.

Lemma 2.4 (Reguläres dünnes Gitter) *Für den Dünngitterinterpolanten u_h^{lin} gilt*

$$u_h^{lin}(z) = u(z)$$

für alle Punkte des regulären dünnen Gitters $z \in \mathcal{D}_n^d$.

Beweis: Wegen Lemma 2.1 gilt

$$\sum_{|K| \geq n+d} v_K = u_{\overline{n+1}} - u_h^{lin}.$$

$u_{\overline{n+1}}$ interpoliert natürlich u an den Gitterpunkten $\mathcal{D}_n^d$. Daher reicht es zu zeigen:

$$v_K(z) = 0 \quad \text{für alle} \quad z \in \Omega_I \quad \text{mit} \quad |I| < |K|.$$

Es sei $|I| < |K|$. Dann gibt es natürlich $1 \leq s' \leq d$ mit $i_{s'} < k_{s'}$. O.B.d.A. nehmen wir an $s' = d$. Daher gilt

$$(I_{2^{-k_d},d}^{lin} - I_{2 \cdot 2^{-k_d},d}^{lin})(u)(z', z_d) = 0,$$

für $z' \in \Omega^{d-1}$ und $z_d \in \Omega_{\{i_d\}}$. Wegen Lemma 2.3 folgt nun

$$v_K(z) = \prod_{s=1}^{d-1} \left(I_{2^{-k_s},s}^{lin} - I_{2 \cdot 2^{-k_s},s}^{lin} \right) \circ (I_{2^{-k_d},d}^{lin} - I_{2 \cdot 2^{-k_d},d}^{lin})(u)(z) = 0,$$

für $z \in \Omega_I$. **q.e.d.**

Wegen Lemma 2.4 führen wir nun folgenden Dünngitterinterpolationsoperator ein. Es sei für $h = 2^{-n}$

$$I_{\mathcal{D}_n^d}(u) := u_h^{lin}, \tag{2.24}$$

wobei u_h^{lin} der stückweise multilineare Dünngitterinterpolant ist.

Bemerkung:

Zu anderen dünnen Gittern kommt man, wenn man noch gröbere volle Gitter zuläßt.

$$\tilde{\mathcal{D}}_n^d := \bigcup_{|K|=n+d-1} \Omega_{K-\overline{1}} = \bigcup_{|I|=n-1} \Omega_I. \tag{2.25}$$

Für die Indizes K und I gelte hierbei $K \in \mathbb{N}^d$ beziehungsweise $I \in \mathbb{N}_0^d$. Der zugehörige Dünngitterinterpolant ist $\tilde{u}_h^{lin}$ (siehe Bemerkung in Abschnitt 2.2.2). Analog wie in der Gleichung (2.24) definieren wir nun den Dünngitterinterpolationsoperator

$$I_{\tilde{\mathcal{D}}_n^d}(u) := \tilde{u}_h^{lin}. \tag{2.26}$$

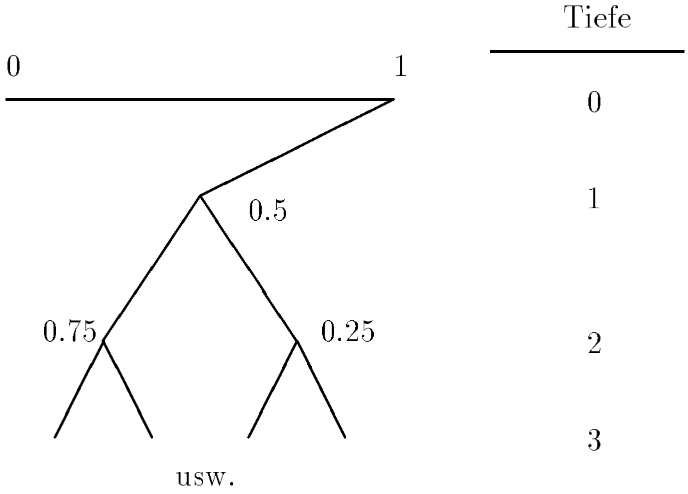


Abbildung 2.3: Baum aller möglichen Gitterpunkte und deren Tiefe

2.3.2 Gitterpunkte und deren Eigenschaften

Zur Beschreibung von adaptiven dünnen Gittern ist es notwendig die Menge der verwendeten 1-dimensionalen Gitterpunkte genau zu beschreiben und zu untersuchen. Die wesentliche Idee dieser Beschreibung ist die Darstellung der Gitterpunkte in einem Baum (siehe Abbildung 2.3). Solche Bäume werden auch zur Implementierung von dünnen Gittern verwendet (siehe [9]).

Die Menge aller 1-dimensionalen Gitterpunkte sei

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} d_i \cdot 2^{-i} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad d_0 = 1,\ d_1 = -1,\ d_2, \ldots, d_n \in \{1, -1\} \right\} \cup \{0\}.$$

Für jedes $x \in \mathcal{P} \backslash \{0\}$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $d_0 = 1$, $d_1 = -1$, $d_2, \ldots, d_n \in \{1, -1\}$, so daß gilt $x = \sum_{i=0}^{n} d_i \cdot 2^{-i}$. Deswegen können wir die Tiefe eines Gitterpunktes $x \in \mathcal{P}$ durch

$$\begin{aligned} T(0) &:= 0, \\ T(x) &:= n \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{P} \backslash \{0\} \end{aligned}$$

definieren und den Vater des Punktes x durch

$$\begin{aligned} V(0) &:= 1, \\ V(1) &:= 0, \\ V(x) &:= \sum_{i=0}^{n-1} d_i \cdot \frac{1}{2^i} \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{P} \backslash \{0, 1\}. \end{aligned}$$

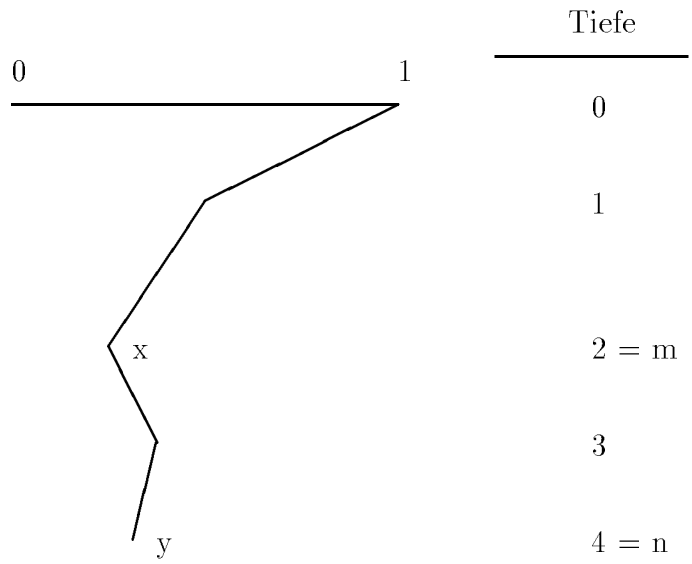


Abbildung 2.4: Beispiel zweier Punkte mit $x \prec y$

Im d-dimensionalen Raum definieren wir die Tiefe eines Punktes durch

$$\begin{aligned} T : \mathcal{P}^d &\mapsto \mathbb{N}_0 \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) &\rightarrow \max\left(T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_d)\right) \end{aligned}$$

und den Vater eines Punktes durch

$$\begin{aligned} V : \mathcal{P}^d &\mapsto \mathcal{P}^d \\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) &\rightarrow \left(V(x_1), V(x_2), \cdots, V(x_d)\right). \end{aligned}$$

Zum Schluß dieses Abschnittes definieren eine Halbordnung auf $\mathcal{P}^d$.
Für $x = (x_1, \cdots, x_d),\ y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathcal{P}^d$ sei

$$x \prec y \quad :\Leftrightarrow \quad \left\{ x_i - 2^{-T(x_i)} < y_i < x_i + 2^{-T(x_i)} \quad \forall i = 1, \cdots, d \right\}. \tag{2.27}$$

Anschaulich bedeutet $x \prec y$, daß der Punkt y im Baum aus Abbildung 2.3 unterhalb des Punktes x liegt. Aus Abbildung 2.3 und 2.4 erkennt man somit leicht, daß gilt

$$x \prec y \quad \Rightarrow \quad T(x_i) \ \leq \ T(y_i) \quad \forall i = 1, \cdots, d.$$

Die Halbordnung $\prec$ hat für alle $x, y \in \mathcal{P} \backslash \{0\}$ außerdem auch folgende Eigenschaft

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} y = \sum_{i=0}^{n} d_i 2^{-i} \\ x = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{-i} \\ m \leq n \end{array} \right. , \tag{2.28}$$

wobei natürlich $d_i \in \{1, -1\}$ für alle $i = 0, \cdots, n$ (siehe Abbildung 2.4). Dies kann man leicht mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises und der geometrischen Reihe beweisen. Man erkennt diese Eigenschaft aber auch mit Hilfe der Abbildungen 2.3 und 2.4. Aus der Eigenschaft (2.28) folgt, daß $\prec$ eine Halbordnung ist (siehe [28]).

2.3.3 Adaptivität durch zusammengesetzte Gitter

Für eine Adaptivität auf dünnen Gittern durch zusammengesetzte Gitter benötigen wir spezielle zusammengesetzte volle Gitter. Diese werden nun beschrieben. Zuerst ist der Begriff einer adaptiven Struktur notwendig.

Definition 2.1 (Adaptive Struktur) *Eine endliche Teilmenge* $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}^d$ *heißt* adaptive Struktur, *falls gilt:*
Für jeden Punkt $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathcal{A}$ *gilt:*

- $T(x_1) = T(x_2) = \cdots = T(x_d) \geq 1.$
- $V(x) \in \mathcal{A}$ *falls* $T(x) > 1.$

Im 2-dimensionalen Raum lassen sich solche adaptiven Strukturen als Quadtree darstellen (siehe Abbildung 2.5). Man sieht leicht $\overline{0.5} \in \mathcal{A}$ für jede adaptive Struktur $\mathcal{A}$.

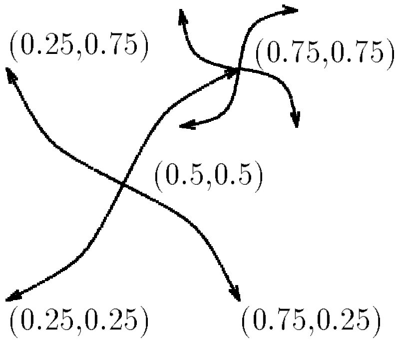


Abbildung 2.5: Beispiel eines Quadtrees.

Zur Definition von zusammengesetzten Gittern werden wir Gitter auf dem Einheitswürfel verschieben und strecken. Dazu benötigen wir für jedes $x \in \mathcal{P}^d$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_x : \Omega^d &\mapsto \Omega^d \\ z &\to \left(z - \overline{0.5}\right) \cdot 2^{-T(x)+1} + x. \end{aligned}$$

Für $x = \overline{0.5}$ ist diese Abbildung gerade die Identität. Nun können wir die für unseren Zweck notwendigen zusammengesetzten vollen Gitter definieren.

Definition 2.2 (Zusammengesetztes volles Gitter) *Es sei $I \in \mathbb{N}^d$ und es sei $\mathcal{A}$ eine adaptive Struktur. Das zusammengesetzte volle Gitter mit gröbstem Gitter der Tiefe I ist*

$$\Omega_I^{\mathcal{A}} := \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \Phi_x(\Omega_I).$$

Abbildung 2.6 zeigt ein Beispiel eines solchen zusammengesetzten Gitters. Man beachte, daß man dieses Gitter auch mit einer anderen adaptiven Struktur und einem anderen K erhalten kann. Zum Beispiel ist das Gitter in Abbildung 2.6 auch das zusammengesetzte Gitter $\Omega_I^{\mathcal{A}}$ mit $I = (2,2)$ und der adaptiven Struktur $\mathcal{A} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})\}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\Omega_{\overline{n}}^{\mathcal{A}} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \Phi_x(\Omega_{\overline{n}})$ ein zusammengesetztes volles Gitter. Zu einem adaptiven dünnen Gitter kommt man nun dadurch, daß man das uniforme volle Gitter $\Omega_{\overline{n}}$ durch das dünne Gitter $\mathcal{D}_n^d = \bigcup_{|K|=n+d-1} \Omega_K$ ersetzt. Daher definieren wir ein zusammengesetztes dünnes Gitter in folgender Weise.

Definition 2.3 (Zusammengesetztes dünnes Gitter) *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es sei $\mathcal{A}$ eine adaptive Struktur. Das zusammengesetzte dünne Gitter der Tiefe n ist*

$$\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}} := \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \Phi_x \left(\mathcal{D}_n^d \right).$$

Dieses zusammengesetzte dünne Gitter besitzt jedoch noch mehrere andere Darstellungen. Satz 2.5 zeigt, daß man ein zusammengesetztes dünnes Gitter als Kombination von zusammengesetzten vollen Gittern erhält.

Satz 2.5 *Das zusammengesetzte dünne Gitter der Tiefe n zur adaptiven Struktur $\mathcal{A}$ ist*

$$\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}} = \bigcup_{|K|=n+d-1} \Omega_K^{\mathcal{A}}.$$

Beweis: Wegen (2.23) folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n^{\mathcal{A}} &= \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \Phi_x \left(\bigcup_{|K|=n+d-1} \Omega_K \right) = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \bigcup_{|K|=n+d-1} \Phi_x(\Omega_K) = \\ &= \bigcup_{|K|=n+d-1} \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \Phi_x(\Omega_K) = \bigcup_{|K|=n+d-1} \Omega_K^{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Die unterschiedlichen Darstellungen des dünnen Gitters $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$ werden in Abbildung 2.7 und 2.8 verdeutlicht. Die Gitter $\Omega_K^{\mathcal{A}}$ mit $|K| = n + d - 1$ bezeichnen wir als Kombinationsgitter.

Nun können wir auch erklären, wie man zu einer Kombinationslösung auf einem zusammengesetzten dünnen Gitter kommt. Nehmen wir an es seien $u_{\Omega_I^{\mathcal{A}}}$ die näherungsweisen Lösungen eines Problems auf den zusammengesetzten vollen Gittern $\Omega_I^{\mathcal{A}}$. Ein solches Problem kann die Interpolation oder Integration einer Funktion oder die Lösung einer partiellen Differentialgleichung sein. Die Kombinationslösung auf dem zusammengesetzten dünnen Gitter $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$ ist nun die Kombinationslösung der Mehrfachfolge $(u_{\Omega_I^{\mathcal{A}}})_{I\in\mathbb{N}^d}$. Das heißt

$$u_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}} := \sum_{s=1}^{d}(-1)^{s+1}\binom{d-1}{s-1}\sum_{|K|=n+d-s} u_{\Omega_K^{\mathcal{A}}}. \tag{2.29}$$

Der Vorteil der zusammengesetzten adaptiven dünnen Gittern $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$ ist, daß man auf ihnen eine Kombinationstechnik zur Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen definieren kann (siehe Abschnitt 4.4). Bis jetzt gibt es aber keinen Beweis sondern nur numerische Ergebnisse, daß dieses Verfahren auf adaptiven zusammengesetzten dünnen Gittern funktioniert. Deswegen soll nun gezeigt werden, daß man auf den dünnen Gittern $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$ Funktionen sehr gut interpolieren kann. Dies ist dann ein guter Hinweis darauf, daß auch die Kombinationstechnik zur Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen auf diesen Gittern funktioniert.

Um einen stetigen Interpolanten auf den Gittern $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$ zu erhalten, ist es notwendig sogenannte „slave-points“ einzuführen (siehe [26]). Dann ist es aber etwas aufwendig zu zeigen, daß der Interpolant tatsächlich eine vorgegebene Funktion auf $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$ interpoliert. Daher schlagen wir einen einfacheren Weg ein und definieren den Interpolant so, daß er zwar unstetig ist, aber trotzdem eine vorgegebene Funktion gut in der L^2-Norm interpoliert. Zur Definition des Dünngitterinterpolanten benötigen wir ein Lemma, das zeigt, daß ein zusammengesetztes dünnes Gitter eine Vereinigung von mehreren lokalen dünnen Gittern ist, die sich nur am Rand dieser lokalen Gitter schneiden.

Lemma 2.5 *Für eine adaptive Struktur $\mathcal{A}$ sei*

$$\mathcal{N} := \left\{x \in \mathcal{P}^d | x \notin \mathcal{A} \quad und \quad V(x) \in \mathcal{A}\right\}$$

die Menge der „nächsten Gitterpunkte“ von $\mathcal{A}$. Dann ist

$$\bigcup_{x\in\mathcal{N}} \Phi_x\left(\Omega^d\right) \tag{2.30}$$

eine disjunkte Vereinigung und

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \Phi_x\left(\bar{\Omega}^d\right). \tag{2.31}$$

Siehe hierzu Abbildung 2.9. Das zusammengesetzte dünne Gitter der Tiefe n ist

$$\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}} = \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \Phi_x\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right). \tag{2.32}$$

Das zusammengesetzte volle Gitter der Tiefe $K \in \mathbb{N}^d$ ist

$$\Omega_K^{\mathcal{A}} = \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \Phi_x\left(\Omega_{K-\bar{1}}^d\right). \tag{2.33}$$

Beweis: Für einen Punkt $x \in \mathcal{A}$ sei $\mathcal{M}_x := \{x' \in \mathcal{P}^d | V(x') = x\}$ die Menge der „Söhne“ von x. Man rechnet leicht nach, daß die Vereinigung

$$\bigcup_{x' \in \mathcal{M}_x} \Phi_{x'}\left(\Omega^d\right)$$

eine disjunkte Vereinigung ist und daß gilt

$$\Phi_x\left(\bar{\Omega}^d\right) = \bigcup_{x' \in \mathcal{M}_x} \Phi_{x'}\left(\bar{\Omega}^d\right).$$

Ein einfacher Beweis durch Induktion nach $|\mathcal{A}|$ zeigt die Gleichung (2.31) und daß (2.30) eine disjunkte Vereinigung ist.

Zum Beweis der Gleichung (2.32) benötigen wir folgende Identität

$$\Phi_x(\mathcal{D}_n^d) = \bigcup_{x' \in \mathcal{M}_x} \Phi_{x'}\tilde{\mathcal{D}}_n^d \tag{2.34}$$

für alle $x \in \mathcal{A}$. Man sieht leicht, daß gilt

$$\Phi_x(\Omega_K) = \bigcup_{x' \in \mathcal{M}_x} \Phi_{x'}\left(\Omega_{K-\bar{1}}\right).$$

Zusammen mit (2.23) und (2.25) folgt

$$\begin{aligned}\Phi_x(\mathcal{D}_n^d) &= \bigcup_{|K|=n+d-1} \Phi_x(\Omega_K) = \bigcup_{|K|=n+d-1} \bigcup_{x' \in \mathcal{M}_x} \Phi_{x'}\left(\Omega_{K-\bar{1}}\right) = \\ &= \bigcup_{x' \in \mathcal{M}_x} \Phi_{x'}\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right).\end{aligned}$$

Damit haben (2.34) bewiesen.

Die Gleichung (2.32) zeigen wir nun auch durch Induktion nach $M = |\mathcal{A}|$.

Es sei $M = 1$. Dann ist $\mathcal{A} = \left\{\overline{0.5}\right\}$. Wegen (2.34) folgt

$$\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}} = \mathcal{D}_n^d = \Phi_{\overline{0.5}}\left(\mathcal{D}_n^d\right) = \bigcup_{x' \in \mathcal{M}_{\overline{0.5}}} \Phi_{x'}\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right) = \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \Phi_x\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right).$$

(2.32) sei nun für $M-1 \in \mathbb{N}$ bewiesen. Es sei $M = |\mathcal{A}|$. Da $\mathcal{A}$ endlich ist, gibt es einen Punkt $x \in \mathcal{A}$, so daß $\mathcal{M}_x \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Dann ist $\mathcal{A}' = \mathcal{A}\backslash\{x\}$ eine adaptive Struktur mit $M-1 = |\mathcal{A}'|$. Die nächsten Gitterpunkte von $\mathcal{A}'$ sind $\mathcal{N}' = (\mathcal{N}\backslash\mathcal{M}_x) \cup \{x\}$. Man beachte, daß gilt $\tilde{\mathcal{D}}_n^d \subset \mathcal{D}_n^d$. Deswegen folgt zusammen mit (2.34)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}} &= \bigcup_{\hat{x}\in\mathcal{A}} \Phi_{\hat{x}}\left(\mathcal{D}_n^d\right) = \bigcup_{\hat{x}\in\mathcal{A}'} \Phi_{\hat{x}}\left(\mathcal{D}_n^d\right) \cup \Phi_x\left(\mathcal{D}_n^d\right) = \mathcal{D}_n^{\mathcal{A}'} \cup \Phi_x\left(\mathcal{D}_n^d\right) = \\
&= \bigcup_{\hat{x}\in\mathcal{N}'} \Phi_{\hat{x}}\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right) \cup \Phi_x\left(\mathcal{D}_n^d\right) = \bigcup_{\hat{x}\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{M}_x} \Phi_{\hat{x}}\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right) \cup \Phi_x\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right) \cup \Phi_x\left(\mathcal{D}_n^d\right) = \\
&= \bigcup_{\hat{x}\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{M}_x} \Phi_{\hat{x}}\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right) \cup \Phi_x\left(\mathcal{D}_n^d\right) = \bigcup_{\hat{x}\in\mathcal{N}\backslash\mathcal{M}_x} \Phi_{\hat{x}}\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right) \bigcup_{x'\in\mathcal{M}_x} \Phi_{x'}\tilde{\mathcal{D}}_n^d = \\
&= \bigcup_{\hat{x}\in\mathcal{N}} \Phi_{\hat{x}}\left(\tilde{\mathcal{D}}_n^d\right).
\end{aligned}$$

Analog erhält man die Gleichung (2.33). **q.e.d.**

Nun können wir einen Interpolanten definieren, der eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ auf dem dünnen Gitter $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$ interpoliert. Wegen (2.30) und (2.31) reicht es den Dünngitterinterpolanten auf den lokalen Gebieten $\Phi_x\left(\Omega^d\right)$ für $x \in \mathcal{N}$ zu definieren, um einen guten Interpolanten in der L^2-Norm zu erhalten (siehe Abbildung 2.9). Es sei daher

$$I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}}(u)(z) := I_{\tilde{\mathcal{D}}_n^d}(u \circ \Phi_x)\left(\Phi_x^{-1}(z)\right) \quad \text{für} \quad z \in \Phi_x\left(\Omega^d \cup \tilde{\mathcal{D}}_n^d\right) \quad \text{und} \quad x \in \mathcal{N},$$

wobei $I_{\tilde{\mathcal{D}}_n^d}$ der in (2.26) definierte Dünngitterinterpolationsoperator ist. Damit ist $I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}}(u)(z)$ für fast alle $z \in \bar{\Omega}^d$ definiert. Wegen (2.32) ist $I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}}$ tatsächlich ein Interpolationsoperator auf $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$. Das heißt es gilt

$$I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}}(u)(z) = u(z) \quad \forall z \in \mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß dieser Dünngitterinterpolant $I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}}(u)$ die Kombinationslösung von geeigneten Vollgitterinterpolanten ist. Daher definieren wir einen Vollgitterinterpolanten auf $\Omega_K^{\mathcal{A}}$ durch

$$I_{\Omega_K^{\mathcal{A}}}(u)(z) := I_{2^{-K}2}^{lin}(u \circ \Phi_x)\left(\Phi_x^{-1}(z)\right) \tag{2.35}$$

für $z \in \Phi_x\left(\Omega^d \cup \Omega_{K-\bar{1}}\right)$ und $x \in \mathcal{N}$. Damit ist auch $I_{\Omega_K^{\mathcal{A}}}(u)(z)$ für fast alle $z \in \bar{\Omega}^d$ definiert. Wegen (2.33) ist $I_{\Omega_K^{\mathcal{A}}}$ ein Interpolationsoperator auf $\Omega_K^{\mathcal{A}}$. Aus (2.26) und (2.22) folgt nun

$$I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}} = \sum_{s=1}^{d}(-1)^{s+1}\binom{d-1}{s-1}\sum_{|K|=n+d-s} I_{\Omega_K^{\mathcal{A}}}.$$

Der so definierte Dünngitterinterpolant ist der Dünngitterinterpolant auf den regulären dünnen Gittern $\mathcal{D}_n^d$, falls die adaptive Struktur trivial ist. Das heißt es gilt

$$I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}} = I_{\mathcal{D}_n^d},$$

falls $\mathcal{A} = \left\{\overline{0.5}\right\}$.

Zum Schluß wollen wir noch erklären, warum der Dünngitterinterpolant $I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}}$ bei einer geeigneten adaptiven Struktur $\mathcal{A}$ ein guter Interpolant in der L^2-Norm ist. Der Beweis von Satz 2.2 zeigt, daß der Fehler des Dünngitterinterpolanten $I_{\tilde{\mathcal{D}}_n^d}$ von der Glattheit der Funktion und der Maschenweite $h = 2^{-n}$ abhängt. Auf Grund der lokalen Definition des Dünngitterinterpolanten $I_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}}$ ist es daher nur notwendig die adaptive Struktur $\mathcal{A}$ dort zu verfeinern, wo die Funktion u nicht glatt ist. Dadurch kann man den Interpolationsfehler beliebig verkleinern, auch wenn die Funktion u eine Singularität besitzt, die zum Beispiel nur im Raum $H^{1.5}(\Omega^d)$ enthalten ist. Die Anzahl der hierfür notwendigen Punkte ist wesentlich geringer als bei regulären dünnen Gittern.

2.3.4 Hierarchische Basen und Adaptivität

Bis jetzt konnten wir einen Dünngitterinterpolanten ohne hierarchische Basen definieren. Besonders aber die Definition von Dünngitterinterpolanten auf adaptiven dünnen Gittern ist ohne hierarchische Basen etwas mühsam. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß man mit hierarchischen Basen sehr einfach Dünngitterinterpolanten auf adaptiven dünnen Gittern definieren kann. Die hierbei mögliche Klasse von adaptiven dünnen Gittern ist genaugenommen die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathcal{P}^d$. Wir werden diese Klasse jedoch sehr verkleinern um Gitter zu erhalten, bei denen der sogenannten „punktweise hierarchische Überschuß" invariant bleibt. Die hierdurch entstehenden Gitter bieten viele Vorteile. Zum Beispiel kann man sie leicht in einer Datenstruktur aus Bäumen abspeichern und außerdem führen sie bei der Lösung von elliptischen Differentialgleichungen mit der Galerkin-Methode zu einfacheren Algorithmen. Mit Hilfe der hierarchischen Basis erhält man auch sehr bequem den für die Galerkin-Diskretisierung notwendigen Finite-Elemente-Raum.

Wie man adaptive dünne Gitter verfeinern kann, um ein gutes adaptives Verfahren zu erhalten, wird in [9] beschrieben.

Wir werden drei verschiedene Arten von hierarchischen Basen im 1-dimensionalen Raum verwenden.

Für jedes $x \in \mathcal{P}$ und $k \in \mathbb{N}$, definieren wir die stückweise lineare Funktion (siehe Abbildung 2.10)

$$\begin{aligned} w^{lin}_{x,k} : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ w^{lin}_{x,k}(x') &:= \begin{cases} \frac{(x+2^{-k})-x'}{2^{-k}} & \text{für} \quad x \leq x' \leq x+2^{-k} \\ \frac{x'-(x-2^{-k})}{2^{-k}} & \text{für} \quad x-2^{-k} \leq x' \leq x \\ 0 & \quad\text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und die zwei stückweise konstanten Funktionen (siehe Abbildung 2.11)

$$\begin{aligned} w^{kon,r}_{x} : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ w^{kon,r}_{x}(x') &:= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \leq x' < x+2^{-T(x)} \\ 0 & \quad\text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \\ w^{kon,l}_{x} : [0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ w^{kon,l}_{x}(x') &:= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x-2^{-T(x)} < x' \leq x \\ 0 & \quad\text{sonst} \end{cases} \qquad . \end{aligned}$$

Man sieht, daß $w^{kon,r}_{x}$ rechtsseitig und $w^{kon,l}_{x}$ linksseitig stetig ist.

Im 1-dimensionalen Raum ist die stückweise lineare hierarchische Basis

$$\left\{ v^{lin}_{x,T(x)} \middle| x \in \mathcal{P} \right\}$$

und die stückweise konstante hierarchische Basis der rechtsseitig stetigen Funktionen

$$\left\{ v_x^{kon,r} \middle| x \in \mathcal{P} \right\}.$$

Wir wollen nun aus den 1-dimensionalen Basisfunktionen d-dimensionale Basisfunktionen konstruieren. Für die stückweise konstanten Funktionen werden wir Kombinationen aus rechts- und linksseitig stetigen Funktionen verwenden. Daher benötigen wir die Indexmenge $\{l, r\}^d$. Durch Produktbildung erhält man folgende Basisfunktionen im d-dimensionalen Raum

$$v_{x,I}^{lin} := \prod_{k=1}^{d} v_{x_k,i_k}^{lin} \quad \text{und} \quad v_x^{kon,S} := \prod_{k=1}^{d} v_{x_k}^{kon,s_i},$$

wobei $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathcal{P}^d$ und $I = (i_1, \cdots, i_d) \in \mathbb{N}_0^d$ und $S = (s_1, \cdots, s_d) \in \{l, r\}^d$. Für die hierarchische Basis der stückweise multilinearen Funktionen schreiben wir kurz

$$v_x^{lin} = v_{x,(T(x_1),\cdots,T(x_d))}^{lin}.$$

Zwischen der Halbordnung $\prec$ — siehe (2.27) — und den hierarchischen Basen besteht ein wichtiger Zusammenhang, den wir als Lemma formulieren.

Lemma 2.6 *Es gilt für alle $x, y \in \mathcal{P}^d$:*

$$\begin{aligned} v_x^{lin}(y) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x \prec y \quad \textit{und} \\ v_x^{kon,S}(y) \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad x \prec y. \end{aligned}$$

Beweis: Man betrachte die Definition der hierarchischen Basis oder Abbildung 2.10 und 2.11 und die Gleichung (2.27). **q.e.d.**

Zu jeder der oben beschriebenen Klasse von hierarchischen Basisfunktionen gibt es einen zugehörigen Raum und einen zugehörigen Interpolationsoperator. Es sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}^d$ eine endliche Teilmenge und $S \in \{l, r\}^d$. Dann sei

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{D}}^{lin} \quad &:= \quad \left\langle \left\{ v_x^{lin} \middle| x \in \mathcal{D} \right\} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad \text{und} \\ V_{\mathcal{D}}^{kon,S} \quad &:= \quad \left\langle \left\{ v_x^{kon,S} \middle| x \in \mathcal{D} \right\} \right\rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Interpolationsoperatoren auf $\mathcal{D}$ sind nun definiert durch

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{D}}^{lin} : \mathcal{C}(\Omega^d) \to V_{\mathcal{D}}^{lin}, \qquad &I_{\mathcal{D}}^{lin}(u)(x) = u(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \text{und} \\ I_{\mathcal{D}}^{kon,S} : \mathcal{C}(\Omega^d) \to V_{\mathcal{D}}^{kon,S}, \qquad &I_{\mathcal{D}}^{kon,S}(u)(x) = u(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Wichtig ist natürlich zu zeigen, daß die Operatoren $I_{\mathcal{D}}^{lin}$, $I_{\mathcal{D}}^{kon,S}$ wohldefiniert sind. Wir zeigen dies nun nur für den Operator $I_{\mathcal{D}}^{kon,S}$. Für $I_{\mathcal{D}}^{lin}$ folgt die Wohldefiniertheit analog.

$I_{\mathcal{D}}^{kon,S}$ **ist wohldefiniert.**

Beweis: Die Eindeutigkeit des Operators $I_{\mathcal{D}}^{kon,S}$ ist klar, da die Dimension des Raumes $\{(u(x))_{x\in\mathcal{D}} | u \in \mathcal{C}(\Omega^d)\}$ größer gleich der Dimension des Raumes $V_{\mathcal{D}}^{kon,S}$ ist. Die Existenz des Operators $I_{\mathcal{D}}^{kon,S}$ beweisen wir durch Induktion nach der Anzahl der Gitterpunkte $|\mathcal{D}|$. Falls $\mathcal{D} = \{x\}$ ist, dann ist nur zu beachten, daß $v_x^{kon,S}(x) = 1$ ist.

Es existiere nun $I_{\mathcal{D}}^{kon,S}$ für $|\mathcal{D}| \leq M$. Nun sei $|\mathcal{D}| = M + 1$. $\prec$ aus (2.27) definiert eine Halbordnung auf $\mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ endlich ist, ist $\mathcal{D}$ mit der Halbordnung $\prec$ natürlich induktiv geordnet (siehe [28]). Nach dem **Lemma von Zorn** existiert daher ein maximales Element $x_{max} \in \mathcal{D}$. Wegen der Induktionsvoraussetzung gibt es ein $v \in V_{\mathcal{D}\setminus\{x_{max}\}}^{kon,S}$ mit

$$v(z) = u(z) \quad \forall z \in \mathcal{D}\setminus\{x_{max}\}. \tag{2.36}$$

Es gilt aber

$$v_{x_{max}}^{kon,S}(z) = 0 \tag{2.37}$$

für alle $z \in \mathcal{D}\setminus\{x_{max}\}$. Dies zeigen wir durch einen Widerspruch. Es sei $z' \in \mathcal{D}\setminus\{x_{max}\}$, so daß gilt $v_{x_{max}}^{kon,S}(z') \neq 0$. Wegen Lemma 2.6 folgt, daß $x_{max} \prec z'$ gelten muß. Da x_{max} maximales Element ist, folgt $x_{max} = z'$. Dies ist ein Widerspruch.

Natürlich ist $v_{x_{max}}^{kon,S}(x_{max}) = 1$. Daher folgt aus Gleichung (2.36) und (2.37), daß es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für $v + \lambda v_{x_{max}}^{kon,S} \in V_{\mathcal{D}}^{kon,S}$ gilt

$$(v + \lambda v_{x_{max}}^{kon,S})(z) = u(z) \quad \forall z \in \mathcal{D}.$$

q.e.d.

Der Interpolationsoperator $I_{\mathcal{D}}^{kon,S}$ ist nicht symmetrisch. Eine symmetrischen stückweise konstanten Interpolationsoperator erhält man durch

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{D}}^{kon} : \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d) &\rightarrow L^\infty(\Omega) \\ I_{\mathcal{D}}^{kon} &:= 2^{-d} \sum_{S\in\{l,r\}^d} I_{\mathcal{D}}^{kon,S}. \end{aligned}$$

In Abschnitt 2.2 haben wir die Dünngitterinterpolanten u_h^{lin} und u_h^{kon} ohne Verwendung einer hierarchischen Basis definiert. Diese Interpolanten fallen jedoch mit den hier definierten Interpolanten zusammen, falls man die regulären dünnen Gitter verwendet. Das heißt es gilt für $h = 2^{-n}$ und $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$

$$u_h^{lin} = I_{\mathcal{D}_n^d}^{lin}(u) \quad \text{und} \tag{2.38}$$

$$u_h^{kon} = I_{\mathcal{D}_n^d}^{kon}(u), \tag{2.39}$$

wobei die Gleichung (2.39) genaugenommen nur bis auf eine Nullmenge gilt. Die Gleichung (2.38) folgt aus der Definition von $I^{lin}_{\mathcal{D}_n}$, Lemma 2.4 und — was man leicht nachrechnet — $u^{lin}_h \in V^{lin}_{\mathcal{D}_n}$. Zum Beweis von (2.39) ist es notwendig zuerst einseitige Interpolanten $u^{kon,S}_h$ nach der Vorgehensweise des Abschnittes 2.2.2 zu definieren. Für diese gilt dann

$$u^{kon}_h = 2^{-d} \sum_{S \in \{l,r\}^d} u^{kon,S}_h \quad \text{und} \tag{2.40}$$

$$u^{kon,S}_h = I^{kon,S}_{\mathcal{D}_n}(u). \tag{2.41}$$

Hieraus folgt (2.39).

Bis jetzt haben wir eine beliebige endliche Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}^d$ zugelassen. Dies hat jedoch Nachteile bei der Berechnung des punktweisen hierarchischen Überschusses, den wir nun definieren wollen.

Definition 2.4 (Punktweiser hierarchischer Überschuß) *Es sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}^d$ eine endliche Teilmenge und $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$. Es seien $(\lambda_x)_{x \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{D}|}$ so gewählt, so daß*

$$\sum_{x \in \mathcal{D}} \lambda_x v^{lin}_x = I^{lin}_{\mathcal{D}}(u).$$

Dann heißt λ_x der punktweise hierarchische Überschuß von $x \in \mathcal{D}$.

Nehmen wir nun an, es seien $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \subset \mathcal{P}^d$ zwei unterschiedliche endliche Teilmengen und $x \in \mathcal{D}$, $x \in \mathcal{D}'$. Betrachten wir nun die punktweisen hierarchischen Überschüsse des Punktes x bezüglich $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$. Diese seien λ_x beziehungsweise λ'_x. Schon im 1-dimensionalen Raum kann man leicht Gegenbeispiele konstruieren — man wähle zum Beispiel $\mathcal{D} = \{0.25, 0.5\}$ und $\mathcal{D}' = \{0.25\}$ (siehe Abbildung 2.12) —, die zeigen, daß λ_x und λ'_x nicht unbedingt gleich sein müssen. Somit kann der punktweise hierarchische Überschuß bei allgemeinen endlichen Teilmengen von $\mathcal{P}^d$ nicht als Invariante bei einer adaptiven Verfeinerung eines Gitters verwendet werden. Zieht man sich jedoch auf eine bestimmte Menge von Gittern zurück, so gilt immer $\lambda_x = \lambda'_x$ und der punktweise hierarchische Überschuß ist eine Invariante bei einer adaptiven Verfeinerung mit solchen Gittern. Dies hat viele Vorteile bei der Implementierung dieser Gitter. Die Menge von Gittern, die wir benötigen, ist die Menge der abstrakten dünnen Gitter.

Definition 2.5 (Abstraktes dünnes Gitter) *Eine endliche Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}^d$ heißt abstraktes dünnes Gitter, falls gilt:*

Für jedes $y \in \mathcal{P}^d$ und $x \in \mathcal{D}$ mit $y \prec x$ folgt: $\quad y \in \mathcal{D}$.

Hierbei ist $\prec$ die in (2.27) definierte Halbordnung.

In [32] ist eine etwas andere Definition für ein abstraktes dünnes Gitter im 2-dimensionalen Raum angegeben. Man kann aber zeigen, daß diese Definitionen äquivalent sind. Satz 2.1 in [32] impliziert, daß alle „Vater-Punkte“ eines Gitterpunktes in einem abstrakten dünnen Gitter wieder zu diesem dünnen Gitter gehören müssen. Dies zeigt, daß das Gitter in Abbildung 2.7 kein abstraktes dünnes Gitter ist. Daher sind zusammengesetzte dünne Gitter im allgemeinen keine abstrakten dünnen Gitter.

Die Invarianz des hierarchischen Überschusses bei abstrakten dünnen Gittern zeigt folgender Satz.

Satz 2.6 *Es seien $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ abstrakte dünne Gitter und $x \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Des weiteren seien λ_x und λ'_x die hierarchischen Überschüsse einer Funktion $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$ bezüglich $\mathcal{D}$ beziehungsweise $\mathcal{D}'$. Dann gilt*

$$\lambda_x = \lambda'_x.$$

Beweis: Nehmen wir an es gelte $\lambda_x \neq \lambda'_x$. Es seien $\lambda_y, \lambda'_y \in \mathbb{R}$ die punktweisen hierarchischen Überschüsse der Funktion $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$ bezüglich $\mathcal{D}$ beziehungsweise $\mathcal{D}'$. Dann folgt

$$\sum_{y \in \mathcal{D}} \lambda_y v_y^{lin}(z) = I_{\mathcal{D}}^{lin}(u)(z) = u(z) = I_{\mathcal{D}'}^{lin}(u)(z) = \sum_{y \in \mathcal{D}'} \lambda'_y v_y^{lin}(z) \quad \forall z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'.$$

Es sei nun $z \in \mathcal{P}^d$ mit $z \prec x$. Da $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ abstrakte dünne Gitter sind, folgt $z \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Wegen Lemma 2.6 ist $v_y^{lin}(z) = 0$ falls $y \not\prec z$. Weil $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ abstrakte dünne Gitter sind und da $\prec$ eine Halbordnung ist, erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\sum_{y \prec x} \lambda_y v_y^{lin}(z) &= \sum_{y \prec z} \lambda_y v_y^{lin}(z) = \sum_{y \in \mathcal{D}} \lambda_y v_y^{lin}(z) = u(z) = \\
&= \sum_{y \in \mathcal{D}'} \lambda'_y v_y^{lin}(z) = \sum_{y \prec z} \lambda'_y v_y^{lin}(z) = \sum_{y \prec x} \lambda'_y v_y^{lin}(z).
\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\sum_{y \prec x} \lambda_y v_y^{lin}(z) = u(z) = \sum_{y \prec x} \lambda'_y v_y^{lin}(z) \quad \forall z \prec x. \tag{2.42}$$

Die Anzahl von Unbekannten $(\lambda_y)_{y \prec x}$ und die Anzahl von Gleichungen in (2.42) ist gleich. Daher sind die $(\lambda_y)_{y \prec x}$ eindeutig und es gilt

$$\lambda_y = \lambda'_y \quad \forall y \prec x.$$

Dies zeigt $\lambda_x = \lambda'_x$. **q.e.d.**

In Abschnitt 2.2.2 haben wir den hierarchischen Überschuß einer Mehrfachfolge definiert. Zwischen diesem und dem punktweise hierarchischen Überschuß besteht folgender Zusammenhang

$$v_I = \sum_{\substack{x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathcal{P}^d \\ (T(x_1),\cdots,T(x_d))=I}} \lambda_x v_x^{lin}, \tag{2.43}$$

wobei v_I der hierarchische Überschuß der Mehrfachfolge $I_{2^{-I}}^{lin}(u)$ ist. Für $d = 1$ erhält man diese Gleichung durch einfaches Nachrechnen. Im d-dimensionalen Raum kann man den Beweis der Gleichung mit Hilfe von Lemma 2.3 auf den 1-dimensionalen Fall reduzieren.

Zum Schluß werden nun noch Räume definiert, deren Funktionen am Rand von Ω^d verschwinden. Hierzu sei für eine endliche Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}^d$

$$\mathring{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cap]0,1[^d$$

und

$$\mathring{V}_{\mathcal{D}} := \left\langle \left\{ v_x^{lin} \middle| x \in \mathring{\mathcal{D}} \right\} \right\rangle_{\mathbb{R}}.$$

2.4 Diskrete Normen und einige Ungleichungen

Bei der Berechnung des Fehlers bei numerischen Experimenten verwendet man gerne diskrete Normen, da diese sich einfacher berechnen lassen als kontinuierliche Normen. Ziel dieses Abschnittes ist es geeignete diskrete Normen auf dünnen Gittern zu definieren und Ungleichungen zwischen diesen und kontinuierlichen Normen zu beweisen.

Für eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$ und eine endliche Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}^d$ sei

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{D},2} &:= \sqrt{|\mathcal{D}|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|^2} \quad \text{und} \\ \|f\|_{\mathcal{D},\infty} &:= \max_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|. \end{aligned}$$

Für die regulären dünnen Gitter $\mathcal{D}_n^d$ zeigt folgendes Lemma den Zusammenhang zwischen diesen diskreten Normen und kontinuierlichen Normen.

Lemma 2.7 *Für alle $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\begin{aligned} (n^{1-d})^{\frac{3}{2}} \|I^{lin}_{\mathcal{D}_n^d}(f)\|_{L^2(\Omega^d)} &\stackrel{\sim}{<} \|f\|_{\mathcal{D}_n^d,2} \quad \textit{und} \\ n^{1-d} \|I^{lin}_{\mathcal{D}_n^d}(f)\|_{L^\infty(\Omega^d)} &\stackrel{\sim}{<} \|f\|_{\mathcal{D}_n^d,\infty} \le \|f\|_{L^\infty(\Omega^d)}. \end{aligned}$$

Beweis: Die Ungleichung $\|f\|_{\mathcal{D}_n^d,\infty} \le \|f\|_{L^\infty(\Omega^d)}$ ist trivial.

Wegen (2.38) und (2.20) folgt

$$I^{lin}_{\mathcal{D}_n^d}(f) = \sum_{s=1}^{d} (-1)^{s+1} \binom{d-1}{s-1} \sum_{|K|=n+d-s} I^{lin}_{2^{-K}}(f).$$

Bekanntlich gilt für alle K und alle $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$

$$\|I^{lin}_{2^{-K}}(f)\|_{L^2(\Omega^d)} \stackrel{\sim}{<} \|f\|_{\Omega_K,2} \quad \text{und} \quad \|I^{lin}_{2^{-K}}(f)\|_{L^\infty(\Omega^d)} = \|f\|_{\Omega_K,\infty}.$$

Mit Hilfe von (2.10) folgt daher für alle $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|I^{lin}_{\mathcal{D}_n^d}(f)\|_{L^\infty(\Omega^d)} &\le \sum_{s=1}^{d} \binom{d-1}{s-1} \sum_{|K|=n+d-s} \|I^{lin}_{2^{-K}}(f)\|_{L^\infty(\Omega^d)} = \\ &= \sum_{s=1}^{d} \binom{d-1}{s-1} \sum_{|K|=n+d-s} \|f\|_{\Omega_K,\infty} \stackrel{\sim}{<} (n+d-1)^{d-1} \|f\|_{\mathcal{D}_n^d,\infty}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die zweite Ungleichung des Lemmas bewiesen.

Bei der ersten müssen wir etwas anders vorgehen. Mit Hilfe von (2.10), (2.23) und der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung folgt für alle $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\|I^{lin}_{\mathcal{D}^d_n}(f)\|_{L^2(\Omega^d)} &\leq \sum_{s=1}^{d} \binom{d-1}{s-1} \sum_{|K|=n+d-s} \|I^{lin}_{2^{-K}}(f)\|_{L^2(\Omega^d)} \tilde{<} \\
&\tilde{<} \quad \sum_{s=1}^{d} \sum_{|K|=n+d-s} \|f\|_{\Omega_K,2} \leq \\
&\leq \quad \sqrt{d(n+d-1)^{d-1}} \sqrt{\sum_{s=1}^{d} \sum_{|K|=n+d-s} \|f\|^2_{\Omega_K,2}} \leq \\
&\leq \quad \sqrt{d(n+d-1)^{d-1}} \sqrt{\sum_{s=1}^{d} \sum_{|K|=n+d-s} |\Omega_K|^{-1} \sum_{z \in \Omega_K} |f(z)|^2} \tilde{<} \\
&\tilde{<} \quad \left(d(n+d-1)^{d-1}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{|\mathcal{D}^d_n|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{D}^d_n} |f(z)|^2} = \left(d(n+d-1)^{d-1}\right)^{\frac{3}{2}} \|f\|_{\mathcal{D}^d_n,2}.
\end{aligned}
$$

. **q.e.d.**

Man kann sich nun fragen, ob die Ungleichungen in Lemma 2.7 scharf sind. Es ist etwas mühsam ein Beispiel zu beschreiben, für das diese Ungleichungen scharf sind. Es gilt aber nicht die Ungleichung $\|I^{lin}_{\mathcal{D}^d_n}(f)\|_{L^\infty(\Omega^d)} \leq \|f\|_{\mathcal{D}^d_n,\infty}$ für alle $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$. Man betrachte hierzu das Beispiel in Abbildung 2.13. Mit Hilfe der Formel für den hierarchischen Überschuß (siehe zum Beispiel [41] oder [9]) rechnet man leicht nach, daß gilt

$$3 = \|I^{lin}_{\mathcal{D}^2_2}(f)\|_{L^\infty(\Omega^d)} > \|f\|_{\mathcal{D}^2_2,\infty} = 1.$$

Dies zeigt, daß es zumindest schwierig ist, die in Lemma 2.7 angegeben Ungleichungen zu verbessern.

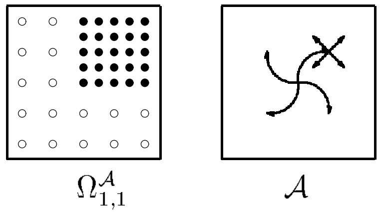


Abbildung 2.6: Zusammengesetztes volles Gitter auf einer adaptiven Struktur.

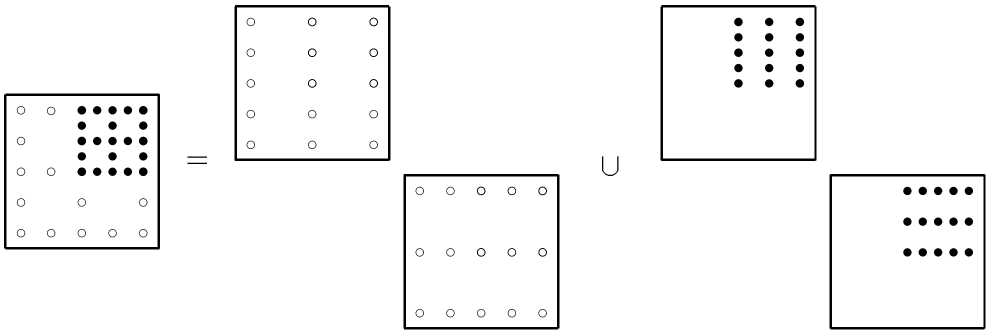


Abbildung 2.7: Definition eines zusammengesetzten dünnen Gitters.

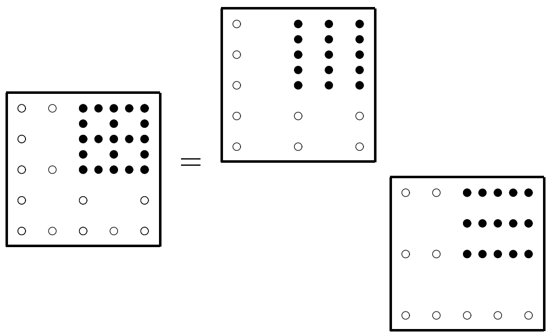


Abbildung 2.8: Zusammengesetztes dünnes Gitter als Vereinigung von zusammengesetzten vollen Gittern.

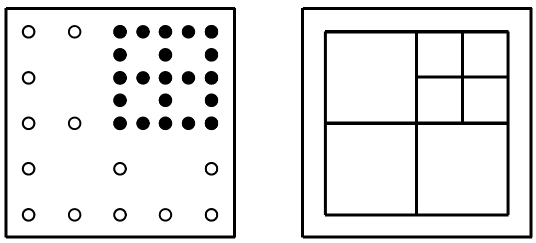


Abbildung 2.9: Links:Zusammengesetztes dünnes Gitter. Rechts: Die zugehörigen lokalen Gebiete $\Phi_x(\Omega^2)$ für $x \in \mathcal{N}$.

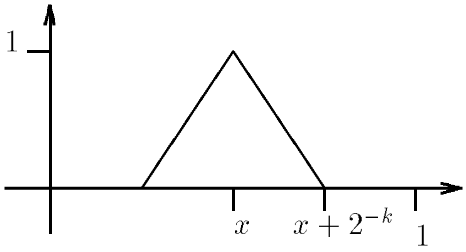


Abbildung 2.10: Stückweise lineare Basisfunktion $w_{x,k}^{lin}$

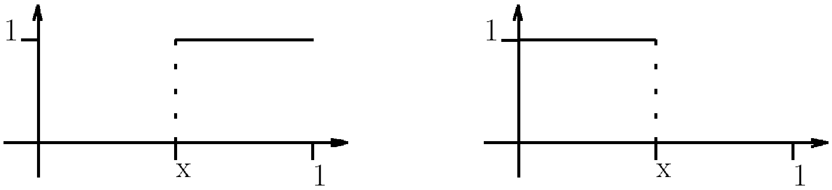


Abbildung 2.11: Stückweise konstante Basisfunktionen $w_x^{kon,r}$ und $w_x^{kon,l}$

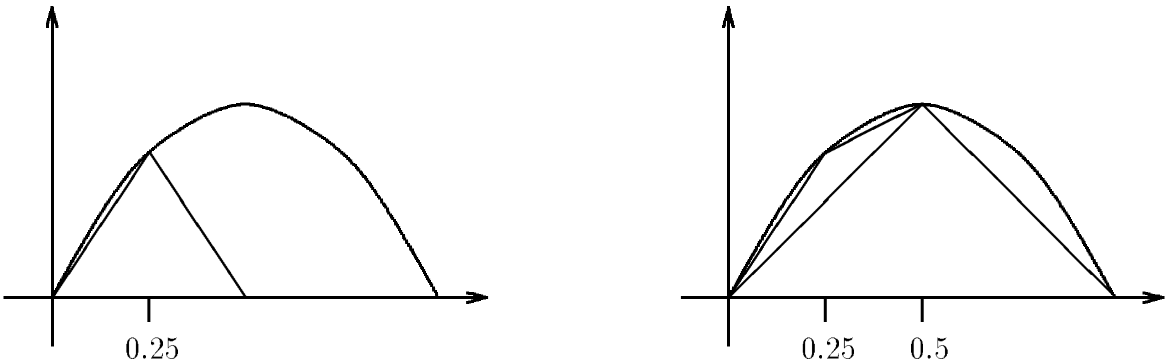


Abbildung 2.12: Unterschiedlicher hierarchischer Überschuß bei 0.25

1	-1	1	-1	1
-1		-1		-1
1	-1	1	-1	1
-1		-1		-1
1	-1	1	-1	1

Abbildung 2.13: Gegenbeispiel: Werte einer Funktion auf dem Gitter $\mathcal{D}_2^2$.

Kapitel 3

Elliptische Differentialgleichungen

3.1 Grundlegende Definitionen und Vereinbarungen

Wir wollen einige grundlegende Vereinbarungen treffen, die wir für die numerische Lösung von elliptischen Differentialgleichungen benötigen. Hierbei verwenden wir ähnliche Vereinbarungen wie in [5], [7] oder [23].

Zur Beschreibung der hier betrachteten Klasse von elliptischen Differentialgleichungen wird die schwache Formulierung verwendet. Es sei $B = (b_{ij})_{i,j=1,\cdots,n} \in \left(L^\infty(\Omega^d)\right)^{d\times d}$, $\underline{c} = (c_i)_{i=1,\cdots,n} \in \left(L^\infty(\Omega^d)\right)^d$ und $c_0 \in L^\infty(\Omega^d)$. Die Matrix B sei gleichmäßig elliptisch. Das heißt, es gibt eine Konstante $\alpha > 0$, so daß gilt

$$\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{d} \xi_i^2 \quad \text{für fast alle} \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1}$$

Die Bilinearform a sei definiert durch

$$\begin{aligned} a : H^1(\Omega^d) \times H^1(\Omega^d) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) &\mapsto \int\limits_{\Omega^d} (\nabla u)^T B \nabla v + \langle \nabla u, \underline{c} \rangle v + c_0\, u\, v\, d\lambda. \end{aligned}$$

Eine kurze einfache Rechnung zeigt die Existenz einer Konstante $\beta > 0$, so daß gilt (siehe [23])

$$a(u, v) \leq \beta \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \text{für alle} \quad u, v \in H^1(\Omega^d).$$

Außerdem sei $f \in L^2(\Omega^d)$ die rechte Seite. Es sei nun $u \in H_0^1(\Omega^d)$ die Lösung folgender schwachen Gleichung

$$a(u, v) = \int_{\Omega^d} f v d\lambda \quad \text{für alle} \quad v \in H_0^1(\Omega^d). \tag{3.2}$$

Wir nehmen an, daß es für jedes $f \in L^2(\Omega^d)$ genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega^d)$ dieser Gleichung gibt.

Zur Vereinfachung betrachten wir hier also nur elliptische Differentialgleichungen mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Die meisten hier dargestellten Ergebnisse lassen sich aber auch auf andere Randbedingungen verallgemeinern.

Der Begriff der H_0^1-Elliptizität einer Bilinearform wird in der Literatur unterschiedlich verwendet. Deshalb wollen wir hier genau definieren, was wir unter der Elliptizität einer Bilinearform verstehen.

Definition 3.1 (H_0^1-Elliptizität) *Wir bezeichnen hier die Bilinearform a als H_0^1-elliptisch, falls es eine Konstante $\gamma > 0$ gibt, so daß gilt*

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega^d). \tag{3.3}$$

Wir setzen hier aber nicht immer voraus, daß a H_0^1-elliptisch ist.

Wichtig für Konvergenzuntersuchungen von Finite-Elemente-Diskretisierungen ist die Regularität des Problems und des adjungierten Problems.

Definition 3.2 (H^2-Regularität des Problems) *Die Gleichung (3.2) ist H^2-regulär, falls es eine Konstante C_{reg} gibt, so daß gilt:*

> *Für jedes $f \in L^2(\Omega^d)$ gibt es genau ein Lösung $u \in H_0^1(\Omega^d)$ der Gleichung (3.2) und es gilt für diese Lösung*
>
> $$\|u\|_{H^2} \leq C_{reg} \|f\|_{L^2}.$$

Definition 3.3 (H^2-Regularität des adjungierten Problems) *Die Lösung des adjungierten Problems zur Bilinearform a ist die Lösung $w \in H_0^1(\Omega^d)$ der Gleichung*

$$a(v, w) = \int_{\Omega^d} g v \, d\lambda \quad \text{für alle} \quad v \in H_0^1(\Omega^d), \tag{3.4}$$

wobei $g \in L^2(\Omega^d)$ die rechte Seite ist. Diese Gleichung ist H^2-regulär, falls es eine Konstante C_{reg} gibt, so daß gilt:

> *Für jedes $g \in L^2(\Omega^d)$ gibt es genau ein Lösung $w \in H_0^1(\Omega^d)$ der Gleichung (3.4) und es gilt für diese Lösung*
>
> $$\|w\|_{H^2} \leq C_{reg} \|g\|_{L^2}.$$

3.2 Extension und Restriktion von Funktionen

Zur Untersuchung von Regularitätseigenschaften von elliptischen Differentialgleichungen (siehe Abschnitt 4.2.4 und 3.5) oder um elliptische Differentialgleichungen diskret ableiten zu können (siehe Abschnitt 4.2.3) benötigen wir Differenzenoperatoren (z.B. den Differenzenoperator $\delta^1_{h_x}$). Ein Problem beim Arbeiten mit diesen Operatoren ist, daß die Funktion $\delta^1_{h_x}(v)$ nicht den gleichen Definitionsbereich wie die Funktion v hat. Es gibt zwei Auswege aus dieser Problematik. Zum eine kann man den Definitionsbereich der Funktion u vergrößern und zum anderen kann man den Definitionsbereich von $\delta^1_{h_x}(v)$ verkleinern. Beide Vorgehensweisen haben Vor- und Nachteile. Eine Erweiterung des Definitionsbereichs von u kann zu einer geringeren Glattheit der erweiterten Funktion führen. Bei der Verkleinerung des Definitionsbereichs von $\delta^1_{h_x}(v)$ können wichtige Randbedingungen verloren gehen, die für eine partielle Integration notwendig sind. Meistens ist es aber möglich einen der beiden hier dargestellten Wege zu gehen. Falls keiner der hier beschriebenen Wege zum Erfolg führt, werden geeignete Randbedingungen an die variablen Koeffizienten der elliptischen Differentialgleichung gestellt (siehe Satz 4.1).

Zum Erweitern von Funktionen benötigen wir ein Band. Es sei

$$S^1 = \mathbb{R}/(2\mathbb{Z})$$

der Kreisring und

$$B^d = S^1 \times]0,1[^{d-1}$$

das d-dimensionale Band. Trivialerweise ist $B^1 = S^1$. Im 2-dimensionalen Raum schreiben wir kurz $B := B^2$. Mit $\Phi : \mathbb{R} \to S^1$ bezeichnen wir den differenzierbaren Restklassenhomomorphismus. Zur Vereinfachung der Schreibweise identifizieren wir die Punkte

$$x \quad \text{und} \quad \Phi(x) \quad \text{für alle} \quad x \in]-1,1].$$

Daher erhalten wir die differenzierbaren Einbettungen

$$[0,1] \hookrightarrow S^1 \quad \text{und} \quad \Omega^d \hookrightarrow B^d.$$

Auf S^1 und B^d kann man natürlich Sobolev-Räume einführen (siehe [38]). Die partielle Ableitung auf S^1 sei $\frac{\partial}{\partial x}$ und auf B^d $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Nun können wir folgende 1-dimensionale Extensionsoperatoren definieren (siehe Abbildung 3.1 und 3.2)

$$\tilde{}: L^2(]0,1[) \to L^2(S^1) \quad \text{und} \quad \hat{}: L^2(]0,1[) \to L^2(S^1) \tag{3.5}$$

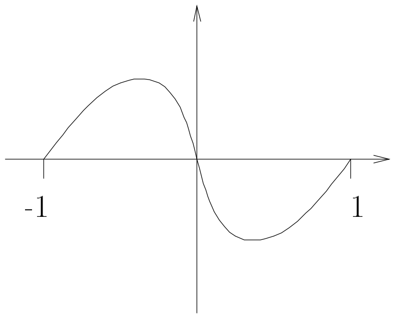


Abbildung 3.1: Extensionsoperator $\tilde{}$.

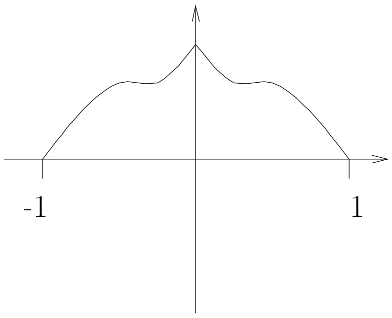


Abbildung 3.2: Extensionsoperator $\hat{}$.

$\mathcal{C}([0,1])$ ist dicht in $L^2(]0,1[)$. Daher reicht es die Operatoren $\tilde{}$ und $\hat{}$ auf $\mathcal{C}([0,1])$ zu definieren. Es sei

$$\tilde{\varphi}(\Phi(x)) = \varphi(|x|)\cdot \operatorname{sgn}(x) \quad \text{und} \quad \hat{\varphi}(\Phi(x)) = \varphi(|x|)$$

für jedes $x \in]-1,1]$ und $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$. Natürlich können wir die Operatoren $\tilde{}$ und $\hat{}$ in x_1-Richtung auf Funktionen in $L^2(\Omega)$ anwenden. Dann erhalten wir die Operatoren

$$\tilde{}: L^2(\Omega) \to L^2(B) \quad \text{und} \quad \hat{}: L^2(\Omega) \to L^2(B),$$

welche die gleichen Namen haben wie die Operatoren in (3.5). Das folgende Lemma beschreibt die Glattheitseigenschaften der erweiterten Funktionen.

Lemma 3.1

1. *Falls $v, \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(]0,1[)$, dann gilt*

$$\left\|\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}\right\|_{L^2(S^1)} \le \sqrt{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(]0,1[)} \quad \textit{und} \quad \left\|\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}\right\|_{L^\infty(S^1)} \le \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(]0,1[)}.$$

2. *Falls $v, \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(]0,1[)$ und $f(0)=f(1)=0$, dann gilt*

$$\left\|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right\|_{L^2(S^1)} \le \sqrt{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(]0,1[)} \quad \textit{und} \quad \left\|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}\right\|_{L^\infty(S^1)} \le \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(]0,1[)}.$$

3. *Falls $v, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \in L^2(]0,1[)$ und $f(0)=f(1)=0$, dann gilt*

$$\left\|\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right\|_{L^2(S^1)} \le \sqrt{2}\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^2(]0,1[)} \quad \textit{und} \quad \left\|\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2}\right\|_{L^\infty(S^1)} \le \left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|_{L^\infty(]0,1[)}.$$

Analoge Formeln gelten für Funktionen die auf Ω^d definiert sind.

Beweis: Unter der zusätzlichen Annahme $v \in \mathcal{C}^2([0,1])$ ist es ganz leicht nachzuprüfen, daß das Lemma 3.1 richtig ist (betrachte Abbildung 3.1 und 3.2). Der Operator $\hat{}$ ist linear und stetig auf $\mathcal{C}^2([0,1])$ bezüglich der Sobolev-Raum-Norm $\|\cdot\|_{H^1}$. $\mathcal{C}^2([0,1])$ ist dicht in $H^1(]0,1[)$. Daher folgt mit Hilfe eines Dichtheitsargumentes

$$\left\|\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}\right\|_{L^2(S^1)} \leq \sqrt{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^2(]0,1[)}$$

falls $v, \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(]0,1[)$. Damit ist $\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}$ eine meßbare Funktion (siehe [3]). Aus der Definition von $\hat{}$ erhält man

$$\left\|\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}\right\|_{L^\infty(]-1+\epsilon,-\epsilon[\cup]\epsilon,1-\epsilon[)} \leq \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(]\epsilon,1-\epsilon[)} \tag{3.6}$$

für alle $0.5 > \epsilon > 0$. Da $\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}$ eine meßbare Funktion ist, folgt durch einen Grenzübergang $\epsilon \mapsto 0$, daß (3.6) auch für $\epsilon = 0$ gilt. Damit ist 1. bewiesen. Die Aussagen 2. und 3. folgen analog. **q.e.d.**

Die Restriktion von Funktionen werden wir nur im 2-dimensionalen Raum vornehmen. Wir benötigen diese im Abschnitt 4.2.3 für die diskrete Ableitung von schwachen Gleichungen.

Man nehme an es sei $0 < h_x < \frac{1}{2}$. Zum Beweis der Konvergenz der Kombinationstechnik zur Lösung von elliptischen Differentialgleichungen werden wir Funktionen auf das Gebiet

$$\Omega_{h_x} :=]h_x, 1-h_x[\times]0,1[$$

restringieren. Oft werden wir dabei den Restriktionsoperator weglassen. Zum Beispiel schreiben wir für eine Funktion $f \in L^2(B)$:

$$f \in L^2(\Omega_{h_x}) \quad \text{anstatt} \quad f|_{\Omega_{h_x}} \in L^2(\Omega_{h_x}).$$

Mit Hilfe des Gebietes Ω_{h_x} definieren wir folgende Bilinearformen und Seminormen

$$\begin{aligned}
b^x_{h_x}(w,v) &:= \int_{\Omega_{h_x}} b_{1,1}\tfrac{\partial w}{\partial x}\tfrac{\partial v}{\partial x} + (b_{2,1}+b_{1,2})\tfrac{\partial w}{\partial y}\tfrac{\partial v}{\partial x}d\lambda + \int_\Omega b_{2,2}\tfrac{\partial w}{\partial y}\tfrac{\partial v}{\partial y}d\lambda, \\
b^{xy}_{h_x}(w,v) &:= \int_{\Omega_{h_x}} b_{1,1}\tfrac{\partial w}{\partial x}\tfrac{\partial v}{\partial x} + (b_{2,1}+b_{1,2})\tfrac{\partial w}{\partial x}\tfrac{\partial v}{\partial y}d\lambda + \int_\Omega b_{2,2}\tfrac{\partial w}{\partial y}\tfrac{\partial v}{\partial y}d\lambda, \qquad (3.7)\\
|w|_{H^1_{h_x}} &:= \sqrt{\left\|\tfrac{\partial w}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega_{h_x})} + \left\|\tfrac{\partial w}{\partial y}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}, \qquad (3.8)\\
|w|_{H^{1,2}_{h_x}} &:= \left|\tfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{H^1_{h_x}} \quad \text{und} \quad |w|_{H^{2,1}_{h_x}} := \left|\tfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{H^1_{h_x}}, \\
|w|_{H^{1,2}(\Omega)} &:= \left|\tfrac{\partial w}{\partial y}\right|_{H^1(\Omega)} \quad \text{und} \quad |w|_{H^{2,1}(\Omega)} := \left|\tfrac{\partial w}{\partial x}\right|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die Seminormen $|\cdot|_{H^1_{h_x}}$, $|\cdot|_{H^{1,2}_{h_x}}$ und $|\cdot|_{H^{2,1}_{h_x}}$ sind gewichtete Sobolev-Raum-Normen. Man bezeichne mit $H^1_{h_x}$ den Sobolev-Raum

$$H^1_{h_x} := \left\{ f \in L^2(\Omega) \,\Big|\, |w|_{H^1_{h_x}} < \infty \right\}.$$

Da die Matrix B gleichmäßig elliptisch ist — siehe Gleichung (3.1) —, erhält man nach einer einfachen Rechnung folgendes Lemma.

Lemma 3.2 *Falls $v, w \in H^1(\Omega)$, dann gilt*

$$|b^x_{h_x}(w,v)| \leq 4\|B\|_\infty |w|_{H^1_{h_x}} |v|_{H^1_{h_x}} \quad \textit{und} \quad b^x_{h_x}(w,w) \geq \alpha |w|^2_{H^1_{h_x}}.$$

Daher ist die Bilinearform $b^x_{h_x}$ elliptisch bezüglich der Seminorm $|\cdot|_{H^1_{h_x}}$.
Das gleiche gilt für die Bilinearform $b^{xy}_{h_x}$.

3.3 Differenzenoperatoren

Für $1 > h > 0$ definieren wir die Differenzenoperatoren

$$\tau_h(\varphi)(x) := \varphi(x+h), \quad \delta^1_h := \frac{\tau_{\frac{h}{2}} - \tau_{-\frac{h}{2}}}{h} \quad \text{und} \quad \delta^2_h := \delta^1_h \circ \delta^1_h.$$

Wir wollen nicht genau beschreiben, auf welchen Räumen diese Operatoren definiert sind, da dies aus dem Zusammenhang klar wird. Wichtig ist, daß man diese Operatoren natürlich auch auf Funktionen mit mehreren Variablen anwenden kann. Dann sollen diese Operatoren immer in der x_1- beziehungsweise x-Richtung wirken.

Folgendes Lemma beschreibt den Zusammenhang zwischen Differenzenoperatoren und der Ableitung. Einen Beweis analoger Resultate findet man in [38].

Lemma 3.3 *Für $0 < h \leq \frac{1}{2}$ gilt*

$$\begin{aligned}
\|\delta^1_h(f)\|_{L^\infty(B)} &\leq \left\|\tfrac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^\infty(B)} \quad \textit{falls} \quad f, \tfrac{\partial f}{\partial x} \in L^\infty(B), \\
\|\delta^1_h(f)\|_{L^2(B)} &\leq \left\|\tfrac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^2(B)} \quad \textit{falls} \quad f, \tfrac{\partial f}{\partial x} \in L^2(B), \\
\|\delta^1_h(f)\|_{\Omega_h} &\leq \left\|\tfrac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} \quad \textit{falls} \quad f, \tfrac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\Omega) \quad \textit{und} \\
\|\delta^1_h(f)\|_{\Omega_{2h}} &\leq \left\|\tfrac{\partial f}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega_h)} \quad \textit{falls} \quad f, \tfrac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\Omega_h).
\end{aligned}$$

Ähnlich wie im kontinuierlichen Fall kann man mit Differenzenoperatoren partiell integrieren.

Lemma 3.4 (Diskrete Partielle Integration)
Es gilt für alle Funktionen $w, v \in L^2(B^d)$ und alle $0 < h \leq \frac{1}{2}$

$$\int_{B^d} w\delta_h^1(v)d\lambda = -\int_{B^d} \delta_h^1(w)vd\lambda.$$

Beweis: Eine einfache Rechnung zeigt

$$\delta_h^1(w\tau_{-\frac{h}{2}}(v)) = \delta_h^1(w)v + \tau_{-\frac{h}{2}}\left(w\delta_h^1(v)\right).$$

Daher erhalten wir

$$0 = \int_B \delta_h^1(w)v \; d\lambda + \int_B w\delta_h^1(v) \; d\lambda.$$

q.e.d.

3.4 Sobolev-Räume auf dem Einheitswürfel

Wir benötigen Sobolev-Räume mit unterschiedlichen Randbedingungen und geeignete dichte Teilmengen. Hierzu zerlegen wir zuerst den Rand von Ω^d in mehrere Teile. Es sei für $1 \leq i \leq d$

$$\Gamma_i = \left\{(x_1, \cdots, x_d) \in [0,1]^d \;\middle|\; x_i = 0 \quad \text{oder} \quad x_i = 1\right\}.$$

Aus Lemma 3.1 folgt, daß man den Raum $H^1(\Omega^d)$ stetig in die Räume $H^1(B)$ und $H^1(T^d)$ einbetten kann, wobei T^d der d-dimensionale Torus ist. Aus der Aufgabe *8.2* in [38] folgt somit, daß es einen stetigen Spuroperator

$$\gamma_i : H^1(\Omega^d) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$$

gibt. Daher können wir für jede Teilmenge $D \subset \{1, \cdots, d\}$ den Sobolev-Raum

$$H_D^1(\Omega^d) := \left\{f \in H^1(\Omega^d) \middle| \gamma_i(f) = 0 \quad \text{für alle} \quad i \in D\right\}$$

definieren. Es gilt nun

Lemma 3.5 *Es sei $D \subset \{1, \cdots, d\}$. Dann ist $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}^d) \cap H_D^1(\Omega^d)$ dicht in $H_D^1(\Omega^d)$.*

Hinweis für einen Beweis: Dieses Lemma folgt wegen der Randbedingungen nicht direkt aus den bekannten Dichtheitsaussagen für Sobolev-Räume. Man kann dieses Lemma aber dadurch beweisen, daß man die Funktionen aus $H_D^1(\Omega^d)$ mit Hilfe der Operatoren $\tilde{}$ und $\hat{}$ in $H^1(T^d)$ einbettet. Die Regularisierte dieser eingebetteten Funktionen besitzt die gleichen Randbedingungen wie die ursprüngliche Funktion, wenn man eine symmetrische Funktion h_ϵ für das Convolutionsintegral verwendet (siehe Abschnitt 1.2 in [38]). **q.e.d.**

Für unsere Zwecke benötigen wir eine etwas stärkere Dichtheitsaussage.

Lemma 3.6 *Es sei $D \subset \{1, \cdots, d\}$ und $j \in \{1, \cdots, d\} \backslash D$. Dann ist die Menge*

$$S_{D,j}^d := \left\{ \varphi \in H^2(\Omega^d) \cap H_D^1(\Omega^d) \middle| \gamma_j \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = 0 \right\}$$

dicht in $H_D^1(\Omega^d)$.

Beweis: O.B.d.A. sei $j = 1$. Es sei $\epsilon > 0$ und $f \in H_D^1(\Omega^d)$. Wegen Lemma 3.5 gibt es eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}^d) \cap H_D^1(\Omega^d)$, so daß gilt

$$\|f - \phi\|_{H^1} \leq \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Für jedes $z = (x_2, \cdots, x_d) \in \Omega^{d-1}$ betrachte man die Funktion

$$\phi_z : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x_1 \mapsto \phi(x_1, x_2, \cdots, x_d).$$

Für jedes $0 < h < \frac{1}{2}$ und jedes $z \in \Omega^{d-1}$ definiere man die Funktion $\varphi_{h,z} \in \mathcal{C}^1([0,1])$ durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{h,z}}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial \varphi_{h,z}}{\partial x_1}(1) &= 0 \\ \varphi_{h,z}|_{[0,h]} \quad \text{und} \quad \varphi_{h,z}|_{[1-h,1]} & \quad \text{sind Polynome vom Grad 2} \\ \varphi_{h,z}|_{[h,1-h]} &= \phi_z|_{[h,1-h]}. \end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, daß die Funktion

$$\varphi_h : \Omega^d \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, \cdots, x_d) \mapsto \varphi_{h,(x_2,\cdots,x_d)}(x_1)$$

aus $S_{D,j}^d$ ist. Außerdem sieht man $\|\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\|_\infty \leq 2\|\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\|_\infty$ und deshalb $\|\frac{\partial \varphi_h}{\partial x_1} - \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\|_2 \leq 2\sqrt{h}\|\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\|_\infty$. Hieraus folgt mit einer einfachen Rechnung

$$\|\varphi_h - \phi\|_{H^1} \leq \tfrac{\epsilon}{2},$$

falls h klein genug ist. Zusammen mit (3.9) folgt $\|f - \varphi_h\|_{H^1} \leq \epsilon$. **q.e.d.**

3.5 Regularität der Lösung auf dem Einheitswürfel

Es ist bekannt, daß unter geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizienten einer elliptischen Differentialgleichung, deren Lösung auf 2-dimensionalen konvexen Gebieten H^2-regulär ist. Eine höhere Regularität wie die H^3-Regularität kann man nur erhalten, wenn zum Beispiel die rechte Seite am Rand Null wird (siehe [21]). In beliebig dimensionalen Räumen ist es sehr schwer solche Resultate bei beliebigen variablen Koeffizienten zu beweisen.

Wesentlich einfacher ist es Regularitätsaussagen für das Poisson-Problem auf dem Einheitswürfel zu erhalten. Dies ist nicht nur für die H^2-Regularität der Fall sondern auch für die Regularität in bestimmten gemischten Sobolev-Räumen, falls die rechte Seite am Rand verschwindet. Dies soll in diesem Abschnitt gezeigt werden. Die Regularität in gemischten Sobolev-Räumen werden wir für die Konvergenz der Galerkin-Lösung in negativen Normen benötigen (siehe Abschnitt 5.2).

Zuerst definieren wir eine geeignete Regularität in gemischten Sobolev-Räumen.

Definition 3.4 ($H^{G,l}$-Regularität) *Es sei $w \in H_0^1(\Omega^d)$ die Lösung der Gleichung*

$$a(v, w) = \int_{\Omega^d} gv \; d\lambda \quad \textit{für alle} \quad v \in H_0^1(\Omega^d), \tag{3.10}$$

wobei $g \in L^2(\Omega^d)$. Es sei $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 2$. Das Problem (3.10) ist $H^{G,l}$-regulär, falls es eine Konstante C_{reg} gibt, so daß gilt:

> *Für jedes $g \in H_0^1(\Omega^d) \cap H^{G,l-2}(\Omega^d)$ gibt es genau ein Lösung $w \in H_0^1(\Omega^d)$ der Gleichung (3.10) und es gilt für diese Lösung*
>
> $$\|w\|_{H^{G,l}} \leq C_{reg} \|g\|_{H^{G,l-2}}.$$

Man beachte, daß in dieser Definition gefordert wird, daß g am Rand verschwindet. Bei der Definition der H^2-Regularität in der Definition 3.3 haben wir dies nicht gefordert.

Für das Poisson-Problem gilt nun:

Satz 3.1 (Regularität des Poisson-Problems) *Es sei $w \in H_0^1(\Omega^d)$ die Lösung der Gleichung*

$$\int_{\Omega^d} \langle \nabla v, \nabla w \rangle \; d\lambda = \int_{\Omega^d} gv \; d\lambda \quad \textit{für alle} \quad v \in H_0^1(\Omega^d), \tag{3.11}$$

wobei $g \in L^2(\Omega^d)$.

Dieses Problem ist H^2-regulär und $H^{G,l}$-regulär für alle $2 \leq l \leq d+2$.

Beweis: Es $0 < h < \frac{1}{2}$. Aus der Definition des Operators $\tilde{}$ (siehe Abschnitt 3.2) und des Differenzenoperators δ_h^2 (siehe Abschnitt 3.3) erhält man leicht (siehe Abbildung 3.1)

$$\delta_h^2(\tilde{w})\Big|_{\Omega^d} \in H_0^1(\Omega^d).$$

Daher folgt mit Lemma 3.3 und 3.4

$$\begin{aligned}
\left|\delta_h^1(\tilde{w})\right|_{H^1(B)}^2 &= \int_B \langle \nabla \delta_h^1(\tilde{w}), \nabla \delta_h^1(\tilde{w}) \rangle \; d\lambda = -\int_B \langle \nabla \tilde{w}, \nabla \delta_h^2(\tilde{w}) \rangle \; d\lambda = \\
&= -2 \int_{\Omega^d} \langle \nabla w, \nabla \delta_h^2(\tilde{w}) \rangle \; d\lambda = -2 \int_{\Omega^d} g \delta_h^2(\tilde{w}) \; d\lambda \leq \\
&\leq 2\|g\|_{L^2(\Omega^d)} \left\|\delta_h^2(\tilde{w})\right\|_{L^2(\Omega^d)} = \sqrt{2}\|g\|_{L^2(\Omega^d)} \left\|\delta_h^2(\tilde{w})\right\|_{L^2(B)} \leq \\
&\leq \sqrt{2}\|g\|_{L^2(\Omega^d)} \left|\delta_h^1(\tilde{w})\right|_{H^1(B)}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\left|\delta_h^1(\tilde{w})\right|_{H^1(B)} \leq \sqrt{2}\|g\|_{L^2(\Omega^d)}.$$

Wegen Satz 9.5 und Aufgabe 9.1 in [38] folgt daher für alle $1 \leq j \leq d$

$$\left\|\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x_1 \partial x_j}\right\|_{L^2(B)} \leq \sqrt{2}\|g\|_{L^2(\Omega^d)}$$

und damit natürlich auch

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega^d)} \leq \sqrt{2}\|g\|_{L^2(\Omega^d)}.$$

Aus Symmetriegründen gilt daher für alle $1 \leq i, j \leq d$

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega^d)} \leq \sqrt{2}\|g\|_{L^2(\Omega^d)}.$$

Dies zeigt die H^2-Regularität.

Durch Induktion nach l werden wir nun einerseits die $H^{G,l}$-Regularität beweisen und andererseits zeigen, daß folgende Aussage richtig ist:

> **A)** Es sei $D \subset \{1, \cdots, d\}$ mit $|D| = d - l + 2$. Der Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ sei definiert durch
>
> $$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i \notin D \\ 0 & \text{falls} \quad i \in D. \end{cases} \tag{3.12}$$
>
> Dann gilt $D^\alpha w \in H_D^1(\Omega^d) \cap H^2(\Omega^d)$ und für alle $v \in H_D^1(\Omega^d)$
>
> $$\int_{\Omega^d} \langle \nabla D^\alpha w, \nabla v \rangle \, d\lambda = \int_{\Omega^d} D^\alpha g v \, d\lambda. \tag{3.13}$$

Für $l = 2$ ist wegen der H^2-Regularität alles klar. Wir nehmen nun an, daß für $2 \leq l \leq d+1$ die $H^{G,l}$-Regularität bewiesen ist und **A** gilt.

Es sei $D' \subset \{1, \cdots, d\}$ mit $|D'| = d - l + 1$. O.B.d.A. nehmen wir an $D' = \{2, \cdots, d - l + 2\}$. Wir setzen nun $D = \{1, \cdots, d - l + 2\}$ und definieren α wie in (3.12). Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt $D^\alpha w \in H_D^1(\Omega^d) \cap H^2(\Omega^d)$. Hieraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} D^\alpha w \in H_{D'}^1(\Omega^d). \tag{3.14}$$

Diese Gleichung scheint klar zu sei. Einen exakten Beweis für (3.14) erhält man dadurch, daß man zeigt, daß $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}^d) \cap H_D^1(\Omega^d)$ dicht in $H_D^1(\Omega^d) \cap H^2(\Omega^d)$ ist. Hierzu lese man den Hinweis für den Beweis des Lemmas 3.5.

Wir nehmen nun kurz an $g \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}^d) \cap H_0^1(\Omega^d)$. Dann gilt $\gamma_1(D^\alpha g) = 0$. Hieraus folgt durch partielle Integration für $\varphi \in S^d_{D',1}$

$$-\int_{\Omega^d} D^\alpha g \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, d\lambda = \int_{\Omega^d} \frac{\partial D^\alpha g}{\partial x_1} \varphi\, d\lambda. \tag{3.15}$$

Mit Hilfe des Hinweises zum Beweis des Lemmas 3.5 erhält man leicht, daß $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}^d) \cap H_0^1(\Omega^d)$ dicht in $H_0^1(\Omega^d) \cap H^{G,(l+1)-2}(\Omega^d)$ ist. Daher gilt die Gleichung (3.15) auch für $g \in H^{G,(l+1)-2}(\Omega^d)$.

Falls $\varphi \in S^d_{D',1}$ ist (siehe Lemma 3.6), dann gilt $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \in H^1_D(\Omega^d)$. Daher folgt durch partielle Integration für jedes $\varphi \in S^d_{D',1}$ aus den Gleichungen (3.15) und (3.13)

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^d} \langle \nabla \frac{\partial D^\alpha w}{\partial x_1}, \nabla \varphi \rangle\, d\lambda &= -\int_{\Omega^d} \langle \nabla D^\alpha w, \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle\, d\lambda = \\ = -\int_{\Omega^d} D^\alpha g \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, d\lambda &= \int_{\Omega^d} \frac{\partial D^\alpha g}{\partial x_1} \varphi\, d\lambda.\end{aligned}$$

Wegen Lemma 3.6 erhalten wir somit für $\frac{\partial D^\alpha w}{\partial x_1} \in H^1_{D'}(\Omega^d)$ und alle $v \in H^1_{D'}(\Omega^d)$

$$\int_{\Omega^d} \langle \nabla \frac{\partial D^\alpha w}{\partial x_1}, \nabla v \rangle\, d\lambda = \int_{\Omega^d} \frac{\partial D^\alpha g}{\partial x_1} v\, d\lambda. \tag{3.16}$$

Analog wie beim Beweis der H^2-Regularität folgt

$$\left\| \frac{\partial^3 D^\alpha w}{\partial x_i \partial x_j \partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega^d)} \leq \sqrt{2} \left\| \frac{\partial D^\alpha g}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\Omega^d)}$$

für alle $1 \leq i, j \leq d$ (Falls $i, j \in \mathcal{D}'$ ist, dann muß man natürlich den Operator $\hat{}$ anstelle des Operators $\tilde{}$ verwenden). Damit ist die $H^{G,l+1}$-Regularität und $\mathbf{A}$ für $l+1$ bewiesen.
q.e.d.

Kapitel 4

Kombinationstechnik

4.1 Globale Konvergenz der Kombinationstechnik

In [19] wird beschrieben, wie man mit der Kombinationstechnik elliptische Differentialgleichungen näherungsweise lösen kann. Die Konvergenz des Verfahrens wird dabei mit einer geeigneten asymptotischen Entwicklung des Fehlers bei den Vollgitterlösungen begründet. Die Existenz einer solchen Entwicklung wurde für das Laplace-Problem mit glatten Randdaten in [8] bewiesen. Damit konnte die punktweise Konvergenz der Kombinationslösung von der Ordnung $O(h^2 \log h^{-1})$ gezeigt werden, wobei h die kleinste Maschenweite eines der verwendeten Kombinationsgitters ist. Die Vollgitterlösungen wurden dabei mit einer Finite-Differenzen-Diskretisierung berechnet.

Wir wollen nun die Konvergenz der Kombinationstechnik auf eine andere Art und Weise begründen. Das Ergebnis ist der Konvergenzsatz 4.1. Dieser Satz zeigt eine Konvergenz der Kombinationstechnik in den globalen Normen H^1 und L^2 bei allgemeinen elliptischen Differentialgleichungen unter geeigneten Glattheitsvoraussetzungen. Man sieht, daß der Fehler bei der Kombinationstechnik sich genauso wie der Fehler bei der Dünngitterinterpolation verhält. Wichtig beim Beweis des Satzes 4.1 ist, daß er nicht auf eine asymptotische Entwicklung des Fehlers beruht. Dies ist ein Hinweis darauf, daß die Kombinationstechnik sehr robust ist. Interessant ist auch, daß man für den Beweis der Konvergenz der Kombinationstechnik keine H_0^1-Elliptizität benötigt. Dafür ist es aber notwendig, darauf zu achten, daß die Maschenweite der verwendeten Kombinationsgitter nicht zu groß werden. Eine solche Kombinationstechnik wurde auch in [16] verwendet um eine stabile Diskretisierung zu erhalten.

Zum Beweis des Konvergenzsatzes 4.1 sind einige Vorbereitungen notwendig. Diese sind im Abschnitt 4.2 enthalten. Im Abschnitt 4.3 wird der Satz 4.1 bewiesen. Zur Formulierung des Satzes 4.1 führen wir einige Bezeichnungen ein.

Es sei $V_{D,D}^{h_x,h_y}$ der Raum der stückweise bilinearen Funktionen auf $\Omega =]0,1[^2$ mit homogenen Dirichlet Randbedingungen. Es sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutige Lösung der Gleichung (3.2). Falls das Problem und das adjungierte Problem H^2-regulär sind (siehe Definition 3.2 und 3.3), dann gibt es für genügend kleine h_x, h_y genau eine Lösung $u_{h_x,h_y} \in V_{D,D}^{h_x,h_y}$ der schwachen Gleichung (siehe [7])

$$a(u_{h_x,h_y}, v_h) = \int_\Omega f v_h \, d\lambda \quad \forall v_h \in V_{D,D}^{h_x,h_y}. \tag{4.1}$$

Falls a H_0^1-elliptisch ist, dann existiert u_{h_x,h_y} für jedes h_x, h_y. Die u_{h_x,h_y} sind die *diskreten Lösungen* des Problems (3.2). Die *Kombinationslösung* zur Maschenweite $h = 2^{-n}$ und zum gröbsten Gitter $h_0 = 2^{-n_0}$ ist die Funktion

$$u_{h,h_0}^\kappa = \sum_{i=n_0}^{n} u_{2^{-i},2^{i-n-n_0}} - \sum_{i=n_0}^{n-1} u_{2^{-i},2^{i-n-n_0+1}}. \tag{4.2}$$

Wählt man h_0 klein genug, so ist u_{h,h_0}^κ eindeutig definiert. Falls a H_0^1-elliptisch ist, dann existiert u_{h,h_0}^κ sogar für $h_0 = 1$. Zum Beweis der Konvergenz Kombinationslösung benötigen wir etwas andere Sobolev-Räume als die im Abschnitt 2.2.1. Es sei daher für $l \in \mathbb{N}$

$$\|f\|_{H^K} := \sqrt{\|f\|_{H^3(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y^1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial^4 f}{\partial x^1 \partial y^3}\right\|_{L^2(\Omega)}^2} \quad \text{und} \tag{4.3}$$

$$\|f\|_{H_{p=\infty}^{G,l}} := \left\| \left(\left\| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \right\|_{L^\infty} \right)_{i+j \le l,\ i,j < \frac{l}{2}+1} \right\|_{l^\infty}.$$

Die Räume zu diesen Normen sind

$$\begin{aligned} H^K(\Omega) &:= \left\{ f \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \|f\|_{H^K} < \infty \right\} \quad \text{und} \\ H_{p=\infty}^{G,l}(\Omega) &:= \left\{ f \in L^\infty(\Omega) \,\middle|\, \|f\|_{H_{p=\infty}^{G,l}} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Man erkennt leicht folgende Inklusionen

$$H^4(\Omega) \subset H^K(\Omega) \subset H^{G,4}(\Omega) \subset H^3(\Omega).$$

Es gilt nun folgender Satz zur globalen Konvergenz der Kombinationstechnik.

Satz 4.1 (Globale Konvergenz der Kombinationstechnik)
Der Hauptteil der Bilinearform a sei gleichmäßig elliptisch (siehe (3.1)). Des weiteren sei a H_0^1-elliptisch oder das Problem und das adjungierte Problem seien H^2-regulär (siehe Definition 3.2 und 3.3). Dann gilt folgendes

1. *Es sei* $u \in H^3(\Omega)$, $B \in \left(H^1_{p=\infty}(\Omega)\right)^{2\times 2}$ *und* $(c_0, c_1, c_2) \in (L^\infty(\Omega))^3$. *Dann existiert eine Maschenweite* h_0, *so daß gilt*

$$\left\| u - u^\kappa_{h,h_0} \right\|_{H^1(\Omega)} = O(h \log h^{-1}).$$

Falls a zusätzlich H^1_0*-elliptisch ist, dann kann man* $h_0 = 1$ *wählen.*

2. *Es sei* $u \in H^3(\Omega)$, $b_{1,1}, b_{2,2} \in H^2_{p=\infty}(\Omega)$, $b_{1,2}, b_{2,1} \in H^{G,2}_{p=\infty}(\Omega)$, $c_1, c_2 \in H^1_{p=\infty}(\Omega)$, *und* $c_0 \in L^\infty(\Omega)$. *Dann existiert eine Maschenweite* h_0, *so daß gilt*

$$\left\| u - u^\kappa_{h,h_0} \right\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{\frac{3}{2}}).$$

Falls a zusätzlich H^1_0*-elliptisch ist, dann kann man* $h_0 = 1$ *wählen.*

3. *Es sei* $u \in H^K(\Omega)$, $B \in \left(H^2_{p=\infty}(\Omega)\right)^{2\times 2}$, $(c_0, c_1, c_2) \in \left(H^1_{p=\infty}(\Omega)\right)^3$
Des weiteren sollen die Koeffizienten folgenden Bedingungen am Rand des Gebietes genügen

$$b_{1,2}, b_{2,1}, c_1, c_2 \in H^1_0(\Omega), \quad \text{und} \quad \frac{\partial b_{1,1}}{\partial n} = 0, \; \frac{\partial b_{2,2}}{\partial n} = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega. \tag{4.4}$$

(Hierbei ist $\frac{\partial}{\partial n}$ *die Normalenableitung am Rand von* Ω.*) Dann existiert eine Maschenweite* h_0, *so daß gilt*

$$\left\| u - u^\kappa_{h,h_0} \right\|_{H^1(\Omega)} = O(h) \quad \text{und} \quad \left\| u - u^\kappa_{h,h_0} \right\|_{L^2(\Omega)} = O(h^2 \log h^{-1}).$$

Falls a zusätzlich H^1_0*-elliptisch ist, dann kann man* $h_0 = 1$ *wählen.*

4.2 Vorbereitungen für den Konvergenzbeweis

4.2.1 Geeignete Räume

Zuerst werden wir einige Räume auf dem Einheitsintervall definieren. Es sei $h = \frac{1}{N}$, wobei $N \in \mathbb{N}$.

V^h $:= \left\{ w \in \mathcal{C}([0,1]) \mid w \text{ ist linear auf } [ih, (i+1)h] \text{ für } i = 0, \ldots, N-1 \right\}$. In der Notation des Abschnittes 2.3.4 ist dies der Raum $V^{lin}_{\Omega_{\{n\}}}$, falls $h = 2^{-n}$.

V^h_D $:= V^h \cap H^1_0(]0,1[)$. Jedes $w \in V^h_D$ genügt der Dirichlet Randbedingung $w(0) = w(1) = 0$. Dies wird in Abbildung 4.1 dargestellt.

V^h_N $:= \Big\{ w \in \mathcal{C}([0,1]) \mid w \text{ ist linear auf } [(i - \frac{1}{2})h, (i + \frac{1}{2})h]$ für $i = 1, \ldots, N-1$ und $w|_{[0,\frac{h}{2}]} = \text{konstant}$ und $w|_{[1-\frac{h}{2},1]} = \text{konstant} \Big\}$.
Jedes $w \in V^h_N$ genügt der Neumann-Randbedingung $\frac{\partial w}{\partial x}(0) = \frac{\partial w}{\partial x}(1) = 0$. Dies wird in Abbildung 4.2 dargestellt.

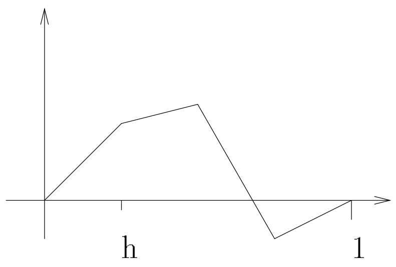


Abbildung 4.1: Funktion aus V_D^h.

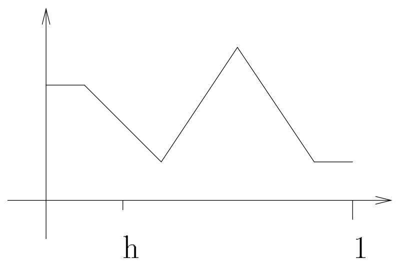


Abbildung 4.2: Funktion aus V_N^h.

Wir definieren nun diskrete und semi-diskrete Räume auf Ω. Hierzu seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ zwei Mengen von Funktionen $f :]0,1[\to \mathbb{R}$. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2$ folgenden Produktraum

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 \;\; := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} | \;\; & f(x,\cdot) \in \mathcal{F}_2 \text{ für fast alle } x \in]0,1[\quad \text{und} \\ & f(\cdot,y) \in \mathcal{F}_1 \text{ für fast alle } y \in]0,1[\}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Produktes erhalten wir die Räume

$$\begin{aligned} V^{h_x,0} &:= V^{h_x} * H^1(]0,1[), & V^{h_x,h_y} &:= V^{h_x} * V^{h_y}, \\ V^{h_x,0}_{D,D} &:= V^{h_x}_D * H^1_0(]0,1[), & V^{h_x,0}_{N,D} &:= V^{h_x}_N * H^1_0(]0,1[), \\ V^{h_x,0}_{D,N} &:= V^{h_x}_D * H^1(]0,1[), & & \text{usw. .} \end{aligned}$$

Wir benötigen drei verschiedene Klassen von Interpolationsoperatoren — die punktweisen Interpolationsoperatoren, die stückweise konstanten Interpolationsoperatoren und die Quasiinterpolanten (siehe Abbildung 4.3).

Definition der punktweisen Interpolationsoperatoren. Der punktweise Interpolationsoperator sei

$$\begin{aligned} I_p^h : \mathcal{C}([0,1]) \;\; &\to \;\; V^h \\ I_p^h(f)(ih) \;\; &:= \;\; f(ih) \quad \forall i = 0, \cdots N. \end{aligned}$$

Man sieht, daß dieser Operator im 1-dimensionalen Raum der Operator I_h^{lin} aus Abschnitt 2.2.2 ist. Natürlich kann man diesen Operator in x-Richtung auch auf Funktionen $f \in \mathcal{C}([0,1]) * L^2(]0,1[)$ anwenden. Der dadurch entstehende Operator im 2-dimensionalen Raum interpoliert nur in x-Richtung und ist somit nicht mehr der Operator I_h^{lin} aus Abschnitt 2.2.2, da dieser in x- und y-Richtung interpoliert.

Definition der stückweise konstanten Interpolationsoperatoren. Die stückweise konstanten Interpolationsoperatoren $I_D^{kon,h}$ und $I_N^{kon,h}$ interpolieren stetige Funktionen.

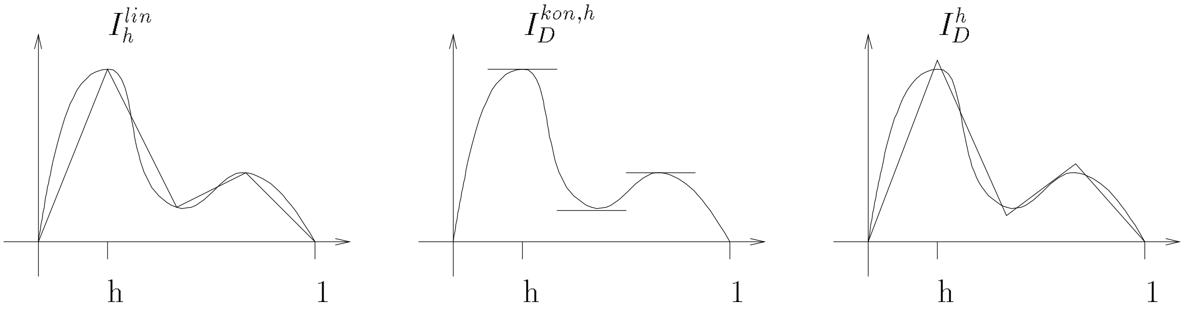


Abbildung 4.3: Interpolationsoperatoren

Der Interpolant ist stückweise konstant. Wir wollen hier nicht im Detail beschreiben, auf welchen Räumen diese Operatoren definiert sind. Wir wollen aber folgende Regel vereinbaren. Falls f auf dem Gebiet $\Phi \subset S^1$ definiert ist, dann seien die Operatoren $I_D^{kon,h}(f)$ und $I_N^{kon,h}(f)$ auf dem gleichen Gebiet Φ definiert. Für $f \in \mathcal{C}(\Phi)$ sei nun

$$\begin{array}{rll} I_D^{kon,h}|_{[(i-\frac{1}{2})h,(i+\frac{1}{2})h[} & \text{ist konstant und} & I_D^{kon,h}(f)(ih) := f(ih) \quad \forall i, \quad \text{und} \\ I_N^{kon,h}|_{[ih,(i+1)h[} & \text{ist konstant und} & I_N^{kon,h}(f)\left((i+\frac{1}{2})h\right) := f\left((i+\frac{1}{2})h\right) \quad \forall i \end{array}$$

wobei i eine geeignete ganze Zahl ist. Natürlich kann man diesen Operator in x-Richtung auch auf Funktionen $f \in \mathcal{C}([0,1]) * L^2(]0,1[)$ anwenden. Man beachte, daß wir bei diesem Interpolationsoperator im Gegensatz zum Interpolationsoperator I_h^{kon} aus Abschnitt 2.2.2 keine Mittelung durchführen.

Definition der Quasiinterpolanten (Siehe [31], Seite 17-19). Zur Definition der Quasiinterpolanten benötigen wir die Funktion q aus Abschnitt 2.2.2. Wir definieren zwei verschiedene Quasiinterpolanten auf dem Einheitsintervall:

$$\begin{array}{rcl} I_D^h : L^2(]0,1[) & \rightarrow & V_D^h \\ I_D^h(f)(ih) & = & \int_0^1 f(x)q(x-ih)\ dx \quad \forall i = 1,\cdots,N-1 \quad \text{und} \\ I_N^h : L^2(]0,1[) & \rightarrow & V_N^h \\ I_N^h(f)\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right) & = & \int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} f(x)q\left(x-\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\ dx \qquad \forall i = 2,\cdots,N-1. \\ I_N^h(f)\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right) & = & 2\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} f(x)q\left(x-\left(i-\frac{1}{2}\right)h\right)\ dx \quad \text{falls } i=1 \text{ oder } i=N. \end{array}$$

Man sieht, daß der Operator I_D^h gleich dem Operator $I_h^{lin,quasi}$ ist. Wir verwenden hier jedoch eine zum Kontext passende Bezeichnung. Eine einfache Rechnung zeigt $I_D^h(f) = f$ für jedes $f \in V_D^h$ und $I_N^h(f) = f$ für jedes $f \in V_N^h$. Natürlich kann man diese Operatoren sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung auf Funktionen $f \in L^2(\Omega)$ anwenden. Wir erhalten dann folgende Semi-Quasiinterpolanten

$$\begin{aligned} I_D^{h_x,0} &: L^2(\Omega) \to V_D^{h_x} * L^2(]0,1[), & I_N^{h_x,0} &: L^2(\Omega) \to V_N^{h_x} * L^2(]0,1[), \\ I_D^{0,h_y} &: L^2(\Omega) \to L^2(]0,1[) * V_D^{h_y}, & I_N^{0,h_y} &: L^2(\Omega) \to L^2(]0,1[) * V_N^{h_y}. \end{aligned}$$

Schließlich benötigen wir die Sobolev-Räume

$$\begin{aligned} H^1_{N,D} &:= \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w(x,\cdot) \in H^1_0(]0,1[) \text{ für fast alle } x \in [0,1] \right\} \quad \text{und} \\ H^1_{D,N} &:= \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w(\cdot,y) \in H^1_0(]0,1[) \text{ für fast alle } y \in [0,1] \right\} \end{aligned}$$

Wir erhalten nun mit der Definition von $H^1_{h_x}$ in (3.8).

Lemma 4.1 (Interpolationsfehler)
Es gibt eine Konstante $C_{int} > 0$, so daß gilt

$$\begin{aligned} |f - I_D^{h_x,0}(f)|_{H^1(\Omega)} &\le C_{int}\ h_x |f|_{H^{2,1}(\Omega)} & &\textit{für alle}\ \ f \in H^1_{D,N} \qquad \textit{und} \\ |f - I_N^{h_x,0}(f)|_{H^1_{h_x}} &\le C_{int}\ h_x |f|_{H^{2,1}_{h_x}} & &\textit{für alle}\ \ f \in H^1_{h_x}. \end{aligned}$$

Es gilt $I_D^{h_x,0}(f) \in V_{D,D}^{h_x,0}$ für alle $f \in H^1_0(\Omega)$.
Es gilt $I_D^{h_x,0}(f) \in V_{D,N}^{h_x,0}$ für alle $f \in H^1_{D,N}$.
Es gilt $I_N^{h_x,0}(f) \in V_{N,D}^{h_x,0}$ für alle $f \in H^1_{N,D}$.
Ähnliche Gleichungen erhält man für I_D^{0,h_y} und I_N^{0,h_y}.

Beweis: Wegen des Bramble-Hilbert Lemma's (siehe [22]) gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß gilt

$$\begin{aligned} |f - I_D^{h_x}(f)|_{H^1(]0,1[)} &\le C\ h_x |f|_{H^2(]0,1[)} & &\forall f \in H^2(]0,1[) \cap H^1_0(]0,1[), \\ |f - I_N^{h_x}(f)|_{H^1(]\frac{h_x}{2},1-\frac{h_x}{2}[)} &\le C\ h_x |f|_{H^2(]\frac{h_x}{2},1-\frac{h_x}{2}[)} & &\forall f \in H^2(]\tfrac{h_x}{2},1-\tfrac{h_x}{2}[), \\ \|f - I_D^{h_x}(f)\|_{L^2(]0,1[)} &\le C\ h_x |f|_{H^1(]0,1[)} & &\forall f \in H^1_0(]0,1[) \quad \text{und} \\ \|f - I_N^{h_x}(f)\|_{L^2(]0,1[)} &\le C\ h_x |f|_{H^1(]0,1[)} & &\forall f \in H^1(]0,1[). \end{aligned}$$

Man beachte, daß falls $f, \frac{\partial f}{\partial x} \in L^2(\Omega)$, dann ist $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,y) \in L^2(]0,1[)$ für fast alle $y \in]0,1[$. Die Aussagen des Lemmas erhält man nun durch eine einfache Rechnung. **q.e.d.**
Dieses Lemma zeigt einen Vorteil der gewichteten Sobolev-Raum-Norm $|\cdot|_{H^1_{h_x}}$. Die Funktion $I_N^{h_x,0}(f)$ ist konstant in x-Richtung am rechten und linken Rand von Ω. Deshalb ist die Ungleichung $|f - I_N^{h_x,0}(f)|_{H^1} \le C h_x |f|_{H^{2,1}}$ falsch, wohingegen die Ungleichung $|f - I_N^{h_x,0}(f)|_{H^1_{h_x}} \le C h_x |f|_{H^{2,1}_{h_x}}$ richtig ist.

4.2.2 Spezielle Ungleichungen

Wir benötigen spezielle Ungleichungen. Dies sind zum Beispiel inverse Ungleichungen und Ungleichungen, die das Verhältnis zwischen dem hierarchischen Überschuß und dem zweiten Differenzenquotienten beschreiben. Hierzu sei $h_x = \frac{1}{N}$, wobei N eine gerade Zahl ist. Für $q \in V^{h_x}$ definieren wir den *1-dimensionalen hierarchischen Überschuß* durch

$$\mathcal{H}_{h_x}(q) := I_p^{h_x}(q) - I_p^{2h_x}(q), \tag{4.5}$$

den Restriktionsoperator auf ungerade Punkte durch

$$\mathcal{R}_{unge}(q) \in V^{h_x} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_{unge}(q)(ih_x) := \begin{cases} q(ih_x) & \text{falls} \quad i = 1, 3, 5, \cdots, N-1 \\ 0 & \text{falls} \quad i = 0, 2, 4, \cdots, N \end{cases} \quad \text{und}$$

den Restriktionsoperator auf gerade Punkte durch

$$\mathcal{R}_{gera}(q) \in V^{h_x} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_{gera}(q)(ih_x) := \begin{cases} q(ih_x) & \text{falls} \quad i = 0, 2, 4, \cdots, N \\ 0 & \text{falls} \quad i = 1, 3, 5, \cdots, N-1 \end{cases} .$$

Natürlich kann man diese Operatoren auch als Operatoren auf $V^{h_x,0}$ auffassen. In diesem Fall verwenden wir diese Operatoren immer in x-Richtung. Des weiteren kann man diese Operatoren natürlich auch so definieren, daß sie auf Funktionen auf dem Band B anwendbar sind.

Zuerst beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.2 *Für $q \in V^{h_x}$ sei $q_i = q(ih_x)$. Dann gilt*

1. $\|q\|_2^2 = \frac{h_x}{3}\sum_{i=1}^N (q_i^2 + q_i q_{i-1} + q_{i-1}^2)$,
2. $\left\|\frac{\partial q}{\partial x}\right\|_2^2 = \frac{1}{h_x}\sum_{i=1}^N (q_i - q_{i-1})^2$,
3. $\|\mathcal{R}_{unge}(q)\|_2^2 = \frac{2h_x}{3}\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} q_{2i+1}^2$,
4. $\|\mathcal{R}_{unge}(q)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|q\|_{L^2(]h_x,1-h_x[)}$ *und* $\|\mathcal{R}_{gera}(q)\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|q\|_{L^2(]0,1[)}$,
5. $\left\|\frac{\partial q}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{h_x}\|q\|_{L^2(\Omega)}$ *und ähnliche Ungleichungen,*
6. $\mathcal{H}_{h_x}(q) = -\frac{h_x^2}{2}\mathcal{R}_{unge}\left(\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right)$ *und*
7. $\delta_{2h_x}^1 \mathcal{R}_{unge}(\tilde{q}) = \mathcal{R}_{gera}\delta_{2h_x}^1(\tilde{q})$.

Beweis: *1.* und *2.* erhält man durch eine einfache Rechnung.
1. impliziert *3.*.
Wegen *1.* und *3.* und $a^2 \le 2(a^2+ab+b^2)$ ergibt sich *4.*.
5. folgt aus *1.*, *2.* und $(q_i - q_{i-1})^2 \le 4\left(q_i^2 + q_i q_{i-1} + q_{i-1}^2\right)$.
Nun zeigen wir *6.*. Da die Funktionen auf beiden Seiten der Gleichung in V^{h_x} enthalten sind, reicht es zu zeigen, daß diese Gleichung an den Gitterpunkten (jh_x), $j = 0,1,2,\cdots,N$ richtig ist. Für gerade j ist dies trivial. Ansonsten gilt für $j = 1,3,5,\cdots,N-1$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{h_x}(q)(jh_x) &= q_j - \tfrac{1}{2}(q_{j-1}+q_{j+1}) = -\frac{h_x^2}{2}\frac{q_{j-1}-2q_j+q_{j+1}}{h_x^2} = \\ &= -\frac{h_x^2}{2}\mathcal{R}_{unge}(\delta_{h_x}^2 q)(jh_x).\end{aligned}$$

7. folgt analog aus einer einfachen Rechnung. **q.e.d.**

Später benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 4.3
Falls $q \in V^{h_x,0}$, dann gilt

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}_{h_x}(q)|_{H^1(\Omega)} &\le h_x 2\sqrt{3}\left(\left\|\delta_{h_x}^2(q)\right\|_{L^2(\Omega_{2h_x})}^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta_{h_x}^1(q)\right\|_{L^2(\Omega_{h_x})}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\mathcal{H}_{h_x}(q)\|_{L^2(\Omega)} &\le h_x 2\sqrt{3}\left\|\delta_{h_x}^1(q)\right\|_{L^2(\Omega_{h_x})}.\end{aligned}$$

Falls $q \in V_{D,N}^{h_x,0}$, dann gilt

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_{h_x}(q)\|_{L^2(\Omega)} &\le h_x^2\left\|\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left\|\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_{h_x}(q)\right\|_{L^2(\Omega)} &\le h_x^2\left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_{h_x}(q)\right\|_{L^2(\Omega)} &\le 2\sqrt{3}h_x\left\|\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)} \quad \textit{und} \\ \left|\delta_{2h_x}^1\mathcal{H}_{h_x}(q)\right|_{H^1(\Omega)} &\le 2\sqrt{3}h_x\left|\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right|_{H^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Beweis: Aus *4.*, *5.* und *6.* in Lemma 4.2 und aus Lemma 3.3 erhält man

$$|\mathcal{H}_{h_x}(q)|_{H^1(\Omega)} = \left|\frac{h_x^2}{2}\mathcal{R}_{unge}\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right|_{H^1(\Omega)} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{h_x^2}{2}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{R}_{unge}\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\mathcal{R}_{unge}\delta_{h_x}^2\frac{\partial \tilde{q}}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq h_x^2\left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{h_x}\right)^2\left\|\delta_{h_x}^2(q)\right\|_{L^2(\Omega_{2h_x})}^2 + \left\|\delta_{h_x}^1\delta_{h_x}^1\frac{\partial q}{\partial y}\right\|_{L^2(\Omega_{2h_x})}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq h_x 2\sqrt{3}\left(\left\|\delta_{h_x}^2(q)\right\|_{L^2(\Omega_{2h_x})}^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta_{h_x}^1(q)\right\|_{L^2(\Omega_{h_x})}^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Dies ist die erste Ungleichung. Bis auf die letzte Ungleichung erhält man alle anderen Ungleichungen ganz analog.

Wegen *4.*, *5.*, *6.* und *7.* in Lemma 4.2 und wegen Lemma 3.3 folgt

$$
\begin{aligned}
&\left|\delta_{2h_x}^1\mathcal{H}_{h_x}(q)\right|_{H^1(\Omega)} = \left|\delta_{2h_x}^1\left(\frac{h_x^2}{2}\mathcal{R}_{unge}\left(\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right)\right)\right|_{H^1(\Omega)} = \\
&= \frac{h_x^2}{2}\left|\mathcal{R}_{gera}\delta_{2h_x}^1\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right|_{H^1(\Omega)} \leq \\
&\leq \frac{h_x^2}{2}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{R}_{gera}\delta_{2h_x}^1\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta_{2h_x}^1\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{h_x^2}{2}\left(\left(\frac{2\sqrt{3}}{h_x}\right)^2\left\|\mathcal{R}_{gera}\delta_{2h_x}^1\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4\left\|\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq h_x 2\sqrt{3}\left(\left\|\delta_{2h_x}^1\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq h_x 2\sqrt{3}\left|\delta_{h_x}^2(\tilde{q})\right|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt die letzte Ungleichung. **q.e.d.**

Lemma 4.4

1. *Es sei* $q \in V_D^{h_x}$ *oder* $q \in V_N^{h_x}$. *Dann gilt* $\|\frac{\partial q}{\partial x}\|_{L^2(]0,1[)} \leq 2\|\frac{\partial q}{\partial x}\|_{L^2(]\frac{h_x}{2},1-\frac{h_x}{2}[)}$.
2. *Es sei* $q \in V_D^{h_x}$ *oder* $q \in V_N^{h_x}$. *Dann gilt* $\|q\|_{L^2(]0,1[)} \leq 2\|q\|_{L^2(]\frac{h_x}{2},1-\frac{h_x}{2}[)}$.
3. *Es sei* $q \in V_D^{h_x}$ *oder* $q \in V_N^{h_x}$. *Dann gilt* $\left\|\frac{\partial q}{\partial x}\right\|_{L^2(]0,1[)} \leq 2\sqrt{3}\,\|\delta_h^1(q)\|_{L^2(]\frac{h_x}{2},1-\frac{h_x}{2}[)}$.
4. *Für* $q \in V_D^{h_x}$ *gilt* $\|I_D^{kon,h_x}(q)\|_2 \leq 2\sqrt{3}\|q\|_2$.
5. *Für* $q \in V_N^{h_x}$ *gilt* $\|I_N^{kon,h_x}(q)\|_2 \leq 2\sqrt{3}\|q\|_2$.

6. *Für $q \in V^{h_x,0}$ gilt* $\left\|\delta^1_{2h_x}(q)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{h_x}\|q\|_{L^2(\Omega)}$.

Beweis: *1.* ist trivial. Die restlichen Aussagen erhält man leicht aus Lemma 4.2, Lemma 3.3 und wegen $a^2 \leq 2(a^2 + ab + b^2)$. **q.e.d.**

4.2.3 Ableitung von schwachen Gleichungen

Zur Motivation betrachte man die Poisson-Gleichung

$$-\triangle u = f, \quad \text{wobei} \quad u \in H^1_0(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega). \tag{4.6}$$

Falls u und f genügend glatt sind, dann kann man diese Gleichung nach x ableiten und es gilt

$$-\triangle \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Die Funktion $\frac{\partial u}{\partial x}$ ist also auch die Lösung eines Poisson-Problems mit geeigneten Randbedingungen. Es ist aber nicht ganz klar, welche Randbedingungen man hier wählen soll. Fordert man zusätzlich $f \in H^1_0(\Omega)$, dann folgt aus (4.6) unter der Annahme $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = 0 \quad \text{falls} \quad x \in \{0,1\},\ y \in [0,1] \quad \text{und} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \text{falls} \quad x \in [0,1],\ y \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Dies sind gemischte Dirichlet-, Neumann-Randbedingungen für $\frac{\partial u}{\partial x}$. Bei allgemeinen elliptischen Differentialgleichungen und allgemeiner rechten Seite f ist die Ableitung der Gleichung etwas schwieriger. Hier ist eine schwache Darstellung der Gleichung sehr hilfreich. Die Randbedingungen kann man nun in die rechte Seite einbauen. Zusätzlich ist es auch notwendig Differentialgleichungen diskret ableiten zu können. Die Möglichkeiten einer solchen diskreten Ableitung sollen in diesem Abschnitt untersucht werden.

Zuerst benötigen wir eine Verallgemeinerung des Lemmas 3.4 für variable Koeffizienten. Hierzu sei

$$\mathcal{M}_h(w,v)(x) := \tfrac{1}{2}\left(w\left(x+\tfrac{h}{2}\right)v\left(x+\tfrac{h}{4}\right) + w\left(x-\tfrac{h}{2}\right)v\left(x-\tfrac{h}{4}\right)\right).$$

Es gilt dann:

Lemma 4.5 (Diskrete partielle Integration bei variablen Koeffizienten) *Falls $w, v \in L^2(]0,1[)$ und $b \in L^\infty(]0,1[)$, dann gilt*

$$\begin{aligned} \int_0^1 wb\delta^1_h(\hat{v})dx &= -\int_0^1 \delta^1_h(\tilde{w})bvdx - \int_0^1 \mathcal{M}_h\left(\tilde{w}, \delta^1_{\frac{h}{2}}(\hat{b})\right)vdx \quad \textit{und} \\ \int_0^1 wb\delta^1_h(\tilde{v})dx &= -\int_0^1 \delta^1_h(\tilde{w})bvdx - \int_0^1 \mathcal{M}_h\left(\tilde{w}, \delta^1_{\frac{h}{2}}(\tilde{b})\right)vdx. \end{aligned}$$

Falls $w \in L^2(]0,1[)$, $b \in L^\infty(]0,1[)$ und $v \in V_N^h$, dann gilt

$$\int_0^1 wb\delta_h^1\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}\right)dx = -\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} \delta_h^1(w)b\frac{\partial v}{\partial x}dx - \int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} \mathcal{M}_h\left(w, \delta_{\frac{h}{2}}^1(b)\right)\frac{\partial v}{\partial x}dx.$$

Falls $w \in L^2(]0,1[)$, $b \in L^\infty(]0,1[)$ und $v \in V_D^h$, dann gilt

$$\int_0^1 wb\frac{\partial v}{\partial x}dx = -\int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} \delta_h^1(w)bI_D^{kon,h}(v)dx - \int_{\frac{h}{2}}^{1-\frac{h}{2}} \mathcal{M}_h\left(w, \delta_{\frac{h}{2}}^1(b)\right)I_D^{kon,h}(v)dx.$$

Falls $w \in L^2(]0,1[)$, $b \in L^\infty(]0,1[)$ und $v \in V_N^h$, dann gilt

$$\int_0^1 wb\frac{\partial v}{\partial x}dx = -\int_0^1 \delta_h^1(\tilde{w})bI_N^{kon,h}(v)dx - \int_0^1 \mathcal{M}_h\left(\tilde{w}, \delta_{\frac{h}{2}}^1(\hat{b})\right)I_N^{kon,h}(v)dx.$$

Beweis: Eine einfache Rechnung zeigt

$$\delta_h^1(\tilde{w}\hat{b}) = \delta_h^1(\tilde{w})\hat{b} + \mathcal{M}(\tilde{w}, \delta_{\frac{h}{2}}^1(\hat{b})).$$

Deswegen erhalten wir mit Lemma 3.4

$$\begin{aligned}\int_0^1 wb\delta_h^1(\hat{v})dx &= \frac{1}{2}\int_{B^1} \tilde{w}\hat{b}\delta_h^1(\hat{v})dx = \\ &= -\frac{1}{2}\int_{B^1} \delta_h^1(\tilde{w}\hat{b})\hat{v}dx = -\int_0^1 \delta_h^1(\tilde{w}\hat{b})\hat{v}dx = \\ &= -\int_0^1 \delta_h^1(\tilde{w})bvdx - \int_0^1 \mathcal{M}\left(\tilde{w}, \delta_{\frac{h}{2}}^1(\hat{b})\right)vdx.\end{aligned}$$

Dies zeigt die erste Gleichung. Analog erhält man die zweite Gleichung. Die dritte Gleichung folgt aus der zweiten Gleichung und aus $\frac{\partial v}{\partial x}(x) = 0 \quad \forall x \in]0, \frac{h}{2}[\cup]1 - \frac{h}{2}, 1[$.

Die letzten beiden Gleichungen folgen aus der zweiten Gleichung beziehungsweise aus der ersten Gleichung und aus

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = \delta_h^1(I_D^{kon,h}(\tilde{v})) \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = \delta_h^1(I_N^{kon,h}(\hat{v})).$$

Zum Beweis der vierten Gleichung beachte man $I_D^{kon,h}(v) = 0 \quad \forall x \in]0, \frac{h}{2}[\cup]1 - \frac{h}{2}, 1[$.
q.e.d.

Am Ende des Abschnittes 3.2 haben wir einige Seminormen wie zum Beispiel $|w|_{H^1_{h_x}}$, $|w|_{H^{1,2}_{h_x}}$ und die Bilinearform $b^x_{h_x}$ definiert. Diese benötigen wir nun. Außerdem führen wir noch folgende Normen ein:

$$\begin{aligned}\|v_h\|_{H^2_{h_x}} &:= \sqrt{\|\delta^1_{h_x}(\tilde{v}_h)\|^2_{H^1(\Omega)} + |v_h|^2_{H^{1,2}(\Omega)} + \|v_h\|^2_{H^1(\Omega)}} \quad \text{für} \quad v_h \in V^{h_x,0}_{D,N} \quad \text{und} \\ \|v_h\|_{H^2_{h_x}} &:= \sqrt{\|\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\|^2_{H^1(\Omega)} + |v_h|^2_{H^{1,2}(\Omega)} + \|v_h\|^2_{H^1(\Omega)}} \quad \text{für} \quad v_h \in V^{h_x,0}_{N,N}.\end{aligned}$$

Des weiteren benötigen wir die Bilinearformen

$$\begin{aligned} b^x(w,v) &:= \int_\Omega (\nabla w)^T B^x \nabla v \; d\lambda \quad \text{und} \\ b^y(w,v) &:= \int_\Omega (\nabla w)^T B^y \nabla v \; d\lambda, \quad \text{wobei} \end{aligned}$$
$$B^x := \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 \\ b_{2,1}+b_{1,2} & b_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^y := \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1}+b_{1,2} \\ 0 & b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Mehrere Möglichkeiten der Ableitung einer elliptischen Differentialgleichung zeigt der folgende Satz.

Satz 4.2 (Ableitung von schwachen Gleichungen) *Man nehme an* $(h_x,h_y) = (2^{-i},2^{-j})$ *oder* $(h_x,h_y) = (2^{-i},0)$, *wobei* $i,j \in \mathbb{N}$. *Es sei* $g \in L^2(\Omega)$ *und* $w \in H_0^1(\Omega)$ *eine Lösung der schwachen Gleichung*

$$a(w,v_h) = \int_\Omega g v_h \; d\lambda \quad v_h \in V_{D,D}^{h_x,h_y}.$$

Außerdem sei $B \in \left(H^1_{p=\infty}(\Omega)\right)^{2\times 2}$ *und* $(c_0,c_1,c_2) \in (L^\infty(\Omega))^3$. *Dann gilt:*

1. *Es gibt eine bilineare Funktion*

$$F^x_{h_x} : H_0^1(\Omega) \times V_{N,D}^{h_x,0} \to \mathbb{R},$$

so daß für alle $v_h \in V_{N,D}^{h_x,h_y}$ *gilt*

$$b^x_{h_x}\left(\delta^1_{h_x}(\tilde{w}), v_h\right) = F^x_{h_x}(w,v_h) - \int_\Omega g\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\; d\lambda, \tag{4.7}$$
$$b^x\left(\delta^1_{h_x}(\tilde{w}), v_h\right) = F^x_{h_x}(w,v_h) - \int_\Omega g\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\; d\lambda \tag{4.8}$$

und

$$|F^x_{h_x}(v,v_h)| \overset{\sim}{<} \|v\|_{H^1(\Omega)} \cdot |v_h|_{H^1_{h_x}} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \tag{4.9}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ *und* $v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}$.

Falls $b_{1,1}, b_{2,2} \in H^2_{p=\infty}(\Omega)$, $b_{1,2}, b_{2,1} \in H^{G,2}_{p=\infty}(\Omega)$, $c_1,c_2 \in H^1_{p=\infty}(\Omega)$ *und* $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, *dann gilt zusätzlich*

$$|F^x_{h_x}(v,v_h)| \overset{\sim}{<} \|v\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v_h\|_{H^2_{h_x}} \tag{4.10}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ *und* $v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}$.

2. *Es sei* $h_y = 0$ *und* $w \in H^{1,2}(\Omega)$. *Dann gibt es eine bilineare Funktion*

$$F^y : H_0^1(\Omega) \times V_{D,N}^{h_x,0} \to \mathbb{R},$$

so daß für alle $v_h \in V_{D,N}^{h_x,0}$ *gilt*

$$b^y\left(\frac{\partial}{\partial y}w, v_h\right) = F^y(w, v_h) - \int_\Omega g\frac{\partial}{\partial y}v_h \, d\lambda \tag{4.11}$$

und

$$|F^y(v, v_h)| \tilde{<} \|v\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \tag{4.12}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ *und* $v_h \in V_{D,N}^{h_x,0}$.

3. *Es sei* $B \in \left(H^2_{p=\infty}(\Omega)\right)^{2\times 2}$ *und* $(c_0, c_1, c_2) \in \left(H^1_{p=\infty}(\Omega)\right)^3$. *Man nehme an es gelten die Randbedingungen (4.4) und es sei* $w \in V_{D,D}^{h_x,0}$. *Dann gibt es eine bilineare Funktion*

$$F_{h_x}^{xx} : V_{D,D}^{h_x,0} \times V_{D,D}^{h_x,0} \to \mathbb{R},$$

so daß für alle $v_h \in V_{D,D}^{h_x,h_y}$ *gilt*

$$b^x\left(\delta_{h_x}^2(\tilde{w}), v_h\right) = F_{h_x}^{xx}(w, v_h) + \int_\Omega g\delta_{h_x}^2(\tilde{v}_h) \, d\lambda \tag{4.13}$$

und

$$|F_{h_x}^{xx}(v, v_h)| \tilde{<} \sqrt{\|\delta_{h_x}^1(\tilde{v})\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)}} \cdot \|v_h\|_{H^1(\Omega)}, \tag{4.14}$$

$$|F_{h_x}^{xx}(v, v_h)| \tilde{<} \sqrt{\|\delta_{h_x}^1(\tilde{v})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}} \cdot \|v_h\|_{H^2_{h_x}} \tag{4.15}$$

für alle $v \in V_{D,D}^{h_x,0}$ *und* $v_h \in V_{D,D}^{h_x,0}$.

4. *Es sei* $B \in \left(H^2_{p=\infty}(\Omega)\right)^{2\times 2}$ *und* $(c_0, c_1, c_2) \in \left(H^1_{p=\infty}(\Omega)\right)^3$. *Man nehme an es gelten die Randbedingungen (4.4) und es sei* $h_y = 0$ *und* $w \in H^{1,2}(\Omega)$. *Dann gibt es eine bilineare Funktion*

$$F_{h_x}^{xy} : H_0^1(\Omega) \times V_{N,N}^{h_x,0} \to \mathbb{R},$$

so daß für alle $v_h \in V_{N,N}^{h_x,0}$ *gilt*

$$b_{h_x}^x\left(\frac{\partial}{\partial y}\delta_{h_x}^1(w), v_h\right) = F_{h_x}^{xy}(w, v_h) + \int_\Omega g\frac{\partial}{\partial y}\delta_{h_x}^1(v_h) \, d\lambda \tag{4.16}$$

und

$$|F_{h_x}^{xy}(v, v_h)| \tilde{<} \sqrt{|\delta_{h_x}^1(v)|^2_{H^1_{h_x}} + |v|^2_{H^{1,2}(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)}} \cdot |v_h|_{H^1_{h_x}} \tag{4.17}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ *und* $v_h \in V_{N,N}^{h_x,0}$.

Es sei nun $w \in V_{N,D}^{h_x,0}$ *eine Lösung der schwachen Gleichung*

$$b(w, v_h) = \int_\Omega g v_h \, d\lambda \quad v_h \in V_{N,D}^{h_x,h_y}.$$

Dann gilt:

5. Es gibt eine bilineare Funktion

$$F^x_{h_x} : V^{h_x,0}_{N,D} \times V^{h_x,0}_{D,D} \to \mathbb{R},$$

so daß für alle $v_h \in V^{h_x,h_y}_{D,D}$ gilt

$$b^x_{h_x}\left(\delta^1_{h_x}(\hat{w}), v_h\right) \quad = \quad F^x_{h_x}(w, v_h) - \int_\Omega g\delta^1_{h_x}(\tilde{v}_h)\, d\lambda$$

und

$$|F^x_{h_x}(v, v_h)| \stackrel{\sim}{<} \|v\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

für alle $v \in V^{h_x,0}_{N,D}$ und $v_h \in V^{h_x,0}_{D,D}$.

Beweis: Zuerst teilen wir die Bilinearform a in zwei Teile auf

$$a = b + c \quad \text{wobei} \quad b(u,v) = \int_\Omega (\nabla u)^T B \nabla v\, d\lambda \quad \text{und}$$
$$c(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \underline{c}\rangle v + c_0\, uv\, d\lambda.$$

Daher gilt

$$b(w, v_h) = -c(w, v_h) + \int_\Omega g v_h\, d\lambda \quad v_h \in V^{h_x,h_y}_{D,D}.$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} c^x(w,v) \quad &:= \quad c(w,v) + \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial b_{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial b_{1,2}}{\partial y}\right) v d\lambda \quad \text{und} \qquad (4.18)\\ c^y(w,v) \quad &:= \quad c(w,v) + \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial b_{2,1}}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial b_{2,1}}{\partial x}\right) v d\lambda. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$b^x(w, v_h) \quad = \quad -c^x(w, v_h) + \int_\Omega g v_h\, d\lambda \quad v_h \in V^{h_x,h_y}_{D,D} \quad \text{und} \qquad (4.19)$$

$$b^y(w, v_h) \quad = \quad -c^y(w, v_h) + \int_\Omega g v_h\, d\lambda \quad v_h \in V^{h_x,h_y}_{D,D}. \qquad (4.20)$$

Wir beweisen die Gleichung (4.19) nun mit Hilfe der partiellen Integration. Die Gleichung (4.20) erhält man analog. Wir nehmen kurz an $b_{1,2} \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$. Durch partielle Integration erhalten wir für $w \in H^1_0(\Omega)$ und $v \in \mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$

$$\int_\Omega b_{1,2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} d\lambda = -\int_\Omega w \frac{\partial}{\partial x}\left(b_{1,2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) d\lambda =$$
$$= \quad -\int_\Omega w b_{1,2}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + w\frac{\partial b_{1,2}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} d\lambda = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}(w b_{1,2})\frac{\partial v}{\partial x} - w\frac{\partial b_{1,2}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} d\lambda =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega b_{1,2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}d\lambda + \int_\Omega w\left(\frac{\partial b_{1,2}}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial b_{1,2}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)d\lambda = \\
&= \int_\Omega b_{1,2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}d\lambda - \int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial b_{1,2}}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial b_{1,2}}{\partial x}\right)\right) v d\lambda = \\
&= \int_\Omega b_{1,2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}d\lambda - \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial b_{1,2}}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial b_{1,2}}{\partial x}\right) v d\lambda.
\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\int_\Omega b_{1,2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}d\lambda = \int_\Omega b_{1,2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}d\lambda + \int_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial b_{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial b_{1,2}}{\partial y}\right) v d\lambda. \tag{4.21}$$

$\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ ist dicht in $H^1(\Omega)$. Deswegen ist die Gleichung (4.21) für alle $b_{1,2} \in H^1_{p=\infty}(\Omega)$ und alle $v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ richtig. Außerdem ist $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$. Somit erhalten wir, daß die Gleichung (4.21) für alle $b_{1,2} \in H^1_{p=\infty}(\Omega)$ und alle $w, v \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Dies zeigt die Gleichung (4.19).

Zu 1. Falls $v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}$, dann ist $\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h) \in V_{D,D}^{h_x,0}$. Deswegen erhalten wir wegen Lemma 4.5 für alle $v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}$

$$\begin{aligned}
b^x\left(w, \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\right) &= \int_\Omega (\nabla w)^T B^x \nabla\left(\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\right) d\lambda = \\
&= \int_\Omega b_{1,1}\frac{\partial w}{\partial x}\delta^1_{h_x}\left(\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial x}\right) + (b_{1,2}+b_{2,1})\frac{\partial w}{\partial y}\delta^1_{h_x}\left(\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial x}\right) + \\
&\quad + b_{2,2}\frac{\partial w}{\partial y}\delta^1_{h_x}\left(\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial y}\right) d\lambda = \\
&= -b^x_{h_x}\left(\delta^1_{h_x}(\tilde{w}), v_h\right) + d^x_{h_x}(w, v_h) = -b^x\left(\delta^1_{h_x}(\tilde{w}), v_h\right) + d^x_{h_x}(w, v_h)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei

$$\begin{aligned}
d^x_{h_x}(v, v_h) &:= -\int_{\Omega_{h_x}} \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{1,1})\right)\frac{\partial v_h}{\partial x}d\lambda - \\
&- \int_{\Omega_{h_x}} \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{2,1}+b_{1,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial x}d\lambda - \int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{2,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial y}d\lambda.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Dies zeigt die Gleichungen (4.7) und (4.8) falls wir

$$F^x_{h_x}(v, v_h) := c^x(v, \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)) + d^x_{h_x}(v, v_h) \tag{4.24}$$

setzen. Nun müssen wir die Ungleichungen (4.9) und (4.10) beweisen. Aus (4.18) und Lemma 3.3 folgt sofort

$$c^x(v, \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)) \stackrel{\sim}{<} \|v\|_{H^1(\Omega)}\|\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)}|v_h|_{H^1(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)}|v_h|_{H^1_{h_x}} \tag{4.25}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und $v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}$. Wegen Lemma 3.1 und 3.3 gilt

$$\left\| \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{2,2}) \right\|_{L^\infty(\Omega)} = \left\| \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{2,2}) \right\|_{L^\infty(B^2)} \leq \left\| \frac{\partial \hat{b}_{2,2}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(B^2)} = \left\| \frac{\partial b_{2,2}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.26}$$

Natürlich gilt $\left\| \tau_{-\frac{h_x}{4}} \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{1,1}) \right\|_{L^\infty(\Omega_{h_x})} \leq \left\| \frac{\partial b_{1,1}}{\partial x} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$ und ähnliche Ungleichungen. Daher erhält man nach einer kurzen Rechnung aus (4.23)

$$|d^x_{h_x}(v, v_h)| \ \tilde{\lesssim}\ \|v\|_{H^1(\Omega)} |v_h|_{H^1_{h_x}} \tag{4.27}$$

für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ und $v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}$. Aus (4.27) und (4.25) folgt somit (4.9).

Es seien $v \in H_0^1(\Omega)$ und $v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}$. Dann erhält man durch partielle Integration und aus Lemma 4.5 und Gleichung (4.18)

$$\begin{aligned}
&\left| c^x(v, \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)) \right| = \\
&= \left| \int_\Omega v \operatorname{div} \left(\left(c_1 - \frac{\partial b_{1,2}}{\partial y}, c_2 + \frac{\partial b_{1,2}}{\partial x} \right) \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h) \right) - v c_0 \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\, d\lambda \right| = \\
&= \left| \int_\Omega v \left(\operatorname{div} \left((c_1, c_2) \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h) \right) - c_0 \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h) + \frac{\partial b_{1,2}}{\partial x} \frac{\partial \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)}{\partial y} - \frac{\partial b_{1,2}}{\partial y} \frac{\partial \delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)}{\partial x} \right) \, d\lambda \right| \leq \\
&\leq 8 \left(\|c_0\|_{L^\infty} + \|c_1\|_{H^1_{p=\infty}} + \|c_2\|_{H^1_{p=\infty}} + \|b_{1,2}\|_{H^1_{p=\infty}} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Falls $v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}$, dann gilt $\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial x}(\Phi(x), y) = 0$ für alle $x \in [-\frac{h_x}{2}, \frac{h_x}{2}] \cup [1 - \frac{h_x}{2}, 1 + \frac{h_x}{2}]$ und $y \in [0,1]$. Deswegen erhalten wir aus Lemma 4.5, Lemma 3.3 und Lemma 4.4 und zwei kleinen Nebenrechnungen

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega_{h_x}} \mathcal{M}_{h_x} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{1,1}) \right) \frac{\partial v_h}{\partial x} \, d\lambda \right| = \left| \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x} \mathcal{M}_{h_x} \left(\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{1,1}) \right) \, d\lambda \right| = \\
&= \left| \int_{\Omega_{h_x}} I_D^{kon,h_x}(v) \mathcal{M}_{h_x} \left(\delta^1_{h_x} \left(\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial x} \right), \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{1,1}) \right) + \right. \\
&\quad \left. + I_D^{kon,h_x}(v) \tfrac{1}{2} \left(\mathcal{M}_{2h_x} \left(\frac{\partial \hat{v}_h}{\partial x}, \delta^2_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{1,1}) \right) + \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial x} \delta^2_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{1,1}) \right) \, d\lambda \right| \leq \\
&\leq 2 \|I_D^{kon,h_x}(v)\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\|\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v_h\|^2_{H^1(\Omega)}} \|b_{1,1}\|_{H^2_{p=\infty}} \leq \\
&\leq 4\sqrt{3} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|v_h\|_{H^2_{h_x}} \|b_{1,1}\|_{H^2_{p=\infty}}.
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration folgt somit aus Gleichung (4.23)

$$\begin{aligned}
&\left| d^x_{h_x}(v, v_h) \right| = \\
&= \left| \int_{\Omega_{h_x}} \left(\mathcal{M}_{h_x} \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{1,1}) \right) \frac{\partial v_h}{\partial x} + \mathcal{M}_{h_x} \left(\frac{\partial v}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{2,1} + b_{1,2}) \right) \frac{\partial v_h}{\partial x} \right) d\lambda + \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{2,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial y}d\lambda\Bigg| \leq \\
\leq\ & 20(\|(b_{1,1}, b_{2,2})\|_{H^2_{p=\infty}} + \|(b_{1,2}, b_{2,1})\|_{H^{G,2}_{p=\infty}})\|v\|_{L^2(\Omega)}\|v_h\|_{H^2_{h_x}}.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Ungleichungen folgt die Ungleichung (4.10).

Zu 2. Man betrachte die Definition von $S^d_{D,j}$ in Lemma 3.6. Es sei $S := V_D^{h_x} * S^1_{\emptyset,1}$. Aus Lemma 3.6 folgt, daß S dicht in $V^{h_x,0}_{D,N}$ ist. Falls $v_h \in S$, dann gilt $\frac{\partial v_h}{\partial y} \in V^{h_x,0}_{D,D} \subset H^1_0(\Omega)$. Außerdem ist $w \in H^1_0(\Omega) \cap H^{1,2}(\Omega)$. Deshalb erhalten wir durch partielle Integration für jedes $v_h \in S$

$$
\begin{aligned}
b^y\left(u, \frac{\partial v_h}{\partial y}\right) &= \int_\Omega (\nabla u)^T B^y \nabla\left(\frac{\partial v_h}{\partial y}\right)d\lambda = \\
&= \int_\Omega b_{1,1}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} + (b_{1,2}+b_{2,1})\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} + b_{2,2}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2}d\lambda = \\
&= -b^y\left(\frac{\partial u}{\partial y}, v_h\right) + d^y(u, v_h) \quad \text{wobei} \\
d^y(w, v_h) &:= -\int_\Omega (\nabla w)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial b_{1,1}}{\partial y}, & \frac{\partial(b_{2,1}+b_{1,2})}{\partial y} \\ 0, & \frac{\partial b_{2,2}}{\partial y} \end{pmatrix} \nabla v_h d\lambda.
\end{aligned}
$$

Dies zeigt die Gleichung (4.11) für alle $v_h \in S$ falls wir

$$
F^y(v, v_h) := c^y\left(v, \frac{\partial}{\partial y}v_h\right) + d^x_{h_x}(v, v_h) \tag{4.28}
$$

setzen. Eine einfache Rechnung zeigt die Ungleichung (4.12) für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ und alle $v_h \in S$. Da S dicht in $V^{h_x,0}_{D,N}$ ist, gelten (4.11) und (4.12) für alle $v_h \in V^{h_x,0}_{D,N}$.

Zu 3. Es sei

$$
\begin{aligned}
d^{xx}_{h_x}(v, v_h) &:= -\int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{1,1})\right)\frac{\partial v_h}{\partial x}d\lambda \\
&- \int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\tilde{b}_{2,1}+\tilde{b}_{1,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial x} - \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{2,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial y}d\lambda
\end{aligned}
$$

und

$$
F^{xx}_{h_x}(v, v_h) := -F^x_{h_x}(v, \delta^1_{h_x}(\tilde{v}_h)) + d^{xx}_{h_x}(\delta^1_{h_x}(\tilde{v}), v_h).
$$

Analog dem Beweis von Teil *1.* zeigt man die Gleichung (4.13).

Nun beweisen wir die Ungleichung (4.14). Wegen den Randbedingungen (4.4) gilt

$$
|d^{xx}_{h_x}(v, v_h)| \stackrel{\sim}{<} \|v\|_{H^1(\Omega)} \cdot \|v_h\|_{H^1(\Omega)}
$$

für alle $v \in V_{D,D}^{h_x,0}$ und $v_h \in V_{D,D}^{h_x,h_y}$. Daher reicht es wegen (4.24) zu zeigen

$$\begin{aligned}
|c^x(v, \delta^2_{h_x}(\tilde{v}_h))| &\stackrel{\sim}{<} \sqrt{\|\delta^1_{h_x}(\tilde{v})\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)}} \cdot \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{und} \\
|d^x_{h_x}(v, \delta^1_{h_x}(\tilde{v}_h))| &\stackrel{\sim}{<} \sqrt{\|\delta^1_{h_x}(\tilde{v})\|^2_{H^1(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)}} \cdot \|v_h\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

für alle $v \in V_{D,D}^{h_x,0}$ und $v_h \in V_{D,D}^{h_x,h_y}$. Wegen der Randbedingungen (4.4) erhält man diese Ungleichungen durch diskrete partielle Integration (siehe Lemma 4.5) und auf Grund der Glattheitseigenschaften der Operatoren $\tilde{}$ und $\hat{}$ (siehe Lemma 3.1). Damit ist die Ungleichung (4.14) bewiesen. Analog zeigt man (4.15).

Zu 4. Man betrachte die Definition von $S^d_{D,j}$ in Lemma 3.6. Es sei $S := V_N^{h_x} * S^1_{\emptyset,1}$. Aus Lemma 3.6 folgt, daß S dicht in $V_{N,N}^{h_x,0}$ ist. Falls $v_h \in S$, dann gilt $\frac{\partial v_h}{\partial y} \in V_{N,D}^{h_x,0}$. Außerdem ist $w \in H^1_0(\Omega) \cap H^{1,2}(\Omega)$ und $b_{1,2}, b_{2,1} \in H^1_0(\Omega)$. Deshalb erhalten wir durch partielle Integration für jedes $v_h \in S$

$$\begin{aligned}
&b_{h_x}\left(\delta^1_{h_x}(\tilde{w}), \frac{\partial v_h}{\partial y}\right) = \\
&= \int_\Omega b_{1,1} \frac{\partial \delta^1_{h_x}(\tilde{w})}{\partial x} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} + (b_{1,2} + b_{2,1}) \frac{\partial \delta^1_{h_x}(\tilde{w})}{\partial y} \frac{\partial^2 v_h}{\partial x \partial y} d\lambda \\
&\quad + \int_\Omega b_{2,2} \frac{\partial \delta^1_{h_x}(\tilde{w})}{\partial y} \frac{\partial^2 v_h}{\partial y^2} d\lambda = \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(b_{1,1} \frac{\partial \delta^1_{h_x}(\tilde{w})}{\partial x}\right) \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left((b_{1,2} + b_{2,1}) \frac{\partial \delta^1_{h_x}(\tilde{w})}{\partial y}\right) \frac{\partial v_h}{\partial x} d\lambda \\
&\quad - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial y}\left(b_{2,2} \frac{\partial \delta^1_{h_x}(\tilde{w})}{\partial y}\right) \frac{\partial v_h}{\partial y} d\lambda = \\
&= -b^x_{h_x}\left(\frac{\partial \delta^1_{h_x}(\tilde{w})}{\partial y}, v_h\right) + d^{xy}(\delta^1_{h_x}(\tilde{w}), v_h)
\end{aligned}$$

wobei

$$d^{xy}(v, v_h) := -\int_{\Omega_{h_x}} \left(\frac{\partial b_{1,1}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial (b_{1,2} + b_{2,1})}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v_h}{\partial x} d\lambda - \int_\Omega \frac{\partial b_{2,2}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} d\lambda.$$

Des weiteren sei

$$F^{xy}_{h_x}(v, v_h) := -F^x_{h_x}\left(v, \frac{\partial}{\partial y} v_h\right) + d^{xy}(\delta^1_{h_x}(\tilde{v}), v_h).$$

Deshalb folgt aus (4.8), daß die Gleichung (4.16) für alle $v_h \in S$ richtig ist. Nehmen wir an, wir können die Ungleichung (4.17) für alle für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ und $v_h \in S$ beweisen. Da S dicht in $V_{N,N}^{h_x,0}$ ist, läßt sich somit $F^{xy}_{h_x}$ auf ganz $V_{N,N}^{h_x,0}$ so fortsetzen, daß (4.16) und (4.17) für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ und $v_h \in V_{N,N}^{h_x,0}$ richtig sind. Daher reicht es die Ungleichung (4.17) für $v_h \in S$ zu beweisen.

Natürlich ist

$$|d^{xy}(v,v_h)| \stackrel{\sim}{<} |v|_{H^1_{h_x}} \cdot |v_h|_{H^1_{h_x}}$$

für alle $v \in H^1_0(\Omega)$ und $v_h \in S$. Daher reicht es wegen (4.24) zu zeigen

$$\begin{aligned} \left| c^x\left(v, \frac{\partial}{\partial y}\delta^1_{h_x}(\hat{v}_h)\right)\right| &\stackrel{\sim}{<} \sqrt{|v|^2_{H^{1,2}(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)}} \cdot |v_h|_{H^1_{h_x}} \quad \text{und} \\ \left| d^x_{h_x}\left(v, \frac{\partial}{\partial y}v_h\right)\right| &\stackrel{\sim}{<} \sqrt{|v|^2_{H^{1,2}(\Omega)} + \|v\|^2_{H^1(\Omega)}} \cdot |v_h|_{H^1_{h_x}} \end{aligned}$$

für alle $v \in V^{h_x,0}_{D,D}$ und $v_h \in S$. Wegen der Randbedingungen (4.4) erhält man diese Ungleichungen durch partielle Integration, diskrete partielle Integration (siehe Lemma 4.5) und auf Grund der Glattheitseigenschaften der Operatoren ˜ und ˆ (siehe Lemma 3.1).

Zu 5. Der Beweis ist ganz ähnlich dem Beweis von *1.*. $d^x_{h_x}$ muß nun jedoch wie folgt definiert werden

$$\begin{aligned} & d^x_{h_x}(v,v_h) := \\ = & -\int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{1,1})\right)\frac{\partial v_h}{\partial x} d\lambda \\ & -\int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\tilde{b}_{2,1}+\tilde{b}_{1,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial y} d\lambda - \int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{2,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial y} d\lambda = \\ = & -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x}\mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{1,1})\right) d\lambda \\ & -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x}\mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial \tilde{v}_h}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\tilde{b}_{2,1}+\tilde{b}_{1,2})\right) d\lambda - \int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{2,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial y} d\lambda = \\ = & -\int_{\Omega_{h_x}} \frac{\partial v}{\partial x}\mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v_h}{\partial x}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{1,1})\right) d\lambda \\ & -\int_{\Omega_{h_x}} \frac{\partial v}{\partial x}\mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial v_h}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(b_{2,1}+b_{1,2})\right) d\lambda - \int_\Omega \mathcal{M}_{h_x}\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \delta^1_{\frac{h_x}{2}}(\hat{b}_{2,2})\right)\frac{\partial v_h}{\partial y} d\lambda, \end{aligned}$$

wobei $v \in V^{h_x,0}_{N,D}$ und $v_h \in V^{h_x,0}_{D,D}$. **q.e.d.**

4.2.4 Regularität der semi-diskreten Lösung

Es ist nicht einfach die H^2-Regularität von elliptischen Differentialgleichungen auf Gebieten mit Ecken zu beweisen. Interessanterweise ist es wesentlich einfacher die $H^2_{h_x}$-Regularität für schwache Lösungen zu zeigen, die in einer Richtung stückweise linear und in der anderen Richtung kontinuierlich sind. Dies soll in diesem Abschnitt gezeigt werden. Hierzu sei $h_x = 2^i$ wobei $i \in \mathbb{N}$.

Satz 4.3 (Regularität der semi-diskreten Lösung)
Man nehme an $B \in \left(H^1_{p=\infty}(\Omega)\right)^{2\times 2}$. Dann gibt es eine Konstante $C_{reg} > 0$ unabhängig von h_x, so daß für jedes $g \in L^2(\Omega)$ gilt:

1. *Es sei $w \in V^{h_x,0}_{D,D}$ die Lösung der Gleichung $b(w,v) = \int_\Omega vg \; d\lambda \quad \forall v \in V^{h_x,0}_{D,D}$. Dann folgt*
$$\|w\|_{H^2_{h_x}} \leq C_{reg}\|g\|_2.$$
2. *Es sei $w \in V^{h_x,0}_{N,D}$ die Lösung der Gleichung $b^x(v,w) = \int_\Omega vg \; d\lambda \quad \forall v \in V^{h_x,0}_{N,D}$. Dann folgt*
$$\|w\|_{H^2_{h_x}} \leq C_{reg}\|g\|_2.$$

Beweis: *Zu 1.* Aus *1.* in Satz 4.2 folgt

$$\begin{aligned} b^x(\delta^1_{h_x}(\tilde{w}), v_h) &= F^x_{h_x}(v_h) - \int_\Omega g\delta^1_{h_x}(\hat{v_h}) \; d\lambda \quad \forall v_h \in V^{h_x,0}_{N,D} \quad \text{und} \\ |F^x_{h_x}(v_h)| &\mathrel{\tilde{<}} \|w\|_{H^1}\|v_h\|_{H^1} \mathrel{\tilde{<}} \|g\|_2\|v_h\|_{H^1} \quad \forall v_h \in V^{h_x,0}_{N,D} \end{aligned}$$

für alle h_x und alle w. Mit Hilfe von (3.1) folgt

$$\begin{aligned} |\delta^1_{h_x}(\tilde{w})|^2_{H^1(\Omega)}\alpha &\leq b^x(\delta^1_{h_x}(\tilde{w}), \delta^1_{h_x}(\tilde{w})) = \\ &= F^x_{h_x}(\delta^1_{h_x}(\tilde{w})) - \int_\Omega g\delta^1_{h_x}(\tilde{w}) \; d\lambda \mathrel{\tilde{<}} \|\delta^1_{h_x}(\tilde{w})\|_{H^1}\|g\|_2 \end{aligned}$$

für alle h_x und alle w. $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ und $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ sind äquivalente Normen auf $V^{h_x,0}_{N,D}$. Daher schließt man

$$\|\delta^1_{h_x}(\tilde{w})\|_{H^1(\Omega)} \mathrel{\tilde{<}} \|g\|_2$$

für alle h_x und alle w. Mit Hilfe von Lemma 3.3 folgt nun

$$\left\|\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right\|_{L^2(\Omega)} \mathrel{\tilde{<}} \|\delta^1_{h_x}(\tilde{w})\|_{H^1(\Omega)} \mathrel{\tilde{<}} \|g\|_2$$

für alle h_x und alle w. Wir definieren nun folgende Linearform

$$G(v) := \int_\Omega b_{22}b_{22}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} d\lambda = -\int_\Omega (\nabla w)^T \begin{pmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2} \\ b_{2,1}, & 0 \end{pmatrix} \nabla v d\lambda + \int_\Omega vg d\lambda.$$

Durch partielle Integration und diskrete partielle Integration folgt somit

$$|G(v)| \mathrel{\tilde{<}} \left(\|\delta^1_{h_x}(w)\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\right)\|v\|_{L^2(\Omega)} = \|g\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle h_x und alle w. Analog dem Beweis des Satzes 9.1.11 in [23] erhält man nun

$$|w|_{H^{1,2}(\Omega)} \overset{\sim}{<} \|g\|_2$$

für alle h_x und alle w.

Zu 2. Der Beweis folgt analog unter Verwendung von *5.* in Satz 4.2. **q.e.d.**

Korollar 4.1 *Man nehme an, daß a H_0^1-elliptisch ist oder daß das Problem und das adjungierte Problem H^2-regulär sind (siehe Definition 3.2 und 3.3). Falls $B \in \left(H^1_{p=\infty}(\Omega)\right)^{2\times 2}$, dann gibt es eine Konstante C_{reg} unabhängig von h_x, so daß für alle $g \in L^2(\Omega)$ gilt:*

1. *Falls $w \in V_{D,D}^{h_x,0}$ die eindeutige Lösung von $a(w,v) = \int_\Omega vg\ d\lambda \quad \forall v \in V_{D,D}^{h_x,0}$ ist, dann gilt*
$$\|w\|_{H^2_{h_x}} \leq C_{reg}\|g\|_2.$$

2. *Falls $w \in V_{D,D}^{h_x,0}$ die eindeutige Lösung von $a(v,w) = \int_\Omega vg\ d\lambda \quad \forall v \in V_{D,D}^{h_x,0}$ ist, dann gilt*
$$\|w\|_{H^2_{h_x}} \leq C_{reg}\|g\|_2.$$

Beweis: Wegen der Gårdingschen Ungleichung ist a H_0^1-koerziv. Die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt. Hieraus folgt, daß auch die Einbettung $V_{D,D}^{h_x,0} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ kompakt ist. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung w folgt aus der Riesz-Schauder Theorie (siehe Satz 6.5.15 und Satz 7.2.14 in [23]), daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß gilt $\|w\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|g\|_2$. Theorem (5.7.6.) in [7] impliziert, daß man diese Konstante unabhängig von h_x wählen kann, falls h_x klein genug ist. Deswegen gibt es eine Konstante $C' > 0$ unabhängig von h_x, so daß gilt $\|q\|_2 \leq C'\|g\|_2$, wobei q die eindeutige Funktion $q \in L^2(\Omega)$ ist, für die gilt

$$-c(w,v) + \int_\Omega gv\ d\lambda = \int_\Omega qv\ d\lambda \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Natürlich ist

$$b(w,v) = \int_\Omega qv\ d\lambda \quad v \in V_{D,D}^{h_x,0}.$$

Mit Theorem 4.3 erhält man nun den Beweis der ersten Ungleichung. Die zweite Ungleichung folgt ganz analog. **q.e.d.**

4.2.5 Das Lemma von Strang und das Lemma von Aubin und Nitsche

Wir benötigen Strang's Lemma in einer sehr allgemeinen Version. Deswegen wird dieses bekannte Lemma hier wiederholt. In diesem Abschnitt wollen wir nicht die Bezeichnungen der anderen Abschnitte verwenden.

Es sei $V \subset L^2(\Omega)$ ein Teilraum und $V_h \subset V$ eine Folge von Teilräumen mit $h = 2^{-n}$ und $n \geq n_0$. Auf V sei eine Halbnorm $\|\cdot\|$ gegeben. Im folgenden sei a irgendeine Bilinearform

$$a : V \times \cup_h V_h \to \mathbb{R},$$

die stetig bezüglich $\|\cdot\|$ ist. Das heißt, es gibt eine Konstante β, so daß gilt

$$|a(v, v_h)| \leq \beta \|v\| \|v_h\| \quad \forall v \in V, v_h \in V_h.$$

Des weiteren seien F und F_h irgendwelche lineare Abbildungen $V_h \to \mathbb{R}$.

Schließlich gelte für $u \in V$ und $u_h \in V_h$

$$\begin{aligned} a(u, v_h) &= F(v_h) \quad \forall v \in V \quad \text{und} \\ a(u_h, v_h) &= F_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 4.6 (Strang's Lemma für stark elliptische Dgl) *Es sei a gleichmäßig V_h-elliptisch. Das heißt es gibt eine Konstante $\alpha > 0$, so daß gilt*

$$\alpha \|v_h\|^2 \leq a(v_h, v_h) \quad \text{für alle} \quad v_h \in V_h \quad \text{und alle} \quad h.$$

Dann gibt es eine Konstante C_{Strang} unabhängig von h, u, u_h, so daß gilt

$$\|u - u_h\| \leq C_{Strang} \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| + \sup_{z_h \in V_h} \frac{F(z_h) - F_h(z_h)}{\|z_h\|} \right).$$

Beweis: Für alle $v_h \in V_h$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha \|v_h - u_h\|^2 &\leq a(v_h - u_h, v_h - u_h) = \\ &= a(v_h - u, v_h - u_h) + (F(v_h - u_h) - F_h(v_h - u_h)) \leq \\ &\leq \|v_h - u_h\| \left(\beta \|v_h - u\| + \sup_{z_h \in V_h} \frac{F(z_h) - F_h(z_h)}{\|z_h\|} \right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq \|u - v_h\| + \|v_h - u_h\| \leq \\ &\leq \|u - v_h\| + \alpha^{-1} \left(\beta \|v_h - u\| + \sup_{z_h \in V_h} \frac{F(z_h) - F_h(z_h)}{\|z_h\|} \right). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. **q.e.d.**

Es sei nun $|||\cdot|||$ eine weitere Halbnorm auf V, so daß folgende Approximationseigenschaft gilt:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\| \leq hC_{int}|||v|||,$$

für alle $v \in V$, wobei C_{int} eine Konstante unabhängig von h und v ist. Des weiteren gelte folgende Regularitätseigenschaft. Es gibt eine Konstante C_{reg}, so daß gilt:

Für $g \in L^2(\Omega)$ gibt es genau eine Lösung $w \in V$ der Gleichung

$$a(v, w) = \int_\Omega vg \; d\lambda.$$

und es gilt

$$|||w||| \leq C_{reg}\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Unter diesen Voraussetzungen erhält man:

Lemma 4.7 (Aubin und Nitsche) *Die Linearformen F und F_h seien auf ganz V definiert. Dann gibt eine Konstante C_{AN}, so daß gilt*

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{AN}\left(h\left(\|u - u_h\| + \sup_{z\in V}\frac{F(z) - F_h(z)}{\|z\|}\right) + \sup_{z\in V}\frac{F(z) - F_h(z)}{|||z|||}\right).$$

Beweis: Es sei $w \in V$ die Lösung der Gleichung

$$a(v, w) = \int_\Omega v(u - u_h) \; d\lambda.$$

Für alle $w_h \in V_h$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} = a(u - u_h, w) = \\
&= \; a(u - u_h, w - w_h) + (F(w_h) - F_h(w_h)) = \\
&= \; a(u - u_h, w - w_h) + (F(w_h - w) - F_h(w_h - w)) + (F(w) - F_h(w)) \leq \\
&\leq \; \left(\beta\|u - u_h\| + \sup_{z\in V}\frac{F(z) - F_h(z)}{\|z\|}\right)\|w - w_h\| + \sup_{z\in V}\frac{F(z) - F_h(z)}{|||z|||}|||w|||.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
&\|u - u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \\
&\leq \; \left(\left(\beta\|u - u_h\| + \sup_{z\in V}\frac{F(z) - F_h(z)}{\|z_h\|}\right)hC_{int} + \sup_{z\in V}\frac{F(z) - F_h(z)}{|||z|||}\right) \\
&\quad \cdot C_{reg}\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. **q.e.d.**

Wir wollen nun Strang's Lemma verallgemeinern. Hierzu sei $\|\cdot\|$ die Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ und es sei $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq |||v|||$ für alle $v \in V$. Die Bilinearform a sei H^1-koerziv. Das heißt es gibt Konstanten K und α, so daß gilt

$$a(v,v) + K\|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Unter diesen und obigen Voraussetzungen gilt:

Lemma 4.8 (Strang's Lemma für allgemeine Dgl) *Es gibt eine Konstante C_{Strang} unabhängig von h, u und u_h und eine Maschenweite h_0 unabhängig von u und u_h, so daß gilt*

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{Strang} \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \sup_{z_h \in V_h} \frac{F(z_h) - F_h(z_h)}{\|z_h\|_{H^1(\Omega)}} \right)$$

für alle $h < h_0$.

Beweis: Wenn man den Beweis des Lemmas von Aubin und Nitsche betrachtet, dann sieht man, daß auch gilt

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{AN} \left(h\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} + \sup_{z_h \in V_h} \frac{F(z_h) - F_h(z_h)}{\|z_h\|_{H^1(\Omega)}} \right).$$

Der Beweis ist nun nichts anderes als eine einfache Kombination des Beweises von Theorem (5.7.6) in [7] und des Beweises von Lemma 4.6. **q.e.d.**

4.3 Beweis der globalen Konvergenz

Im folgenden sei immer $h_x = 2^i$ und $h_y = 2^j$, wobei $i, j \in \mathbb{N}$. Es sei nun

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{h_x,h_y} &:= -u_{2h_x,h_y} + u_{h_x,h_y} + u_{2h_x,2h_y} - u_{h_x,2h_y}, \\ \mathcal{V}^x_{h_x} &:= u_{h_x,0.5} - u_{2h_x,0.5} \quad \text{und} \\ \mathcal{V}^y_{h_y} &:= u_{0.5,h_y} - u_{0.5,2h_y}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Man betrachte die Definition des hierarchischen Überschusses in Abschnitt 2.1. Die Lösungen $u_{2^{-i},2^{-j}}$ bilden eine Mehrfachfolge. Der zugehörige hierarchische Überschuß ist nun

$$v_{i,j} = \begin{cases} \mathcal{V}_{2^{-i},2^{-j}} & \text{falls} \quad i,j \geq 1, \\ \mathcal{V}^x_{h_x} & \text{falls} \quad i \geq 1, \quad j = 1 \\ \mathcal{V}^y_{h_y} & \text{falls} \quad j \geq 1, \quad i = 1 \end{cases}.$$

Es seien nun $u_{h_x,0} \in V_{D,D}^{h_x,0}$ und $u_{0,h_y} \in V_{D,D}^{0,h_y}$ die Lösungen der Gleichungen

$$a\left(u_{h_x,0}, v_h\right) = \int_\Omega f v_h \; d\lambda \qquad \forall v_h \in V_{D,D}^{h_x,0} \quad \text{und} \tag{4.30}$$

$$a\left(u_{0,h_y}, v_h\right) = \int_\Omega f v_h \; d\lambda \qquad \forall v_h \in V_{D,D}^{0,h_y}. \tag{4.31}$$

Falls a H_0^1-elliptisch ist, dann existieren eindeutige Lösungen $u_{h_x,0} \in V_{D,D}^{h_x,0}$ und $u_{0,h_y} \in V_{D,D}^{0,h_y}$ für alle h_x und h_y. Ansonsten ist die Existenz und Eindeutigkeit nur für genügend kleine h_x und h_y gewährleistet. Hierauf werden wir im Abschnitt 4.3.4 genauer eingehen.

Aus Korollar 4.1 folgt

$$|u_{h_x,0}|_{H^{1,2}(\Omega)} \;\; \leq \;\; C_{reg}\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \tag{4.32}$$

$$|u_{0,h_y}|_{H^{2,1}(\Omega)} \;\; \leq \;\; C_{reg}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.33}$$

4.3.1 $\|u - u_{h,h_0}^\kappa\|_{H^1} = O(h \log h^{-1})$ im Fall der H_0^1-Elliptizität

Wir nehmen an es gelten die Voraussetzungen des Teils *1.* des Satzes 4.1 und es sei a H_0^1-elliptisch. Wegen Satz 2.1 reicht es zu zeigen:

$$\|\mathcal{V}_{h_x,h_y}\|_{H^1} \;\; = \;\; O(h_x h_y), \tag{4.34}$$

$$\|\mathcal{V}_{h_x}\|_{H^1} = O(h_x) \qquad \text{und} \qquad \|\mathcal{V}_{h_y}\|_{H^1} = O(h_y). \tag{4.35}$$

Die Ungleichung (4.35) erhält man leicht aus Cea's Lemma, den Ungleichungen (4.32) und (4.33) und Lemma 4.1. Die Ungleichung (4.34) werden wir nun in mehreren Schritten zeigen.

1. Schritt: **Hauptteil des Beweises.**
Man nehme an es gelte

$$|u_{2h_x,0} - u_{h_x,0}|_{H^{1,2}(\Omega)} \;\; \tilde{<} \;\; h_x, \tag{4.36}$$

$$|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0})|_{H^{1,2}(\Omega)} \;\; \tilde{<} \;\; h_x \quad \textit{und} \tag{4.37}$$

$$\left\|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{H^1(\Omega)} \;\; \tilde{<} \;\; h_x h_y, \tag{4.38}$$

für alle h_x und h_y. Dann gilt die Ungleichung (4.34).

Beweis: Nehmen wir an es gilt

$$\left\|-u_{2h_x,0} + u_{h_x,0} + u_{2h_x,h_y} - u_{h_x,h_y}\right\|_{H^1(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y \tag{4.39}$$

für alle h_x und h_y. Wegen (4.29) und der Dreiecksungleichung erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{h_x,h_y} \;\; \leq \;\; & \left\|-u_{2h_x,h_y} + u_{h_x,h_y} + u_{2h_x,0} - u_{h_x,0}\right\|_{H^1(\Omega)} + \\ & + \left\|-u_{2h_x,0} + u_{h_x,0} + u_{2h_x,2h_y} - u_{h_x,2h_y}\right\|_{H^1(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y \end{aligned}$$

für alle h_x und h_y. Dies ist die Ungleichung (4.34). Deswegen reicht es (4.39) zu beweisen. Wir wollen diese Ungleichung mit Hilfe der Konvergenztheorie von finiten Elementen zeigen. Die Schwierigkeit hierbei ist es geeignete Räume zu finden. Daher verwenden folgenden Trick. Wir beweisen, daß $u_{2h_x,h_y} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,h_y})$ gegen $u_{2h_x,0} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,0})$ konvergiert. Hiefür wählen wir für den kontinuierlichen Raum $V_{D,D}^{2h_x,0}$ und für den approximativen Raum $V_{D,D}^{2h_x,h_y}$. Man Beachte die Definition des hierarchischen Überschusses in x-Richtung (siehe (4.5)). Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} u_{2h_x,0} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,0}) &= u_{2h_x,0} - u_{h_x,0} + \mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0}) \in V_{D,D}^{2h_x,0} \quad \text{und} \\ u_{2h_x,h_y} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,h_y}) &= u_{2h_x,h_y} - u_{h_x,h_y} + \mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,h_y}) \in V_{D,D}^{2h_x,h_y}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

$u_{h_x,0} \in V_{D,D}^{h_x,0}$ und $u_{h_x,h_y} \in V_{D,D}^{h_x,h_y}$ haben die Eigenschaft (siehe (4.30) und (4.1))

$$\begin{aligned} a(u_{h_x,0}, v) &= \int_\Omega fv \; d\lambda \quad \forall v \in V_{D,D}^{h_x,0} \quad \text{und} \\ a(u_{h_x,h_y}, v_h) &= \int_\Omega f v_h \; d\lambda \quad \forall v_h \in V_{D,D}^{h_x,h_y}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} a(u_{2h_x,0} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,0}), v) &= a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0}), v) \quad \forall v \in V_{D,D}^{2h_x,0} \quad \text{und} \\ a(u_{2h_x,h_y} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,h_y}), v_h) &= a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,h_y}), v_h) \quad \forall v_h \in V_{D,D}^{2h_x,h_y}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Wegen (4.38) folgt

$$\sup_{v_h \in V_{D,D}^{2h_x,h_y}} \frac{|a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0}), v_h) - a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,h_y}), v_h)|}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}} \;\tilde{<}\; h_x h_y \tag{4.42}$$

für alle h_x und h_y. Wegen Strang's Lemma gibt es eine Konstante $\tilde{C} > 0$, so daß gilt

$$\begin{aligned} &\left\| u_{2h_x,0} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,0}) - \left(u_{2h_x,h_y} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,h_y}) \right) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \\ \leq \;& \tilde{C} \left(\inf_{v_h \in V_{D,D}^{2h_x,h_y}} \|u_{2h_x,0} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,0}) - v_h\|_{H^1(\Omega)} + \right. \\ &\left. + \sup_{v_h \in V_{D,D}^{2h_x,h_y}} \frac{|a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0}), v_h) - a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,h_y}), v_h)|}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}} \right). \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.1 und den Gleichungen (4.36), (4.37), (4.40) und (4.42) folgt daher

$$\begin{aligned} &\left\| u_{2h_x,0} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,0}) - \left(u_{2h_x,h_y} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,h_y}) \right) \right\|_{H^1(\Omega)} \;\tilde{<} \\ \tilde{<} \;& h_y |u_{2h_x,0} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,0})|_{H^{1,2}(\Omega)} + h_x h_y \;\tilde{<}\; h_x h_y \end{aligned} \tag{4.43}$$

für alle h_x und h_y. Hieraus folgt nun mit Hilfe von (4.38) und (4.40) leicht die Ungleichung (4.39). *q.e.d.*

2. Schritt:
Es gilt

$$|u_{2h_x,0} - u_{h_x,0}|_{H^{1,2}(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x \left(\left|\tfrac{\partial}{\partial y}u\right|_{H^{2,1}(\Omega)} + |u|_{H^{2,1}(\Omega)} \right). \tag{4.44}$$

für alle h_x und alle u.
Beweis: Es reicht zu zeigen, daß gilt

$$|u_{h_x,0} - u|_{H^{1,2}(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x \left(\left|\tfrac{\partial}{\partial y}u\right|_{H^{2,1}(\Omega)} + |u|_{H^{2,1}(\Omega)} \right) \tag{4.45}$$

für alle h_x und alle u. Aus Lemma 4.1 und Cea's Lemma folgt sofort

$$\|u_{h_x,0} - u\|_{H^1(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x |u|_{H^{2,1}(\Omega)} \tag{4.46}$$

für alle h_x und alle u. Wir wenden nun Teil *2* des Satzes 4.2 auf die Gleichungen (3.2) und (4.30) an. Wir erhalten dann

$$b^y\left(\frac{\partial u}{\partial y}, v_h\right) = F^y(u, v_h) - \int_\Omega f \frac{\partial v_h}{\partial y}\, d\lambda =: R(v_h) \quad \text{und} \tag{4.47}$$

$$b^y\left(\frac{\partial u_{h_x,0}}{\partial y}, v_h\right) = F^y(u_{h_x,0}, v_h) - \int_\Omega f \frac{\partial v_h}{\partial y}\, d\lambda =: R_{h_x}(v_h) \tag{4.48}$$

für alle $v_h \in V_{D,N}^{h_x,0}$, wobei $\frac{\partial u}{\partial y} \in H^1_{D,N}$ und $\frac{\partial u_{h_x,0}}{\partial y} \in V_{D,N}^{h_x,0}$. Wegen (4.12) und (4.46) folgt

$$\sup_{v_h \in V_{D,N}^{h_x,0}} \frac{|(R - R_{h_x})(v_h)|}{\|v_h\|_{H^1}} \stackrel{\sim}{<} h_x |u|_{H^{2,1}(\Omega)}$$

für alle h_x und alle u. Daher folgt aus Lemma 4.1 und Strang's Lemma die Behauptung. *q.e.d.*

3. Schritt: Es gilt

$$|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0})|_{H^{1,2}(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x \quad \textit{und} \tag{4.49}$$

$$\left\|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{H^1(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x h_y. \tag{4.50}$$

für alle h_x, h_y.
Beweis: Analog dem Beweis vom *2. Schritt* zeigt man

$$\left|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}) - \delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^1_{h_x}} \stackrel{\sim}{<} h_x |\delta^1_{h_x}(\tilde{u})|_{H^{2,1}_{h_x}} \quad \text{und}$$

$$\left\|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0}) - \delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,h_y})\right\|_{H^1(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_y \left|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}(\Omega)}$$

für alle h_x, h_y und alle u. Hierfür muß man natürlich den Teil 1. des Satzes 4.2 verwenden. Wegen Lemma 3.1 und 3.3 gilt

$$|\delta^1_{h_x}(\tilde{u})|_{H^{2,1}_{h_x}} \leq \|u\|_{H^3(\Omega)}.$$

Aus (4.45) folgt

$$\left|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq \left|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u})\right|_{H^{1,2}(\Omega)} + \left|\delta^1_{h_x}(\tilde{u})\right|_{H^{1,2}(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} 1 \tag{4.51}$$

für alle h_x. Zusammen folgt daher

$$\left|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}) - \delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^1_{h_x}} \quad \stackrel{\sim}{<} \quad h_x \quad \text{und} \tag{4.52}$$

$$\left\|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0}) - \delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,h_y})\right\|_{H^1(\Omega)} \quad \stackrel{\sim}{<} \quad h_y \tag{4.53}$$

für alle h_x und h_y.

Aus (4.52) erhält man analog dem Beweis von (4.51)

$$\left\|\delta^2_{h_x}\left(\frac{\partial u_{h_x,0}}{\partial y}\right)\right\|_{L^2(\Omega_{2h_x})} \stackrel{\sim}{<} 1 \tag{4.54}$$

für alle h_x. Wegen Lemma 4.3 und den Ungleichungen (4.54) und (4.51), erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0})|_{H^{1,2}(\Omega)} = &\left|\mathcal{H}_{h_x}\left(\frac{\partial u_{h_x,0}}{\partial y}\right)\right|_{H^1(\Omega)} \leq \\
&\leq h_x 2\sqrt{3}\left(\left\|\delta^2_{h_x}\left(\frac{\partial u_{h_x,0}}{\partial y}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_{2h_x})} + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta^1_{h_x}\left(\frac{\partial u_{h_x,0}}{\partial y}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_{h_x})}\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{\sim}{<} \\
&\stackrel{\sim}{<} h_x
\end{aligned}$$

für alle h_x. Dies zeigt (4.49).

Aus Lemma 4.3, Lemma 3.3 und der Ungleichung (4.53) folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right|_{H^1(\Omega)} \leq \\
&\leq \quad h_x 2\sqrt{3}\left(\left\|\delta^2_{h_x}\left(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_{2h_x})} + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta^1_{h_x}\left(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_{h_x})}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \quad h_x 2\sqrt{3}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}\delta^1_{h_x}\left(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_{h_x})} + \left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta^1_{h_x}\left(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega_{h_x})}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \quad h_x 2\sqrt{3}\left\|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\right\|_{H^1(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x h_y
\end{aligned}$$

für alle h_x und h_y. Hieraus folgt die Ungleichung (4.50). *q.e.d.*

4.3.2 $\|u - u^{\kappa}_{h,h_0}\|_{L^2} = O(h^{\frac{3}{2}})$ im Fall der H^1_0-Elliptizität

Wir nehmen an, es gelten die Voraussetzungen des Teils *2.* des Satzes 4.1 und es sei a H^1_0-elliptisch. Wegen Satz 2.1 reicht es zu zeigen:

$$\|\mathcal{V}_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)} \quad = \quad O(\min(h_x^2 h_y, h_x h_y^2), \tag{4.55}$$

$$\|\mathcal{V}_{h_x}\|_{L^2(\Omega)} = O(h_x^2) \qquad \text{und} \qquad \|\mathcal{V}_{h_y}\|_{L^2(\Omega)} = O(h_y^2). \tag{4.56}$$

Die Ungleichung (4.56) erhält man leicht mit Hilfe des Lemmas von Aubin und Nitsche Lemma 4.7 , Korollar 4.1 und (4.35). Die Ungleichung (4.55) werden wir nun in mehreren Schritten zeigen.

1. Schritt: **Hauptteil des Beweises.**
Falls

$$\left\|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \quad \tilde{<} \quad h_x h_y^2 \tag{4.57}$$

für alle h_x, h_y, dann gilt die Ungleichung (4.55).
Beweis: Man sieht, daß es reicht zu zeigen

$$\left\|-u_{2h_x,0} + u_{h_x,0} + u_{2h_x,h_y} - u_{h_x,h_y}\right\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y^2 \tag{4.58}$$

für alle h_x und h_y. Es sei nun

$$\begin{aligned} g_{h_x} \quad &:= \quad u_{2h_x,0} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,0}) \\ g_{h_x,h_y} \quad &:= \quad u_{2h_x,h_y} - I_p^{2h_x}(u_{h_x,h_y}) \end{aligned} \tag{4.59}$$

Wegen (4.41) gilt daher

$$\begin{aligned} a(g_{h_x}, v) \quad &= \quad a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0}), v) \quad \forall v \in V_{D,D}^{2h_x,0} \quad \text{und} \\ a(g_{h_x,h_y}, v_h) \quad &= \quad a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,h_y}), v_h) \quad \forall v_h \in V_{D,D}^{2h_x,h_y}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

Wir wenden nun das Lemma von Aubin und Nitsche Lemma 4.7 an. Hierzu setzen wir $V := V_{D,D}^{2h_x,0} \cap H^{1,2}(\Omega)$ und $V_h := V_{D,D}^{2h_x,h_y}$, wobei hier $h = h_y$ sei. Man beachte, daß die im Lemma 4.7 entstehenden Konstanten unabhängig von h_x sind. Außerdem sei $|||\cdot||| := \|\cdot\|_{H^2_{h_x}}$.

Durch partielle Integration und diskrete partielle Integration (siehe Lemma 4.5) und durch Lemma 4.4 erhält man

$$|a(v_h, z)| \;\tilde{<}\; \left(\|I_D^{kon,h}(v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|v_h\|_{L^2(\Omega)}\right) \|z\|_{H^2_{h_x}} \;\tilde{<}\; \|v_h\|_{L^2(\Omega)} |||z|||$$

für alle h_x, h_y und alle $v_h \in V_{D,D}^{h_x,0}$ und alle $z \in V$. Natürlich ist

$$|a(v_h, z)| \;\tilde{<}\; \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \|z\|_{H^1(\Omega)}$$

für alle h_x, h_y und alle $v_h \in V_{D,D}^{h_x,0}$ und alle $z \in V$. Wir setzen nun $v_h := \mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})$. Wegen Korollar 4.1 und Lemma 4.1 sieht man, daß die Voraussetzungen für das Lemma 4.7 erfüllt sind. Daher folgt mit den Ungleichungen (4.57), (4.38) und (4.43)

$$\|g_{h_x} - g_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} \tag{4.61}$$

$$\stackrel{\sim}{<} \quad h_y \left(\|g_{h_x} - g_{h_x,h_y}\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\|_{H^1(\Omega)}\right) + \\ + \|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x h_y^2 \tag{4.62}$$

für alle h_x, h_y. Hieraus folgt nun mit Hilfe von (4.59), (4.57) und (4.40) leicht die Ungleichung (4.58). *q.e.d.*

2. Schritt: Es gilt

$$\left\|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x h_y^2 \tag{4.63}$$

für alle h_x, h_y.

Beweis: Wegen Lemma 4.3 reicht es zu zeigen

$$\left\|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_y^2 \tag{4.64}$$

für alle h_x, h_y. Mit Hilfe des Lemmas von Aubin und Nitsche folgt aus den Gleichungen (4.1) und (4.30)

$$\|u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_y^2 \tag{4.65}$$

für alle h_x, h_y. Wir wenden Teil *1.* des Satzes 4.2 auf die Gleichungen (4.1) und (4.30) an. Wir erhalten dann

$$b^x\left(\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0}), v_h\right) = F^x_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0}, v_h) - \int_\Omega f \delta^1_{h_x}(v_h)\, d\lambda =: R_{h_x}(v_h), \tag{4.66}$$

$$b^x\left(\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,h_y}), v_h\right) = F^x_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,h_y}, v_h) - \int_\Omega f \delta^1_{h_x}(v_h)\, d\lambda =: R_{h_x,h_y}(v_h) \tag{4.67}$$

für alle $v_h \in V_{N,D}^{h_x,h_y}$, wobei $\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0}) \in V_{N,D}^{h_x,0}$ und $\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,h_y}) \in V_{N,D}^{h_x,h_y}$.

Wegen (4.10) und (4.65) folgt

$$\sup_{v_h \in V_{N,D}^{h_x,0}} \frac{|(R_{h_x} - R_{h_x,h_y})(v_h)|}{\|v_h\|_{H^2_{h_x}}} \stackrel{\sim}{<} \|u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_y^2$$

für alle h_x, h_y. Wegen *2.* in Satz 4.3 ist das adjungierte Problem zur Gleichung (4.66) $H^2_{h_x}$-regulär. Der Rest des Beweises folgt mit Hilfe des Lemmas von Aubin und Nitsche analog dem Beweis des *1.Schritt.* *q.e.d.*

4.3.3 $\|u - u^{\kappa}_{h,h_0}\|_{H^1} = O(h)$ und $\|u - u^{\kappa}_{h,h_0}\|_{L^2} = O(h^2 \log h^{-1})$ im Fall der H^1_0-Elliptizität

Wir nehmen an, es gelten die Voraussetzungen des Teils *3.* des Satzes 4.1 und es sei a H^1_0-elliptisch. Wegen Satz 2.1 reicht es aus Symmetriegründen zu zeigen:

$$\begin{array}{rcll} \|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{V}_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)} & = & O(h_x h_y^2), & (4.68)\\ \|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{V}_{h_x}\|_{L^2(\Omega)} = O(h_x) & \text{und} & \|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{V}_{h_y}\|_{L^2(\Omega)} = O(h_y^2) \quad \text{und} & (4.69)\\ \|\mathcal{V}_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)} & = & O(h_x^2 h_y^2), & (4.70)\\ \|\mathcal{V}_{h_x}\|_{L^2(\Omega)} = O(h_x^2) & \text{und} & \|\mathcal{V}_{h_y}\|_{L^2(\Omega)} = O(h_y^2). & (4.71) \end{array}$$

Die Ungleichung (4.71) ist nichts anderes als die schon bewiesene Ungleichung (4.56). Die Ungleichung (4.69) folgt aus (4.35) und (4.56). Die Ungleichungen (4.68) und (4.70) werden wir nun in mehreren Schritten zeigen.

1. Schritt: Es gilt

$$\begin{array}{rcll} \left|\delta^1_{2h_x}(\tilde{u}_{2h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}_{2h_x}} & \tilde{<} & h_x, & (4.72)\\ \left|\delta^2_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}(\Omega)} & \tilde{<} & 1 \quad \textit{und} & (4.73)\\ \left|\delta^1_{2h_x}\mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}(\Omega)} & \tilde{<} & h_x & (4.74) \end{array}$$

für alle h_x.

Beweis: Wir wenden Teil *4.* des Satzes 4.2 auf die Gleichungen (3.2) und (4.30) an. Wir erhalten dann

$$\begin{array}{rcl} b^{xy}_{h_x}\left(\dfrac{\partial\delta^1_{h_x}(\tilde{u})}{\partial y}, v_h\right) & = & F^{xy}_{h_x}(u, v_h) + \displaystyle\int_\Omega f\frac{\partial\delta^1_{h_x}(v_h)}{\partial y}\, d\lambda =: R(v_h) \quad \text{und}\\ b^{xy}_{h_x}\left(\dfrac{\partial\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})}{\partial y}, v_h\right) & = & F^{xy}_{h_x}(u_{h_x,0}, v_h) + \displaystyle\int_\Omega f\frac{\partial\delta^1_{h_x}(v_h)}{\partial y}\, d\lambda =: R_{h_x}(v_h) \end{array}$$

für alle $v_h \in V^{h_x,0}_{N,N}$, wobei $\frac{\partial\delta^1_{h_x}(\tilde{u})}{\partial y} \in H^1(\Omega)$ und $\frac{\partial\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})}{\partial y} \in V^{h_x,0}_{N,N}$. Wegen (4.17), (4.46), (4.45) und (4.52) folgt

$$\begin{array}{l} \displaystyle\sup_{v_h\in V^{h_x,0}_{N,N}} \frac{|(R - R_{h_x})(v_h)|}{|v_h|_{H^1_{h_x}}} \tilde{<}\\ \tilde{<} \quad \sqrt{\|u - u_{h_x,0}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u - u_{h_x,0}\|^2_{H^{1,2}(\Omega)} + \|\delta^1_{h_x}(u - u_{h_x,0})\|^2_{H^1_{h_x}}} \tilde{<} h_x \end{array}$$

für alle h_x. Aus Strang's Lemma und Lemma 4.1 folgt daher

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\delta^1_{h_x}(\tilde{u} - \tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^1_{h_x}} \tilde{<} h_x \tag{4.75}$$

für alle h_x. Wegen $\delta^1_{2h_x} = (\tau_{-\frac{h_x}{2}} + \tau_{\frac{h_x}{2}}) \circ \delta^1_{h_x}$ schließt man

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} \delta^1_{2h_x}(\tilde{u} - \tilde{u}_{h_x,0}) \right|_{H^1_{2h_x}} \tilde{<} h_x$$

für alle h_x. Aus den letzten beiden Ungleichung erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung die Ungleichung (4.72). Die Ungleichung (4.73) erhält man in folgender Weise aus (4.75)

$$\begin{aligned}
\left|\delta^2_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}(\Omega)} &\tilde{<} \left|\delta^2_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}_{2h_x}} \leq \\
&\leq \left|\delta^2_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u})\right|_{H^{1,2}_{2h_x}} + \left|\delta^2_{h_x}(\tilde{u})\right|_{H^{1,2}_{2h_x}} \leq \\
&\leq h_x^{-1} \left|\delta^1_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u})\right|_{H^{1,2}_{h_x}} + \left|\delta^2_{h_x}(\tilde{u})\right|_{H^{1,2}_{2h_x}} \tilde{<} 1
\end{aligned}$$

für alle h_x. Wegen Lemma 4.3 folgt nun

$$\begin{aligned}
\left|\delta^1_{2h_x}\mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}(\Omega)} &\leq \left|\delta^1_{2h_x}\mathcal{H}_{h_x}\left(\frac{\partial \tilde{u}_{h_x,0}}{\partial y}\right)\right|_{H^1(\Omega)} \leq \\
\leq h_x 2\sqrt{3} \left|\delta^2_{h_x}\left(\frac{\partial \tilde{u}_{h_x,0}}{\partial y}\right)\right|_{H^1(\Omega)} &\leq h_x 2\sqrt{3} \left|\delta^2_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0})\right|_{H^{1,2}(\Omega)} \tilde{<} h_x
\end{aligned}$$

für alle h_x. Dies zeigt (4.74). *q.e.d.*

2. Schritt: Es gilt

$$\left|\delta^1_{2h_x}\mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\right|_{H^1(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y, \tag{4.76}$$

$$\left\|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x^2 h_y^2, \tag{4.77}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y^2, \tag{4.78}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y}H_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_2 \tilde{<} h_x^2 h_y \quad \textit{und} \tag{4.79}$$

$$\left\|\delta^1_{2h_x}\mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y^2, \tag{4.80}$$

$$\tag{4.81}$$

für alle h_x und alle h_y.

Beweis: Wir wenden Teil *3.* des Satzes 4.2 auf die Gleichungen (4.1) und (4.30) an. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
b^x\left(\delta^2_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0}), v_h\right) &= F^{xx}_{h_x}(u_{h_x,0}, v_h) + \int_\Omega f\delta^2_{h_x}(v_h)\, d\lambda =: R_{h_x}(v_h) \quad \text{und} \\
b^x\left(\delta^2_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,h_y}), v_h\right) &= F^{xx}_{h_x}(u_{h_x,h_y}, v_h) + \int_\Omega f\delta^2_{h_x}(v_h)\, d\lambda =: R_{h_x,h_y}(v_h)
\end{aligned}$$

für alle $v_h \in V_{D,D}^{h_x,h_y}$, wobei $\delta_{h_x}^2(\tilde{u}_{h_x,0}) \in V_{D,D}^{h_x,0}$ und $\delta_{h_x}^2(\tilde{u}_{h_x,h_y}) \in V_{D,D}^{h_x,h_y}$. Natürlich gilt $\|u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\|_{H^1(\Omega)} \tilde{<} h_y$ für alle h_x, h_y. Wegen (4.14) und (4.53) folgt

$$\begin{aligned} \sup_{v_h \in V_{D,D}^{h_x,h_y}} \frac{|(R_{h_x} - R_{h_x,h_y})(v_h)|}{\|v_h\|_{H^1(\Omega)}} &\tilde{<} \\ \tilde{<} \quad \sqrt{\|\delta_{h_x}^1(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\|_{H^1(\Omega)}^2} &\tilde{<} h_y \end{aligned}$$

für alle h_x, h_y. Daher folgt aus Lemma 4.1 und Strang's Lemma und (4.73)

$$\left\|\delta_{h_x}^2(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\right\|_{H^1(\Omega)} \tilde{<} h_y |\delta_{h_x}^2(\tilde{u})|_{H^{1,2}(\Omega)} \tilde{<} h_y \tag{4.82}$$

für alle h_x, h_y. Wegen Lemma 4.3 folgt

$$\left|\delta_{2h_x}^1 \mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\right|_{H^1(\Omega)} \leq h_x 2\sqrt{3} \left|\delta_{h_x}^2 \left(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y}\right)\right|_{H^1(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y$$

für alle h_x, h_y. Dies zeigt die Ungleichung (4.76).

Aus (4.15), (4.64) und (4.65) folgt

$$\begin{aligned} \sup_{v_h \in V_{D,D}^{h_x,0}} \frac{|(R_{h_x} - R_{h_x,h_y})(v_h)|}{\|v_h\|_{H_{h_x}^2}} &\tilde{<} \\ \tilde{<} \quad \sqrt{\|\delta_{h_x}^1(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)}^2} &\tilde{<} h_y^2 \end{aligned}$$

für alle h_x, h_y. Analog dem Beweis des *1.Schritt* in Abschnitt 4.3.2 zeigt man mit Hilfe des Lemmas von Aubin und Nitsche

$$\left\|\delta_{h_x}^2(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_y^2 \tag{4.83}$$

für alle h_x, h_y. Mit Hilfe von Lemma 4.3 folgt nun

$$\left\|\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \leq h_x^2 \left\|\delta_{h_x}^2 \left(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x^2 h_y^2 \tag{4.84}$$

für alle h_x, h_y. Dies zeigt (4.77).

Wegen Lemma 4.3 ergiebt sich mit (4.82)

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial}{\partial y} H_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq h_x^2 \left\|\frac{\partial}{\partial y}\delta_{h_x}^2(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \quad h_x^2 \left\|\delta_{h_x}^2(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y})\right\|_{H^1(\Omega)} \tilde{<} h_x^2 h_y \end{aligned}$$

für alle h_x, h_y. Dies zeigt (4.79).

Wieder mit Lemma 4.3 folgt aus (4.83)

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\sqrt{3} h_x \left\| \delta^2_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y}) \right\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x h_y^2$$

für alle h_x, h_y. Dies zeigt (4.78).

Aus Lemma 4.4 und Gleichung (4.84) ergibt sich

$$\left\| \delta^1_{2h_x} \mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{h_x} \left\| \mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}) \right\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\sim}{<} h_x h_y^2$$

für alle h_x, h_y. Dies zeigt (4.80). *q.e.d.*

3. Schritt: Die Ungleichung (4.68) ist richtig.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen vom *1.Schritt* in Abschnitt 4.3.2. Durch Anwendung des Teil *1.* des Satzes 4.2 auf die Gleichungen (4.60) erhält man

$$\begin{aligned}
b^x(\delta^1_{2h_x}(g_{h_x}), v_h) &= G_{h_x}(v_h) \quad \forall v_h \in V_{N,D}^{2h_x,h_y} \\
&\text{wobei} \quad G_{h_x}(v_h) := F^x_{h_x}(g_{h_x}, v_h) - a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0}), \delta^1_{2h_x}(v_h)) \quad \text{und} \\
b^x(\delta^1_{2h_x}(g_{h_x,h_y}), v_h) &= G_{h_x,h_y}(v_h) \quad \forall v_h \in V_{N,D}^{2h_x,h_y} \\
&\text{wobei} \quad G_{h_x,h_y}(v_h) := F^x_{h_x}(g_{h_x,h_y}, v_h) - a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,h_y}), \delta^1_{2h_x}(v_h))
\end{aligned}$$

für alle $v \in V_{N,D}^{2h_x,h_y}$. Durch partielle Integration, diskrete partielle Integration und mit Hilfe der Abschätzungen in Satz 4.2 erhält man

$$\begin{aligned}
&\sup_{z \in V_{N,D}^{2h_x,0}} \frac{(G_{h_x} - G_{h_x,h_y})(z)}{\|z\|_{H^1(\Omega)}} \stackrel{\sim}{<} \\
&\quad \stackrel{\sim}{<} \|g_{h_x} - g_{h_x,h_y}\|_{H^1(\Omega)} + \left| \delta^1_{2h_x} \mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y}) \right|_{H^1(\Omega)} + \left\| \mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y}) \right\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\sup_{z \in V_{N,D}^{2h_x,0}} \frac{(G_{h_x} - G_{h_x,h_y})(z)}{\|z\|_{H^2_{h_x}}} \stackrel{\sim}{<} \\
&\quad \stackrel{\sim}{<} \|g_{h_x} - g_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \delta^1_{2h_x} \mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y}) \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \mathcal{H}_{h_x}(\tilde{u}_{h_x,0} - \tilde{u}_{h_x,h_y}) \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aus (4.43), (4.61), (4.76), (4.50), (4.63) und (4.80) folgt daher

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in V_{N,D}^{2h_x,0}} \frac{(G_{h_x} - G_{h_x,h_y})(z)}{\|z\|_{H^1(\Omega)}} &\stackrel{\sim}{<} h_x h_y \quad \text{und} \\
\sup_{z \in V_{N,D}^{2h_x,0}} \frac{(G_{h_x} - G_{h_x,h_y})(z)}{\|z\|_{H^2_{h_x}}} &\stackrel{\sim}{<} h_x h_y^2
\end{aligned}$$

für alle h_x, h_y. Analog dem Beweis im *1.Schritt* in Abschnitt 4.3.2 erhält man mit dem Lemma von Strang und dem Lemma von Aubin und Nitsche

$$\|\delta^1_{2h_x}(g_{h_x} - g_{h_x,h_y})\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y^2$$

für alle h_x, h_y. Wegen Lemma 4.4 folgt somit

$$\|\tfrac{\partial}{\partial x}(g_{h_x} - g_{h_x,h_y})\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x h_y^2 \tag{4.85}$$

für alle h_x, h_y. Zusammen mit (4.78) folgt die Behauptung. *q.e.d.*

4. Schritt:
Die Ungleichung (4.70) ist richtig.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen vom *1.Schritt* in Abschnitt 4.3.2. Durch Vertauschung der x- und y-Richtung können wir annehmen, daß folgende Ungleichung gilt

$$h_y \leq h_x. \tag{4.86}$$

Natürlich gilt

$$\left\| u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y} \right\|_{H^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{falls} \quad h_y \to 0.$$

Aus Symmetriegründen folgt aus der Ungleichung (4.68)

$$\|\tfrac{\partial}{\partial y}\mathcal{V}_{h_x,h_y}\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x^2 h_y$$

für alle h_x, h_y. Es sei nun $h_y = 2^{-m}$. Dann folgt mit (4.79)

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial}{\partial y}(g_{h_x} - g_{h_x,h_y}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{V}_{h_x,2^{-j}} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_{h_x}\left(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \tilde{<} h_x^2 h_y \end{aligned}$$

für alle h_x, h_y. Zusammen mit (4.85) schließt man somit wegen (4.86)

$$\left\| g_{h_x} - g_{h_x,h_y} \right\|_{H^1(\Omega)} \tilde{<} h_x^2 h_y$$

für alle h_x, h_y. Die Gleichungen (4.41) kann man in folgender Weise schreiben

$$\begin{aligned} a(g_{h_x}, v_h) &= G_{h_x}(v_h) \quad \forall v_h \in V_{D,D}^{2h_x,h_y} \\ &\text{wobei} \quad G_{h_x}(v_h) := a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0}), v_h) \quad \text{und} \\ a(g_{h_x,h_y}, v_h) &= G_{h_x,h_y}(v_h) \quad \forall v_h \in V_{D,D}^{2h_x,h_y} \\ &\text{wobei} \quad G_{h_x,h_y}(v_h) =: a(\mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,h_y}), v_h). \end{aligned}$$

Durch partielle Integration und diskrete partielle Integration folgt mit (4.77)

$$\sup_{z \in V_{D,D}^{2h_x,0}} \frac{(G_{h_x} - G_{h_x,h_y})(z)}{\|z\|_{H^2_{h_x}}} \overset{\sim}{<} \left\| \mathcal{H}_{h_x}(u_{h_x,0} - u_{h_x,h_y}) \right\|_{L^2(\Omega)} \overset{\sim}{<} h_x^2 h_y^2$$

für alle h_x, h_y. Wegen (4.78) und (4.79) folgt mit (4.86)

$$\sup_{z \in V_{D,D}^{2h_x,0}} \frac{(G_{h_x} - G_{h_x,h_y})(z)}{\|z\|_{H^1(\Omega)}} \overset{\sim}{<} h_x^2 h_y \tag{4.87}$$

für alle h_x, h_y. Mit dem Lemma von Aubin und Nitsche schließt man somit

$$\left\| g_{h_x} - g_{h_x,h_y} \right\|_{L^2(\Omega)} \overset{\sim}{<} h_x^2 h_y^2$$

für alle h_x und h_y. Zusammen mit (4.77) folgt die Behauptung.

4.3.4 Beweis für den Fall nicht H_0^1-elliptischer Bilinearformen

Wegen der Gårdingschen Ungleichung ist a H_0^1-koerziv.

Zuerst ist es notwendig die Existenz und die Eindeutigkeit der Funktionen u_{h_x,h_y}, $u_{h_x,0}$ und u_{0,h_y} für genügend kleine h_x und h_y zu zeigen. Es ist bekannt, daß die Eindeutigkeit und die Existenz für genügend kleine Maschenweiten gesichert ist, falls die Frage der Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichungen (4.1), (4.30) und (4.31) äquivalent zur Frage der Existenz dieser Lösungen ist. Man betrachte hierzu den Beweis des Theorems (5.7.6.) in [7]. Die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ist kompakt. Hieraus folgt, daß auch die Einbettungen

$$\begin{aligned} V_{D,D}^{h_x,h_y} &\hookrightarrow L^2(\Omega), \\ V_{D,D}^{h_x,0} &\hookrightarrow L^2(\Omega) \quad \text{und} \\ V_{D,D}^{0,h_y} &\hookrightarrow L^2(\Omega) \end{aligned}$$

kompakt sind. Daher folgt die gesuchte Äquivalenz der Existenz und der Eindeutigkeit aus Satz 7.2.14. in [23].

Nun braucht man die Beweise in den Abschnitten 4.3.1 bis 4.3.3 nur noch etwas ändern. Alle Beweise, die sich auf eine der Bilinearformen b, b^x, b^y oder $b^x_{h_x}$ stützen, gelten weiterhin. Nur bei den Beweisen, die sich auf die Bilinearform a stützen, ist der Beweis etwas zu verändern. Theorem (5.7.6.) in [7] verallgemeinert Ceas's Lemma für allgemeine elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wie in Abschnitt 4.2.5 gezeigt, kann man in ähnlicher Art und Weise Strang's Lemma für allgemeine elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung verallgemeinern. Man sieht nun leicht, daß die Beweise in

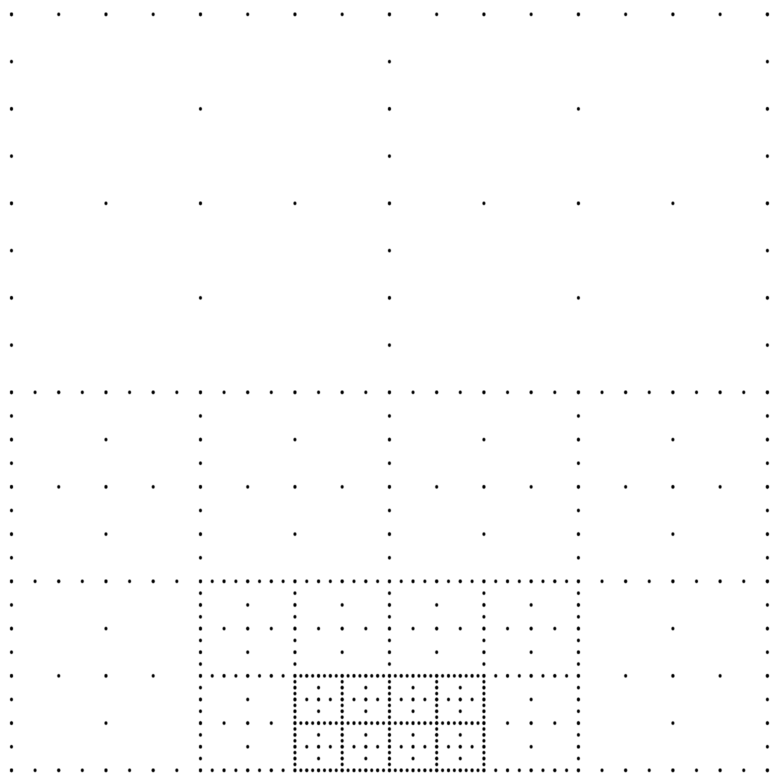


Abbildung 4.4: Das zusammengesetzte dünne Gitter $\mathcal{D}_4^{\mathcal{A}_4}$.

den Abschnitten 4.3.1 bis 4.3.3 nach diesen Änderungen auch für allgemeine elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelten, falls die Maschenweiten h_x und h_y klein genug sind.

4.4 Kombinationstechnik auf adaptiven dünnen Gittern

In [20] wird eine Kombinationstechnik auf adaptiven Gittern beschrieben. Die wesentliche Idee dieser adaptiven Kombinationstechnik ist die Verwendung von Maschenweiten h_x und h_y, welche sich mit dem Ort in x- bzw. y-Richtung verändern. Die Grundstruktur dieser Gitter ist aber immer die der regulären dünnen Gitter. Eine lokale Verfeinerung bei diesen Kombinationsgitter in der Nähe eines Punktes bewirkt daher auch immer eine Verfeinerung des Gitters fern von diesem Punkt. Dadurch benötigt die Adaptivitätsstrategie in [20] mehr Punkte als notwendig.

Wir wollen hier eine andere adaptive Kombinationstechnik beschreiben. Diese Kombinationstechnik läßt auch bei Singularitäten eine rein lokale Verfeinerung zu. Wir verwenden hierzu die in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen zusammengesetzten dünnen Gitter.

Wir wollen diese neue adaptive Kombinationstechnik zuerst für ganz allgemeine Differentialgleichungen beschreiben. Für das Laplace-Problem mit einer Randsingularität werden dann einige numerische Ergebnisse dargestellt.

Es sei $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}$ das adaptive zusammengesetzte dünne Gitter zur adaptiven Struktur $\mathcal{A}$ und zur Tiefe n. Des weiteren sei eine partielle Differentialgleichung auf dem Gebiet Ω^d gegeben. Für viele partielle Differentialgleichungen ist bekannt, wie man diese auf den zusammengesetzten vollen Gittern $\Omega_I^{\mathcal{A}}$ für $I \in \mathbb{N}^d$ diskretisieren kann (siehe z.B. [6] oder [26]). Es sei nun $u_{\Omega_I^{\mathcal{A}}}$ die Mehrfachfolge von Näherungslösungen auf den Gittern $\Omega_I^{\mathcal{A}}$. Diese Näherungslösungen seien auf ganz Ω^d definiert. Durch

$$u_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}}}^{\kappa} := \sum_{s=1}^{d} (-1)^{s+1} \binom{d-1}{s-1} \sum_{\substack{|I|=n+d-s \\ I \in \mathbb{N}^d}} u_{\Omega_I^{\mathcal{A}}}$$

erhält man nun wegen Satz 2.5 eine Näherungslösung auf dem zusammengesetzten dünnen Gitter $\Omega_I^{\mathcal{A}}$. Wichtig ist nun die Frage ob man mit dieser Kombinationslösung tatsächlich eine bessere Näherungslösung erhält. Eine exakter Beweis hierfür ist schwierig. Aus dem Beweis des Satzes 4.1 erkennt man jedoch, daß die Approximationseigenschaften der verwendeten Finite-Elemente-Räume wesentlich die Konvergenzeigenschaften der Kombinationslösung beeinflussen. Dies zeigt, daß die Kombinationsgitter dort eine geringe Maschenweiten haben müssen, wo die exakte Lösung weniger glatt ist. Wir werden dies nun an einem numerischen Beispiel genauer erklären.

Numerisches Beispiel: Laplace-Gleichung mit Randsingularität. Die Funktion

$$u(x, y) = Re((x - 0.5 + iy)^{\frac{1}{2}})$$

ist eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\triangle u = 0$$

auf dem Gebiet Ω mit inhomogenen Randbedingungen. An der Stelle $(0.5, 0)$ besitzt u eine Singularität. Daher ist u im Raum $H^{1.5-\epsilon}(\Omega)$ für jedes $0 < \epsilon < 1$ aber nicht mehr im Raum $H^{1.5}(\Omega)$ (siehe Theorem 1.4.5.3 in [21]). Wir berechnen nun zwei verschiedene Kombinationslösungen für dieses Problem. Einmal auf den regulären dünnen Gittern $\mathcal{D}_n$ und dann auf den zusammengesetzten dünnen Gittern $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_n}$. Die Kombinationslösung auf den regulären dünnen Gittern $\mathcal{D}_n$ ist die Kombinationslösung auf dem zusammengesetzten dünnen Gittern $\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_0}$ mit der trivialen adaptiven Struktur $\mathcal{A}_0 := \{(0.5, 0.5)\}$.

Um die Konvergenz der adaptiven Kombinationstechnik genau untersuchen zu können verwenden wir für die adaptive Kombinationslösung folgende adaptive Struktur:

Es sei $\mathcal{A}_n$ die kleinste adaptive Struktur, so daß $(0.5-2^{-n},0),(0.5+2^{-n},0)\in \Omega^{\mathcal{A}_n}_{(1,1)}$.

Die adaptive Struktur $\mathcal{A}_n$ ist also sehr fein in der Nähe der Singularität der exakten Lösung. Abbildung 4.4 zeigt das zusammengesetzte dünne Gitter $\mathcal{D}_4^{\mathcal{A}_4}$. Zur Berechnung der Näherungslösungen auf den Kombinationsgittern Ω_I beziehungsweise $\Omega_I^{\mathcal{A}_n}$ verwenden wir die Finite-Elemente-Diskretisierung mit bilinearen finiten Elementen. Wie oben beschrieben erhalten wir dadurch die Kombinationslösungen

$$u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_0}} \quad \text{und} \quad u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_n}}.$$

Man sieht, daß die Kombinationslösung $u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_0}}$ analog der Kombinationslösung $u^\kappa_{h,1}$ in Abschnitt 4.1 definiert ist.

Wir werden nun die Fehler der Kombinationslösungen in drei verschiedenen Normen messen. Zum einen betrachten wir den punktweisen Fehler im Mittelpunkt

$$e_n^{Mitte} := |u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_0}}(0.5,0.5)-u(0.5,0.5)| \quad \text{und} \quad e_{n,adaptiv}^{Mitte} := |u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_0}}(0.5,0.5)-u(0.5,0.5)|$$

und zum anderen wollen wir eine diskrete L^2- und eine diskrete L^∞-Norm verwenden. Zur Berechnung des Fehlers auf einem adaptiven dünnen Gitter ist es nicht sinnvoll eine diskrete L^2-Norm wie im Abschnitt 2.4 zu verwenden. Dann würde man den Fehler in der Nähe der Singularität zu stark gewichten. Deswegen werden wir den Fehler auf dem mittleren Kombinationsgitter berechnen, was auch algorithmisch sehr einfach ist. Das mittlere Kombinationsgitter ist das Gitter

$$\Omega^{\mathcal{A}_0}_{([\frac{n+1}{2}],[\frac{n+1}{2}])} \quad \text{beziehungsweise} \quad \Omega^{\mathcal{A}_n}_{([\frac{n+1}{2}],[\frac{n+1}{2}])}.$$

Wir berechnen somit die Fehler

$$\begin{aligned} e_n^2 &:= \left\| I_{\Omega^{\mathcal{A}_0}_{([\frac{n+1}{2}],[\frac{n+1}{2}])}}(u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_0}}-u)\right\|_{L^2(\Omega)} \quad , \quad & e_{n,adaptiv}^2 &:= \left\| I_{\Omega^{\mathcal{A}_n}_{([\frac{n+1}{2}],[\frac{n+1}{2}])}}(u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_n}}-u)\right\|_{L^\infty(\Omega)}, \\ e_n^\infty &:= \left\| I_{\Omega^{\mathcal{A}_0}_{([\frac{n+1}{2}],[\frac{n+1}{2}])}}(u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_0}}-u)\right\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad & e_{n,adaptiv}^\infty &:= \left\| I_{\Omega^{\mathcal{A}_n}_{([\frac{n+1}{2}],[\frac{n+1}{2}])}}(u^\kappa_{\mathcal{D}_n^{\mathcal{A}_n}}-u)\right\|_{L^\infty(\Omega)}, \end{aligned}$$

wobei $I_{...}$ der durch Gleichung (2.35) definierte Interpolationsoperator ist. Die Fehler der Kombinationslösung auf den regulären dünnen Gittern sind in der Tabelle 4.1 dargestellt während die Fehler der Kombinationslösung auf den zusammengesetzten dünnen Gittern in der Tabelle 4.2 abgebildet sind. Die Abbildungen 4.5, 4.6 und 4.7 zeigen die dazugehörigen graphischen Darstellungen der Fehler. Hierbei ist folgendes zu beachten. Die Fehler in der diskreten L^2- und diskreten L^∞-Norm schwanken sehr stark und hängen davon

Fehler im Mittelpunkt		
n	e_n^{Mitte}	$\frac{e_{n-1}^{Mitte}}{e_n^{Mitte}}$
2	$7.56e-03$	
3	$3.42e-03$	2.2
4	$5.74e-04$	5.9
5	$1.20e-03$	0.5
6	$7.62e-04$	1.6
7	$4.13e-04$	1.8
8	$1.8e-04$	2.3

Diskrete L^2-Norm		
n	e_n^2	$\sqrt{\frac{e_{n-2}^2}{e_n^2}}$
2	$2.52e-03$	
3	$4.85e-03$	
4	$6.55e-04$	2.0
5	$1.83e-03$	1.6
6	$2.75e-04$	1.5
7	$6.55e-04$	1.7
8	$1.0e-04$	1.7

Diskrete L^∞-Norm		
n	e_n^∞	$\sqrt{\frac{e_{n-2}^\infty}{e_n^\infty}}$
2	$7.56e-03$	
3	$2.35e-02$	
4	$3.59e-03$	1.5
5	$1.68e-02$	1.2
6	$2.34e-03$	1.2
7	$1.19e-02$	1.2
8	$1.6e-03$	1.2

Tabelle 4.1: Konvergenz der Kombinationslösung auf regulären dünnen Gittern

Fehler im Mittelpunkt		
n	e_n^{Mitte}	$\frac{e_{n-1}^{Mitte}}{e_n^{Mitte}}$
2	$5.26e-03$	
3	$8.75e-04$	6.0
4	$3.20e-04$	2.7
5	$9.61e-05$	3.3
6	$3.35e-05$	2.9
7	$1.13e-05$	3.0
8	$3.81e-06$	3.0

Diskrete L^2-Norm		
n	e_n^2	$\sqrt{\frac{e_{n-2}^2}{e_n^2}}$
2	$1.6e-03$	
3	$9.93e-04$	
4	$1.78e-04$	3.0
5	$6.45e-05$	3.9
6	$1.82e-05$	3.1
7	$9.35e-06$	2.6
8	$3.40e-06$	2.8

Diskrete L^∞-Norm		
n	e_n^∞	$\sqrt{\frac{e_{n-2}^\infty}{e_n^\infty}}$
2	$5.26e-03$	
3	$1.21e-02$	
4	$2.66e-03$	1.4
5	$4.22e-03$	1.69
6	$9.65e-04$	1.66
7	$1.49e-03$	1.68
8	$3.41e-04$	1.68

Tabelle 4.2: Konvergenz der Kombinationslösung auf zusammengesetzten dünnen Gittern

ab, ob n gerade oder ungerade ist. Deswegen wurden in Abbildung 4.6 und 4.7 nur die Ergebnisse jeder zweiten Näherungslösung aufgetragen. Man sieht, daß die adaptive Kombinationslösung wesentlich besser konvergiert als die nicht adaptive Kombinationslösung. Aus der Tabelle 4.2 erkennt man, daß die adaptive Kombinationslösung $u^{\kappa}_{\mathcal{D}_n^{A_0}}$ im Mittelpunkt und in der diskreten L^2-Norm mindestens mit der Ordnung $O(h^{1.5})$ gegen die exakte Lösung konvergiert. Dies ist ein sehr zufriedenstellendes Ergebnis, da man zur Berechnung der Kombinationslösung wesentlich weniger Punkte benötigt als zur Berechnung der entsprechenden Vollgitterlösung.

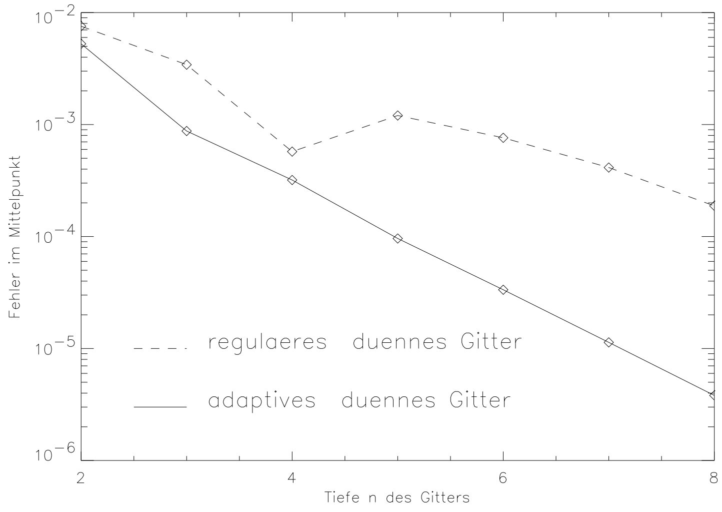


Abbildung 4.5: Fehler im Mittelpunkt

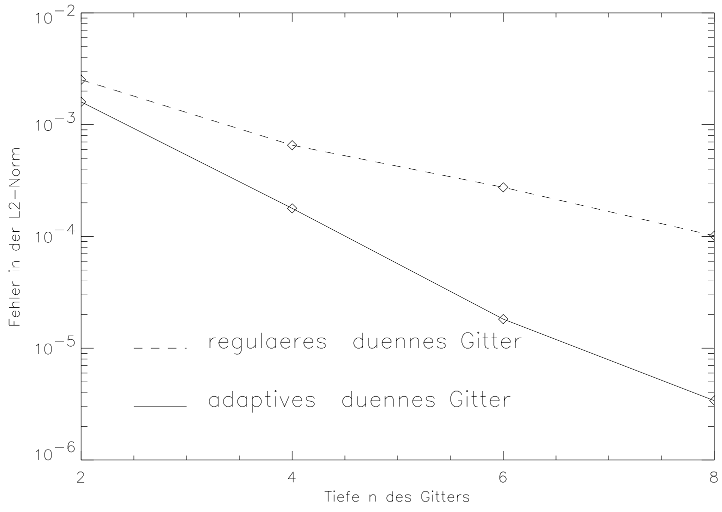


Abbildung 4.6: Fehler in einer diskreten L^2-Norm

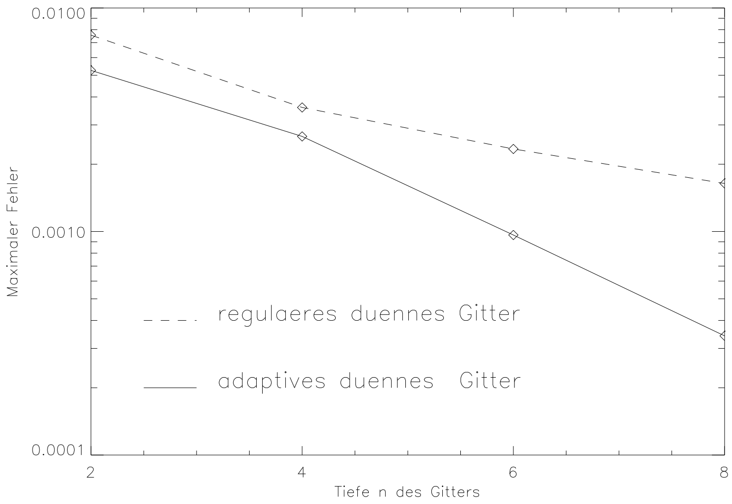


Abbildung 4.7: Fehler in einer diskreten L^∞-Norm

Kapitel 5

Galerkin-Ansatz

5.1 Diskretisierung variabler Koeffizienten

5.1.1 Problematik variabler Koeffizienten

Bei der Diskretisierung variabler Koeffizienten mit dünnen Gittern entsteht ein Problem, das bei vollen Gittern nicht auftritt. Dieses Problem hängt mit der Berechnung der Integrale in der Bilinearform zusammen. Daher könnte man meinen, daß dieses Problem ein Problem der numerischen Integration bei dünnen Gittern ist. Das ist jedoch nicht richtig. Um dies zu verdeutlichen, beschränken wir uns nun in diesem Abschnitt auf variable Koeffizienten, die Polynome sind. Unter Vernachlässigung von Rundungsfehlern lassen sich Polynome immer exakt integrieren. Daher gibt es nun nicht mehr das Problem der numerischen Integration. Außerdem beschränken wir uns in diesem Abschnitt auf den 2-dimensionalen Fall $d = 2$.

Die Standard-Galerkin-Diskretisierung der elliptischen Differentialgleichung (3.2) ist die Lösung $u_h \in \overset{\circ}{V}_{\mathcal{D}_n}$ der schwachen Gleichung

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \text{für alle} \quad v_h \in \overset{\circ}{V}_{\mathcal{D}_n}. \tag{5.1}$$

Das Problem bei dieser Diskretisierung ist nun, daß sich das entstehende Gleichungssystem nicht effizient lösen läßt. Das heißt, daß man mehr als $O(N)$ Operationen benötigt um eine genügend genaue Näherungslösung für u_h zu erhalten. Hierbei ist $N := |\overset{\circ}{V}_{\mathcal{D}}|$ die Größe des Finite-Elemente-Raumes. Der Grund hierfür ist, daß es nicht möglich ist eine Matrixoperation in $O(N)$ Operationen auszuführen. Dies rührt daher, weil man zur Abspeicherung der Steifigkeitsmatrix mehr als $O(N)$ Speicherplätze benötigt. Mit einer Abspeicherung der Steifigkeitsmatrix ist hier nicht eine explizite elementweise Abspeicherung der Steifigkeitsmatrix gemeint, sondern irgendeine beliebige, auch implizite Abspeicherung. Betrachtet man zum Beispiel nur die Poisson-Gleichung, so hat man keine

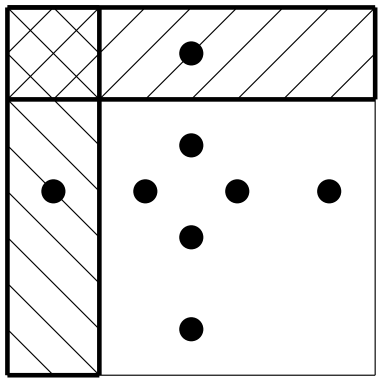


Abbildung 5.1: Die Gitterpunkte $(x, 0.5)$, $(0.5, y)$ für $x, y \in \mathcal{T}_n$ und die Träger der zugehörigen Basisfunktionen

Probleme mit der Abspeicherung der Steifigkeitsmatrix, da die Struktur dieser Steifigkeitsmatrix sehr gut bekannt ist und man diese daher normalerweise direkt im Algorithmus einbaut. Sucht man jedoch einen Algorithmus, der bei einer Änderung der variablen Koeffizienten und damit auch bei einer Änderung der Steifigkeitsmatrix gleich bleibt, so muß die Steifigkeitsmatrix irgendwie abgespeichert werden. Bei vollen Gittern ist dies kein Problem, da man zum Beispiel bei bilinearen finiten Elementen die ganze Steifigkeitsmatrix in Neun-Punkte-Sternen abspeichern kann. Die Größe des benötigten Speicherplatzes zur Abspeicherung der Steifigkeitsmatrix ist die Dimension der Mannigfaltigkeit der betrachteten Steifigkeitsmatrizen. Das Gleichungssystem 5.1 läßt sich also nicht effizient lösen, wenn die Dimension der Mannigfaltigkeit der Steifigkeitsmatrizen größer als $O(N)$ ist. Dies soll nun bewiesen werden.

Es sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt und $h = 2^{-n}$ die Maschenweite. Die Dimension des Raumes $\overset{\circ}{V}_{\mathcal{D}_n}$ ist

$$N = O(2^n n).$$

Die Menge der Punkte der Tiefe n in einem 1-dimensionalen Baum sei

$$\mathcal{T}_n := \{x \in \mathcal{P} |\ T(x) = n\}.$$

Natürlich ist $|\mathcal{T}_n| = O(2^n)$. Zu einer Steifigkeitsmatrix S betrachten wir die Teilmatrix

$$S' := \left(a(v^{lin}_{(x,0.5)}, v^{lin}_{(0.5,y)})\right)_{x,y \in \mathcal{T}_n}.$$

Die hierbei verwendeten Basisfunktionen sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Man erkennt, daß die Flächen

$$\Omega_{x,y} := \mathrm{supp}(v^{lin}_{(x,0.5)}) \cap \mathrm{supp}(v^{lin}_{(0.5,y)})$$

alle disjunkt sind. Das Steifigkeitselement $a(v^{lin}_{(x,0.5)}, v^{lin}_{(0.5,y)})$ hängt aber nur vom Integral über dem Gebiet $\Omega_{x,y}$ ab. Wegen des Satzes von Weierstraß sind die Polynome dicht im Raum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Dies zeigt, daß die Dimension der Mannigfaltigkeit der Matrizen S' mindestens

$$|\mathcal{T}_n|^2 = O(2^{2n})$$

ist. Für genügend große n ist $2^{2n} \geq (2^n n)^{1.5} = O(N^{1.5})$. Daher ist die Dimension der Mannigfaltigkeit der Steifigkeitsmatrizen mindestens $O(N^{1.5})$.

Hiermit ist gezeigt, daß sich die Gleichung (5.1) nicht effizient lösen läßt. Ein Ausweg aus dieser Problematik ist eine Approximation der Bilinearform a. Eine Approximation der Bilinearform erhält man durch Interpolation der variablen Koeffizienten (siehe Abschnitt 5.1.2) und eine andere durch die Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität (siehe Abschnitt 5.1.4).

5.1.2 Interpolation der variablen Koeffizienten

Es sei $\mathcal{D}$ ein abstraktes dünnes Gitter. Eine erste Approximation der Bilinearform a erhält man durch Interpolation der variablen Koeffizienten mit einem stückweise konstanten Dünngitterinterpolanten. Die hieraus entstehende Bilinearform $a_{\mathcal{D}}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{D}} : H^1(\Omega^d) \times H^1(\Omega^d) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, v) &\mapsto \int\limits_{\Omega^d} (\nabla u)^T I^{kon}_{\mathcal{D}^d_n}(B) \nabla v + \langle \nabla u, I^{kon}_{\mathcal{D}^d_n}(\underline{c}) \rangle v + \\ &\qquad I^{kon}_{\mathcal{D}^d_n}(c_0)\, u\, v d\lambda. \end{aligned}$$

Eine effiziente Galerkin-Diskretisierung der elliptischen Differentialgleichung (3.2) ist die Lösung $u_{\mathcal{D}} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}}$ der schwachen Gleichung

$$a_{\mathcal{D}}(u_{\mathcal{D}}, v_{\mathcal{D}}) = \int_{\Omega^d} f v_{\mathcal{D}} \; d\lambda \quad \text{für alle} \quad v_{\mathcal{D}} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}}. \tag{5.2}$$

Um diese Diskretisierung theoretisch besser untersuchen zu können, verwenden wir nun die regulären dünnen Gitter $\mathcal{D}^d_n$. Zur Vereinfachung schreiben wir $a_h := a_{\mathcal{D}_n}$, wobei $h = 2^{-n}$ ist. Die Lösung der Gleichung (5.2) ist nun die Lösung $u_h \in \mathring{V}_{\mathcal{D}^d_n}$ der schwachen Gleichung

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega^d} f v_h \; d\lambda \quad \text{für alle} \quad v_h \in \mathring{V}_{\mathcal{D}^d_n}. \tag{5.3}$$

Hier ist natürlich die Frage zu stellen, ob die Gleichung 5.3 überhaupt eine Lösung $u_h \in \mathring{V}_{\mathcal{D}^d_n}$ besitzt. Da wir nicht voraussetzen, daß a H^1_0-elliptisch ist, ist diese Frage nicht so einfach zu beantworten. Gerade bei einem konvektionsdominanten Problem muß dies nicht unbedingt der Fall sein. Für genügend kleine Maschenweiten h besitzt die Gleichung (5.3) jedoch immer eine Lösung. Dies wird nun gezeigt.

Zuerst sind einige Vorbereitungen notwendig. Mit Hilfe von Satz 2.3 erhält man folgendes leicht zu beweisendes Lemma.

Lemma 5.1 *Man nehme an, daß alle Komponenten von B, $\underline{c}$ und c_0 in $\mathcal{C}^{G,d}(\Omega^d)$ enthalten sind. Dann gibt es eine Konstante $C_K > 0$, so daß gilt*

$$|a(u,v) - a_h(u,v)| \leq h(\log h^{-1})^{d-1} C_K \|u\|_{H^1(\Omega^d)} \|v\|_{H^1(\Omega^d)} \quad \forall v,u \in H^1(\Omega^d).$$

Hieraus erhält man leicht:

Lemma 5.2 *Man nehme an, daß alle Komponenten von B, $\underline{c}$ und c_0 in $\mathcal{C}^{G,d}(\Omega^d)$ enthalten sind. Dann gibt es eine Konstante $\beta' > 0$, so daß gilt*

$$|a_h(u,v)| \leq \beta' \|u\|_{H^1(\Omega^d)} \|v\|_{H^1(\Omega^d)} \quad \forall v,u \in H^1(\Omega^d).$$

Wegen der Gårdingschen Ungleichung (siehe Theorem 5.6.8. in [7]) gibt es eine Konstante $K < \infty$ so daß gilt

$$a(v,v) + K\|v\|_{L^2(\Omega^d)} \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|^2_{H^1(\Omega^d)} \quad \forall v \in H^1(\Omega^d), \tag{5.4}$$

wobei α die Konstante in (3.1) ist. Genaugenommen wurde diese Ungleichung in [7] nur für symmetrische B bewiesen. Aus dem Beweis erkennt man aber sofort, daß die Gårdingsche Ungleichung auch für unsymmetrische B gilt. Die Gårdingsche Ungleichung gilt auch für die Bilinearform a_h, falls h klein genug ist. Das nächste Lemma zeigt eine in h gleichmäßige Gårdingsche Ungleichung.

Lemma 5.3 (Gleichmäßige Gårdingsche Ungleichung) *Man nehme an, daß alle Komponenten von B, $\underline{c}$ und c_0 in $\mathcal{C}^{G,d}(\Omega^d)$ enthalten sind. Außerdem seien C_K, K und α die Konstanten aus Lemma 5.1 beziehungsweise aus Ungleichung (5.4) und (3.1). Falls h so klein ist, daß $h(\log h^{-1})^{d-1} C_K \leq \frac{\alpha}{4}$ gilt, dann folgt*

$$a_h(v,v) + K\|v\|^2_{L^2} \geq \frac{\alpha}{4} \|v\|^2_{H^1} \quad \forall v \in H^1(\Omega^d).$$

Beweis: Wegen Lemma 5.1 gilt

$$\begin{aligned} a_h(v,v) + K\|v\|^2_{L^2} &\geq a(v,v) - |a(v,v) - a_h(v,v)| + K\|v\|^2_{L^2} \geq \\ &\geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{H^1} - h(\log h^{-1})^{d-1} C_K \|v\|^2_{H^1} \geq \frac{\alpha}{4}\|v\|^2_{H^1}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Schließlich benötigen wir noch das Lemma von Aubin und Nitsche. Bei dünnen Gittern ist der Beweis dieses Lemmas etwas anders als bei vollen Gittern. Der Beweis des folgenden Lemmas verläuft ganz analog dem Beweis von Theorem 6 in [33].

Lemma 5.4 (Aubin und Nitsche) *Man nehme an, daß alle Komponenten von B, $\underline{c}$ und c_0 in $\mathcal{C}^{G,d+1}(\Omega^d)$ enthalten sind. Des weiteren gelte die H^2-Regularität des adjungierten Problems. u_h sei eine Lösung der Gleichung (5.3). Dann gibt es eine von h unabhängige Konstante C_{AN}, so daß gilt*

$$\|u-u_h\|_{L^2} \leq C_{AN}\left(h^{\frac{1}{d}}\|u-u_h\|_{H^1} + h^{1+\frac{1}{d}}(\log h^{-1})^{d-1}\|u\|_{H^2}\right).$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Existenz und Konvergenz der diskreten Lösung $u_h \in \overset{\circ}{V}_{\mathcal{D}^d_n}$ der Gleichung (5.3) beweisen.

Satz 5.1 (Allgemeiner Existenz und Konvergenzsatz) *Man nehme an, daß alle Komponenten von B, $\underline{c}$ und c_0 in $\mathcal{C}^{G,d+1}(\Omega^d)$ enthalten sind. Des weiteren gelte die H^2-Regularität des Problems und des adjungierten Problems. Dann gibt es eine Maschenweite h_0, so daß die Gleichung (5.3) für alle $h < h_0$ genau eine Lösung $u_h \in \overset{\circ}{V}_{\mathcal{D}^d_n}$ besitzt.*

Falls $u \in H^{G,d+1}(\Omega^d)$, dann konvergiert u_h gegen die Lösung u der Gleichung (3.2) mit der Ordnung

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{H^1} &= O\left(h(\log h^{-1})^{d-1}\right) \quad \textit{und}\\ \|u-u_h\|_{L^2} &= O\left(h^{1+\frac{1}{d}}(\log h^{-1})^{d-1}\right).\end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis folgt den Ideen des Beweises von (5.7.6.) in [7] und den Ideen des Beweises von Strang's Lemma 4.14 in [22]. Außerdem sind noch einige für dünne Gitter spezifische Vorgehensweisen notwendig.

Nehmen wir nun an, es gibt eine Lösung $u_h \in \overset{\circ}{V}_{\mathcal{D}^d_n}$ der Gleichung (5.3). Es sei h so klein, daß $h(\log h^{-1})^{d-1}C_K \leq \frac{\alpha}{4}$ gilt. Dann folgt wegen Lemma 5.3 und 5.1 für alle $z_h \in \overset{\circ}{V}_{\mathcal{D}^d_n}$

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{4}\|z_h-u_h\|^2_{H^1} \leq a_h(z_h-u_h, z_h-u_h) + K\|z_h-u_h\|^2_{L^2} =\\
&= a_h(z_h, z_h-u_h) - a(u, z_h-u_h) + K\|z_h-u_h\|^2_{L^2} \leq\\
&= a_h(z_h, z_h-u_h) - a(z_h, z_h-u_h) - a(u-z_h, z_h-u_h) + K\|z_h-u_h\|^2_{L^2} \leq\\
&\leq \|z_h\|_{H^1}C_K h(\log h^{-1})^{d-1}\|z_h-u_h\|_{H^1} + \beta\|u-z_h\|_{H^1}\|z_h-u_h\|_{H^1} +\\
&\quad +K\|z_h-u_h\|^2_{L^2} \leq\\
&\leq \left(\|z_h\|_{H^1}C_K h(\log h^{-1})^{d-1} + \beta\|u-z_h\|_{H^1} + K\|z_h-u_h\|_{L^2}\right)\|z_h-u_h\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$\|z_h-u_h\|_{H^1} \leq \frac{4}{\alpha}\left(\|z_h\|_{H^1}C_K h(\log h^{-1})^{d-1} + \beta\|u-z_h\|_{H^1} + K\|z_h-u_h\|_{L^2}\right).$$

Wegen Lemma 5.4, folgt daher

$$\begin{aligned}
&\|u-u_h\|_{H^1} \leq \|u-z_h\|_{H^1} + \|z_h-u_h\|_{H^1} \leq\\
&\leq \|u-z_h\|_{H^1}(1+\tfrac{4}{\alpha}\beta) + \tfrac{4}{\alpha}C_K h(\log h^{-1})^{d-1}(\|u-z_h\|_{H^1} + \|u\|_{H^1}) +\\
&\quad +\tfrac{4}{\alpha}K\left(C_{AN}\left(h^{\frac{1}{d}}\|u-u_h\|_{H^1} + h^{1+\frac{1}{d}}(\log h^{-1})^{d-1}\|u\|_{H^2}\right) + \|u-z_h\|_{H^1}\right).
\end{aligned}$$

Falls $\frac{4}{\alpha}KC_{AN}h^{\frac{1}{d}} < 0.5$ ist, dann gibt es eine Konstante C', so daß gilt

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C'(\|u - z_h\|_{H^1} + h(\log h^{-1})^{d-1}\|u\|_{H^2}). \tag{5.5}$$

Es sei nun $z_h := I_{h_m}^{lin}(u)$ der Vollgitterinterpolant zur Maschenweite h_m, wobei $h_m := 2^{-[\frac{n}{d}]}$. $[\frac{n}{d}]$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner gleich $\frac{n}{d}$ ist. Daher folgt $h_m < h^{\frac{1}{d}}2^d$ und $z_h \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n^d}$. Aus den Interpolationseigenschaften des Vollgitterinterpolationsoperators $I_{h_m}^{lin}$ folgt somit für eine Konstante $C_{int} > 0$

$$\|u - z_h\|_{H^1} \leq C_{int}h^{\frac{1}{d}}\|u\|_{H^2}.$$

Zusammen mit (5.5) folgt daher

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C'(C_{int}h^{\frac{1}{d}}\|u\|_{H^2} + h(\log h^{-1})^{d-1}\|u\|_{H^2}). \tag{5.6}$$

Für das Gleichungssystem (5.3) gilt die Fredholm-Alternative, da es ein endlich dimensionales Gleichungssystem ist. Das heißt, es besitzt entweder für alle $f \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung oder es gibt für $f = 0 \in L^2(\Omega)$ einen mindestens 1-dimensionalen Unterraum von Lösungen u_h gibt. Die zweite Alternative scheidet wegen der Ungleichung (5.6) jedoch aus. Daher gibt es genau eine Lösung des Gleichungssystems (5.3) falls $KC_{AN}h^{\frac{1}{d}} < 0.5$ und $h(\log h^{-1})^{d-1}C_K \leq \frac{\alpha}{4}$ gilt.

Es sei nun $u \in H^{G,d+1}(\Omega^d)$. Wir setzen nun $z_h = I_{\mathcal{D}_n}^{lin}(u)$. Dann folgt aus Satz 2.4 und (5.5)

$$\|u - u_h\|_{H^1} \overset{\sim}{<} h(\log h^{-1})^{d-1}\|u\|_{H^{G,d+1}}$$

für alle $u \in H^{G,d+1}(\Omega^d)$ und alle $h = 2^{-n}$ mit $KC_{AN}h^{\frac{1}{d}} < 0.5$ und $h(\log h^{-1})^{d-1}C_K \leq \frac{\alpha}{4}$.

Die Konvergenz in der L^2-Norm folgt aus Lemma 5.4. **q.e.d.**

5.1.3 Aufspaltung der Steifigkeitsmatrix in einen Dünn- und Vollgitteranteil

Die in Abschnitt 5.1.2 vorgestellte Diskretisierung führt zu einer etwas aufwendigeren Abspeicherung der Steifigkeitsmatrix als bei vollen Gittern. Bei 2-dimensionalen vollen Gittern kann man die Steifigkeitsmatrix mit je einem Neun-Punkte-Stern je Punkt abspeichern. Bei dünnen Gittern benötigt man etwas mehr als doppelt so viel Speicher je Punkt. Ein weiterer Nachteil der in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Diskretisierung ist, daß die Implementierung einer Matrixmultiplikation bei variablen Koeffizienten aufwendiger ist als beim Poisson-Problem. In Abschnitt 5.1.4 wird eine Dünngitterdiskretisierung variabler Koeffizienten für den 2-dimensionalen Fall beschrieben, die diese Probleme vermeidet.

Zuerst wollen wir die Steifigkeitsmatrix genauer untersuchen. Es seien $\alpha, \beta \in \{0,1\}^d$ Multiindizes mit $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ und es sei $q_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^d)$ der zu α, β gehörige variable Koeffizient. Hiermit ist gemeint, daß die $q_{\alpha\beta}$ so gewählt wurden, daß für die Bilinearformen

$$a_{\alpha\beta}(w,v) := \int_{\bar{\Omega}^d} D^\alpha w q_{\alpha\beta} D^\beta v \; d\lambda \quad \text{für} \quad w, v \in V_{\mathcal{D}}$$

gilt

$$a = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} a_{\alpha\beta}.$$

$\mathcal{D}$ ist hier natürlich ein abstraktes dünnes Gitter. Die Bilinearformen $a_{\alpha\beta}$ kann man in zwei Teile zerlegen — einen Vollgitteranteil und einen Dünngitteranteil. Hierzu definieren wir den Träger einer hierarchischen Basisfunktion v durch

$$\operatorname{supp}(v) := \left\{ z \in \bar{\Omega}^d \middle| v(z) \neq 0 \right\}.$$

Man beachte, daß diese Definition eines Trägers nicht zu einer abgeschlossenen Menge führt. Die Menge der semi-orthogonalen Punkte eines abstrakten dünnen Gitters sei nun

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathcal{D}} \quad := \quad \Big\{ (z,z') \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} \quad | \quad & \operatorname{supp}(v_z^{lin}) \cap \operatorname{supp}(v_{z'}^{lin}) \neq \emptyset \quad \text{und} \\ & \operatorname{supp}(v_z^{lin}) \cap \operatorname{supp}(v_{z'}^{lin}) \cap \mathcal{D} = \emptyset \Big\}. \end{aligned}$$

Für den 2-dimensionalen Fall wird diese Menge in Abschnitt 5.1.4 genauer beschrieben (siehe Abbildung 5.2). Im folgenden sei immer $w = \sum_{z\in\mathcal{D}} \lambda_z v_z^{lin}$ und $v = \sum_{z'\in\mathcal{D}} \mu_{z'} v_{z'}^{lin}$. Die Bilinearform $a_{\alpha\beta}$ läßt sich nun in zwei Teile zerlegen.

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta}^{voll} + a_{\alpha\beta}^{dünn}, \quad \text{wobei} \\ a_{\alpha\beta}^{voll}(w,v) &= \int_{\Omega^d} \sum_{(z,z')\in\mathcal{D}\times\mathcal{D}\setminus\mathcal{O}_{\mathcal{D}}} \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} \; q_{\alpha\beta} D^\beta v_{z'}^{lin} \; d\lambda \quad \text{für} \quad w, v \in V_{\mathcal{D}}, \\ a_{\alpha\beta}^{dünn}(w,v) &= \int_{\Omega^d} \sum_{(z,z')\in\mathcal{O}} \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} \; q_{\alpha\beta} D^\beta v_{z'}^{lin} \; d\lambda \quad \text{für} \quad w, v \in V_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$a^{dünn} := \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} a_{\alpha\beta}^{dünn} \quad \text{und} \quad a^{voll} := \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} a_{\alpha\beta}^{voll},$$

dann erhält man wieder

$$a = a^{dünn} + a^{voll}.$$

Die Namen Dünn- und Vollgitteranteil rühren daher, daß der Dünngitteranteil $a^{dünn}$ die Null-Bilinearform wird, falls $\mathcal{D}$ zu einem uniformen vollen Gitter entartet. Außerdem kann man die Steifigkeitsmatrix des Vollgitteranteils a^{voll} wie bei vollen Gittern mit Hilfe von 3^d-Sternen beschreiben. Für den 2-dimensionalen Fall wird dies in Abschnitt 5.3.2 erklärt. Man kann leicht nachrechnen, daß für das Poisson-Problem der Dünngitteranteil genau dann verschwindet, wenn für die Dimension d des Problems gilt $d \leq 2$.

In Abschnitt 5.1.2 wurden die Bilinearformen $a_{\alpha\beta}^{voll}$ und $a_{\alpha\beta}^{dünn}$ dadurch diskretisiert, daß der variable Koeffizient $q_{\alpha\beta}$ durch einen stückweise konstanten Dünngitterinterpolanten ersetzt wurde. Ist dies aber wirklich notwendig oder ist auch eine einfachere Approximation des variablen Koeffizienten $q_{\alpha\beta}$ möglich? In der Bilinearform $a_{\alpha\beta}^{voll}$ führt eine wesentlich einfachere Approximation des variablen Koeffizienten sicherlich zu einer schlechteren Konvergenzordnung, da die zu $a_{\alpha\beta}^{voll}$ gehörige Matrix die Diagonalelemente der Steifigkeitsmatrix enthält, wenn man als Basis die hierarchische Basis verwendet. Außerdem würde eine schlechtere Approximation von $q_{\alpha\beta}$ in der Bilinearform $a_{\alpha\beta}^{voll}$ zu keinen wesentlichen algorithmischen Vereinfachungen führen, da die zu $a_{\alpha\beta}^{voll}$ gehörige Matrix sich genauso wie bei vollen Gittern durch 3^d-Sternen beschreiben läßt. Bei der Bilinearform $a_{\alpha\beta}^{dünn}$ ist es jedoch nicht notwendig den variablen Koeffizienten $q_{\alpha\beta}$ durch einen stückweise konstanten Dünngitterinterpolanten der Maschenweite h zu ersetzen. Im 2-dimensionalen Raum reicht es $q_{\alpha\beta}$ durch die Null-Funktion zu approximieren. Dies wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

Im 3-dimensionalen Raum reicht es nicht die Bilinearform $a_{\alpha\beta}^{dünn}$ durch die Null-Bilinearform zu approximieren. Eine Approximation durch die Null-Bilinearform führt schon beim Poisson-Problem zu einer nicht positiv definiten Steifigkeitsmatrix. Dies kann dadurch vermieden werden, daß man die variablen Koeffizienten $q_{\alpha,\beta}$ auf einem groben festen Gitter interpoliert. Eine andere Möglichkeit ist eine weitere Zerlegung der Bilinearform $a_{\alpha\beta}^{dünn}$ in mehrere Teile und eine Vereinfachung nur bestimmter Teile der Bilinearform. Wichtig ist hierbei darauf zu achten, daß der Wert $a(v_{\frac{1}{2},\sqrt{2}^{-n},\sqrt{2}^{-n}}, v_{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}})$ für gerade n genau genug approximiert wird. Nach einer solchen Diskretisierung wird noch gesucht.

5.1.4 Semi-Orthogonalität im 2-dimensionalen Raum

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß a H_0^1-elliptisch ist. Außerdem seien $\alpha, \beta \in \{0,1\}^2$ immer Multiindizes. Die einfachste Approximation des Dünngitteranteils $a^{dünn}$ erhält man mit der Null-Bilinearform. Die Galerkin-Diskretisierung ist dann die Lösung $u_{\mathcal{D}}^{stark\_ortho} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}}$ der schwachen Gleichung

$$a_{\mathcal{D}}^{voll}(u_{\mathcal{D}}^{stark\_ortho}, v_{\mathcal{D}}) = \int_{\Omega^d} f v_{\mathcal{D}} \; d\lambda \quad \text{für alle} \quad v_{\mathcal{D}} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}}. \tag{5.7}$$

Diese Diskretisierung wollen wir als Diskretisierung mit ‚starker Semi-Orthogonalität' bezeichnen. In dieser Diskretisierung kann man die variablen Koeffizienten natürlich auch noch durch ihren stückweise konstanten Dünngitterinterpolanten ersetzen. Dies wollen wir hier aber nicht machen um genauer den Fehler berechnen zu können, der durch die Semi-Orthogonalität entsteht.

Numerische Experimente haben gezeigt, daß die Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität sehr gute Konvergenzeigenschaften besitzt. Es ist aber schwierig zu zeigen, daß die diskrete Bilinearform gleichmäßig elliptisch ist, falls die Diagonalterme des Hauptteils $b_{2,1}$ und $b_{1,2}$ sehr groß sind. Vermutlich gibt es auch wirklich Beispiele, bei denen die diskrete Bilinearform nicht mehr gleichmäßig elliptisch ist. In diesem Fall reicht es aber die Diagonalterme auf einem festen groben vollen Gitter zu interpolieren. Eine gute Konvergenz der diskreten Lösung erhält man, indem man das dünne Gitter sukzessiv verfeinert und dabei das grobe volle Gitter konstant läßt. Die Implementierung des Dünngitteranteils ist wesentlich einfacher, wenn man nur die Diagonalterme auf einem groben vollen Gitter interpolieren muß, als wenn man alle Koeffizienten auf dem dünnen Diskretisierungsgitter zu interpolieren hat. Diese einfache Diskretisierung des Dünngitteranteils wollen wir nun genau definieren. Dazu werden wir uns zur Vereinfachung auf reguläre dünne Gitter beschränken.

Das reguläre dünne Gitter der Tiefe $n \in \mathbb{N}$ und mit groben vollem Gitter der Tiefe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathcal{D}_{n,n_0} := \Big\{(x,y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} |\; T(x) + T(y) \leq n + 2n_0 + 1 \quad \text{und} \quad T(x), T(y) \leq n + n_0\Big\}.$$

Man sieht, daß das volle Gitter Ω_{n_0,n_0} in $\mathcal{D}_{n,n_0}$ enthalten ist. Es sei immer $h = 2^{-n}$ und $h_0 = 2^{-n_0}$. Zur Approximation der Bilinearform a verwenden wir nun die Bilinearform

$$\begin{aligned} a_{h,h_0}^{schw\_ortho} \quad &: \quad V_{\mathcal{D}_{n,n_0}} \times V_{\mathcal{D}_{n,n_0}} \to \mathbb{R}, \\ (w,v) \quad &\mapsto \quad a_{\mathcal{D}_{n,n_0}}^{voll}(w,v) + \int_\Omega \sum_{(z,z')\in\mathcal{O}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \lambda_z \mu_{z'} \cdot \\ &\qquad \cdot \left(\frac{\partial v_z^{lin}}{\partial x} \; I_{\Omega_{n_0,n_0}}^{kon}(b_{1,2}) \frac{\partial v_{z'}^{lin}}{\partial y} + \frac{\partial v_z^{lin}}{\partial y} \; I_{\Omega_{n_0,n_0}}^{kon}(b_{2,1}) \frac{\partial v_{z'}^{lin}}{\partial x} \right) \, d\lambda. \end{aligned}$$

wobei $w = \sum_{z\in\mathcal{D}_{n,n_0}} \lambda_z v_z^{lin}$ und $v = \sum_{z'\in\mathcal{D}_{n,n_0}} \mu_{z'} v_{z'}^{lin}$. Die Galerkin-Diskretisierung mit Hilfe dieser Bilinearform ist die Lösung $u_{h,h_0}^{schw\_ortho} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ der schwachen Gleichung

$$a_{h,h_0}^{schw\_ortho}(u_{h,h_0}^{schw\_ortho}, v) = \int_{\Omega^d} f v \; d\lambda \quad \text{für alle} \quad v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}. \tag{5.8}$$

Diese Diskretisierung wollen wir als Diskretisierung mit ‚schwacher Semi-Orthogonalität' bezeichnen.

Um die Diskretisierung mit starker und schwacher Semi-Orthogonalität genauer untersuchen zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen. Zuerst ist es notwendig die Menge $\mathcal{O}_\mathcal{D}$ genauer zu beschreiben (Siehe Abbildung 5.2).

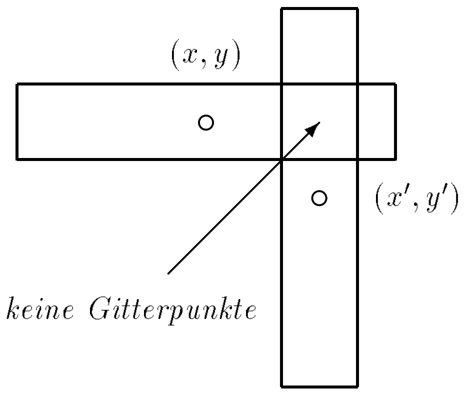


Abbildung 5.2: Träger der hierarchischen Basisfunktionen $v_{(x,y)}^{lin}$ und $v_{(x',y')}^{lin}$ für die semi-orthogonalen Gitterpunkte $((x,y),(x',y')) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}}^l$.

Lemma 5.5 *Die Menge $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ läßt sich zerlegen in*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathcal{D}} &= \mathcal{O}_{\mathcal{D}}^l \mathring{\cup} \mathcal{O}_{\mathcal{D}}^r, \quad \textit{wobei} \\
\mathcal{O}_{\mathcal{D}}^l &:= \Big\{((x,y),(x',y')) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} | \quad x \overset{\neq}{\prec} x' \quad \textit{und} \quad y \overset{\neq}{\succ} y' \quad \textit{und} \\
&\qquad \operatorname{supp}(v_{(x,y)}^{lin}) \cap \operatorname{supp}(v_{(x',y')}^{lin}) \cap \mathcal{D} = \emptyset\Big\} \quad \textit{und} \\
\mathcal{O}_{\mathcal{D}}^r &:= \Big\{((x,y),(x',y')) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D} | \quad x \overset{\neq}{\succ} x' \quad \textit{und} \quad y \overset{\neq}{\prec} y' \quad \textit{und} \\
&\qquad \operatorname{supp}(v_{(x,y)}^{lin}) \cap \operatorname{supp}(v_{(x',y')}^{lin}) \cap \mathcal{D} = \emptyset\Big\}.
\end{aligned}
$$

Beweis: Durch Betrachtung der 1-dimensionalen hierarchischen Basisfunktionen und mit Hilfe von Lemma 2.6 erkennt man

$$
\begin{gathered}
\operatorname{supp}(v_{(x,y)}^{lin}) \quad \cap \quad \operatorname{supp}(v_{(x',y')}^{lin}) \neq \emptyset \\
\Updownarrow \\
\left(x \overset{\neq}{\prec} x' \quad \wedge \quad y \overset{\neq}{\succ} y'\right) \text{ oder } \left(x \overset{\neq}{\succ} x' \quad \wedge \quad y \overset{\neq}{\prec} y'\right) \text{ oder} \\
(x \prec x' \quad \wedge \quad y \prec y') \text{ oder } (x \succ x' \quad \wedge \quad y \succ y')\,.
\end{gathered}
\tag{5.9}
$$

Falls gilt $\operatorname{supp}(v_{(x,y)}^{lin}) \cap \operatorname{supp}(v_{(x',y')}^{lin}) \cap \mathcal{D} = \emptyset$, dann können die Fälle $(x \prec x' \quad \wedge \quad y \prec y')$ und $(x \succ x' \quad \wedge \quad y \succ y')$ nicht auftreten. Dies zeigt die Behauptung. **q.e.d.**

Bei den regulären dünnen Gittern $\mathcal{D}_{n,n_0}$ erhält man hieraus folgendes Lemma.

Lemma 5.6 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}} := \Big\{((x,y),(x',y')) \in \mathcal{D}_{n,n_0} \times \mathcal{D}_{n,n_0} | \quad \mathrm{supp}(v^{lin}_{(x,y)}) \cap \mathrm{supp}(v^{lin}_{(x',y')}) \neq \emptyset \\ \text{und} \quad T(x') + T(y) \geq n + 2n_0 + 2\Big\}.$$

Beweis: Es sei $((x,y),(x',y')) \in \mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$. Aus Abbildung 5.2 und Lemma 5.5 erkennt man, daß $(x',y) \in \mathrm{supp}(v_{(x,y)}) \cap \mathrm{supp}(v_{(x',y')})$ ist. Deswegen folgt

$$(x',y) \notin \mathcal{D}_{n,n_0} \quad \Rightarrow \quad T(x') + T(y) \geq n + 2n_0 + 2.$$

Natürlich gilt $(x,y),(x',y') \in \mathcal{D}_{n,n_0}$ und $\mathrm{supp}(v_{(x,y)}) \cap \mathrm{supp}(v_{(x',y')}) \neq \emptyset$.

Nun wird die umgekehrte Richtung bewiesen. Es sei nun $(x,y),(x',y') \in \mathcal{D}_{n,n_0}$, $T(x')+T(y) \geq n+2n_0+2$ und $\mathrm{supp}(v_{(x,y)}) \cap \mathrm{supp}(v_{(x',y')}) \neq \emptyset$. Aus Abbildung 2.3 und 5.2 erkennt man

$$T(\tilde{x}) + T(\tilde{y}) \geq T(x') + T(y) \geq n + 2n_0 + 2$$

für alle $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathrm{supp}(v_{(x,y)}) \cap \mathrm{supp}(v_{(x',y')}) \cap \mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Daher folgt

$$\mathrm{supp}(v_{(x,y)}) \cap \mathrm{supp}(v_{(x',y')}) \cap \mathcal{D}_{n,n_0} = \emptyset.$$

Wegen $(x,y),(x',y') \in \mathcal{D}_{n,n_0}$ erhalten wir $T(x)+T(y) \leq n+2n_0+1$ und $T(x')+T(y') \leq n+2n_0+1$. Da $T(x') > n+2n_0+1-T(y)$ ist, folgt somit

$$\begin{aligned} T(x) \leq n + 2n_0 + 1 - T(y) &< T(x') \quad \text{und} \\ T(y') \leq n + 2n_0 + 1 - T(x') &< T(y). \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{supp}(v_{(x,y)}) \cap \mathrm{supp}(v_{(x',y')}) \neq \emptyset$ folgt mit Hilfe der Äquivalenz (5.9) somit $x \overset{\neq}{\prec} x'$ und $y \overset{\neq}{\succ} y'$. **q.e.d.**

Zur Vereinfachung verwenden wir folgende Schreibweise für die 1-dimensionalen Interpolationsoperatoren $I^{lin}_{h,1}$ und $I^{lin}_{h,2}$

$$I^x_j := I^{lin}_{2^{-j},1} \quad \text{und} \quad I^y_j := I^{lin}_{2^{-j},2},$$

falls $j \in \mathbb{N}_0$ ist. Außerdem setzen wir $I^x_{-1} := I^y_{-1} := 0$. I^x_j und I^y_j sind also Interpolationsoperatoren, die nur in der x- bzw. y-Richtung interpolieren. Der 1-dimensionale hierarchische Überschuß ist

$$\mathcal{H}^x_j := I^x_j - I^x_{j-1} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}^y_j := I^y_j - I^y_{j-1}.$$

Mit diesen Bezeichnungen erhält man folgendes Lemma:

Lemma 5.7 *Für alle $v \in \mathcal{C}(\Omega)$ und $z \in \{x, y\}$ gilt*

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}_j^z(v)\|_{L^2} &= \sqrt{3}^{-1}\, 2^{-j} \left\|\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{H}_j^z(v)\right\|_{L^2} \quad \text{und} \\ \left\|\frac{\partial}{\partial z} I_j^z(v)\right\|_{L^2} &\leq 2\sqrt{3}\, 2^j \|I_j^z(v)\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\|I_j^z(I_i^z(v))\|_{L^2} \mathrel{\tilde{<}} \sqrt{2}^{i-j}\, \|I_i^z(v)\|_{L^2}$$

für alle $i \geq j$ und alle Funktionen $v \in L^2(\Omega)$, die stetig in der z-Richtung sind.

Beweis: Die erste Gleichung folgt aus 1. und 2. in Lemma 4.2. Die erste Ungleichung folgt aus 5. in Lemma 4.2.

Nun beweisen wir die letzte Ungleichung. Es gilt folgende Ungleichung

$$\begin{aligned}2^{-j}(q^2 + q'q + q'^2) &\leq 2^{-j}\tfrac{3}{2}(q^2 + q'^2) \leq \\ &\leq 2^{i-j}3(2^{-i}(q^2 + pq + p^2 + q'^2 + p'q' + p'^2)).\end{aligned}$$

Wir setzen nun $q = v(s2^{-j})$, $q' = v((s+1)2^{-j})$, $p = v(s2^{-j} + 2^{-i})$ und $p' = v((s+1)2^{-j} + 2^{-i})$, wobei $v(1 + 2^{-i}) := v(1 - 2^{-i})$. Summation nach s und 1. in Lemma 4.2 liefern nun die letzte Ungleichung. **q.e.d.**

Des weiteren benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 5.8 *Es gilt*

$$\left\|w - I^y_{[\frac{n+1}{2}]+n_0}(w)\right\|_{H^1} + \left\|I^y_{[\frac{n+1}{2}]+n_0}(w)\right\|_{H^1} \mathrel{\tilde{<}} (n + n_0)\|w\|_{H^1}$$

für alle $w \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Wir führen folgende Norm für $w \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ ein

$$\|w\|_I := \left(2^j \left\|I_j^y \circ I_j^x(w) - I_{j-1}^y \circ I_{j-1}^x(w)\right\|_{L^2}\right)_{l^2}.$$

Nach Theorem 12 in [31] oder Theorem 2.2. in [39] oder Theorem 3.4. in [40] gilt

$$\|w\|_{H^1} \mathrel{\tilde{<}} \|w\|_I \mathrel{\tilde{<}} (n + n_0)\|w\|_{H^1} \tag{5.10}$$

für alle $w \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Durch Betrachtung der hierarchischen Basis sieht man für $j > [\frac{n+1}{2}] + n_0$

$$\mathcal{H}_j^y(w) + \mathcal{H}_j^x(w) = I_j^y \circ I_j^x(w) - I_{j-1}^y \circ I_{j-1}^x(w). \tag{5.11}$$

Wir benötigen nun folgende Ungleichung für $j > [\frac{n+1}{2}] + n_0$

$$\|\mathcal{H}_j^y(w)\|_{L^2} + \|\mathcal{H}_j^x(w)\|_{L^2} \tilde{<} \|I_j^y \circ I_j^x(w) - I_{j-1}^y \circ I_{j-1}^x(w)\|_{L^2} \tag{5.12}$$

für alle $w \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Für die 1-dimensionale hierarchische Basis existiert eine sogenannte verschärfte Dreiecksungleichung. Das heißt es gilt

$$\int_0^1 (I_h^{lin}(a) - I_{2h}^{lin}(a)) I_{2h}^{lin}(b)\ dx \leq \sqrt{\frac{3}{4}} \|I_h^{lin}(a) - I_{2h}^{lin}(a)\|_{L^2(]0,1[)} \|I_{2h}^{lin}(b)\|_{L^2(]0,1[)}$$

für alle Funktionen $a, b \in \mathcal{C}([0,1])$. Diese Ungleichung kann man auch leicht nachrechnen. Aus der verschärften Dreiecksungleichung folgt

$$\int_\Omega \mathcal{H}_j^y(w) \mathcal{H}_j^x(w)\ d\lambda \leq \frac{3}{4} \|\mathcal{H}_j^y\|_{L^2} \|\mathcal{H}_j^x\|_{L^2}.$$

Dies zeigt

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_j^x(w) + \mathcal{H}_j^y(w)\|_{L^2}^2 &= \|\mathcal{H}_j^x(w)\|_{L^2}^2 + 2\int_\Omega \mathcal{H}_j^y(w)\mathcal{H}_j^x(w)\ d\lambda + \|\mathcal{H}_j^y(w)\|_{L^2}^2 \geq \\
&\geq \|\mathcal{H}_j^x(w)\|_{L^2}^2 - 2\frac{3}{4}\|\mathcal{H}_j^y\|_{L^2}\|\mathcal{H}_j^x\|_{L^2} + \|\mathcal{H}_j^y(w)\|_{L^2}^2 \geq \\
&\geq \frac{1}{8}\left(\|\mathcal{H}_j^x(w)\|_{L^2} + \|\mathcal{H}_j^y(w)\|_{L^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Mit (5.11) folgt somit (5.12).

Wegen (5.10) und (5.12) erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
&\left(\|w - I^y_{[\frac{n+1}{2}]+n_0}(w)\|_{H^1} + \|I^y_{[\frac{n+1}{2}]+n_0}(w)\|_{H^1}\right)^2 \tilde{<} \\
\tilde{<} &\quad \left(\|w - I^y_{[\frac{n+1}{2}]+n_0}(w)\|_I + \|I^y_{[\frac{n+1}{2}]+n_0}(w)\|_I\right)^2 = \\
= &\quad \sum_{j=[\frac{n+1}{2}]+n_0+1}^{n+n_0} 4^j \left\|\mathcal{H}_j^y(w)\right\|_{L^2}^2 + \sum_{j=0}^{[\frac{n+1}{2}]+n_0} 4^j \left\|I_j^y \circ I_j^x(w) - I_{j-1}^y \circ I_{j-1}^x(w)\right\|_{L^2}^2 + \\
&\quad + \sum_{j=[\frac{n+1}{2}]+n_0+1}^{n+n_0} 4^j \left\|\mathcal{H}_j^x(w)\right\|_{L^2}^2 \tilde{<} \\
\tilde{<} &\quad \|w\|_I^2 \tilde{<} (n+n_0)^2 \|w\|_{H^1}^2
\end{aligned}$$

für alle $w \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$. **q.e.d.**

Für $p_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ und $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ sei

$$b_{\alpha\beta}(w, v) := \int_\Omega \sum_{(z,z') \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin}\ p_{\alpha\beta} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda$$

wobei $w = \sum_{z\in\mathcal{D}_{n,n_0}} \lambda_z v_z^{lin}, v = \sum_{z'\in\mathcal{D}_{n,n_0}} \mu_{z'} v_{z'}^{lin} \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$. Falls wir $p_{\alpha,\beta} = q_{\alpha,\beta}$ setzen, dann erhalten wir den Dünngitteranteil $b_{\alpha,\beta} = a_{\alpha,\beta}^{dünn}$. Unser Ziel ist es daher zu zeigen, daß die Bilinearformen $b_{\alpha,\beta}$ in geeigneten Normen klein werden, falls n und n_0 steigen. Wir benötigen hierzu zwei unterschiedliche Abschätzungen von $b_{\alpha,\beta}$ (Siehe Satz 5.2 und 5.3). Mit Hilfe der einen Abschätzung erhalten wir die Stabilität der Diskretisierung mit Semi-Orthogonalität und mit der anderen die Konsistenzordnung. Stabilität und Konsistenz ergeben dann die Konvergenzsätze 5.4 und 5.5.

Zur Beschreibung dieser Abschätzungen benötigen wir das Gebiet

$$\Phi_{n_0} := \Omega\backslash\{(x,y) \in \mathcal{P}\times\mathcal{P} \mid T(x) \le n_0 \quad \text{oder} \quad T(y) \le n_0\}.$$

Man beachte den Unterschied zwischen den Räumen $H^1_{p=\infty}(\Phi_{n_0})$ und $H^1_{p=\infty}(\Omega)$. Im Raum $H^1_{p=\infty}(\Phi_{n_0})$ darf man nicht über die Gitterlinien der Tiefe n_0 hinweg ableiten.

Die folgenden beiden Sätze zeigen nun die Abschätzungen, die wir benötigen.

Satz 5.2 (Ungleichungen zur Konsistenz) *Es sei $u \in H^{G,3}(\Omega)$ und $|\alpha|, |\beta| \le 1$. Falls $\alpha = (1,0) \wedge \beta = (0,1)$ oder $\alpha = (0,1) \wedge \beta = (1,0)$, dann sei zusätzlich $u \in H^{G,4}(\Omega)$. Außerdem sei*

$$\|p_{\alpha,\beta}\|_{\alpha,\beta} := \max\left(\|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}, \|D^\alpha p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}, \|D^\beta p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}\right).$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$|b_{\alpha,\beta}(I^{lin}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}(u), v)| \stackrel{\sim}{<} 2^{-(n+n_0)} n \|p_{\alpha,\beta}\|_{\alpha,\beta} \|v\|_{H^1}$$

für alle $v \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $p_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Phi_{n_0})$.

Beweis: Für die Indizes z und z' gelte immer $z = (x,y) \in \mathcal{D}_{n,n_0}$ und $z' = (x',y') \in \mathcal{D}_{n,n_0}$. Außerdem sei im folgenden immer $w = \sum_z \lambda_z v_z^{lin}, v = \sum_{z'} \mu_{z'} v_{z'}^{lin} \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$. Man beachte beachte im folgenden Beweis immer, daß die hierarchischen Basisfunktionen zu semi-orthogonalen Punkten wie in Abbildung 5.2 aussehen.

Aus Lemma 5.6 folgt

$$\sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z\mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda = \tag{5.13}$$
$$= \sum_{T(x')+T(y)\ge n+2n_0+2} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z\mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda =$$
$$= \sum_{\substack{i+j\ge n+2n_0+2\\ n_0+2\le i,j\le n+n_0}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ D^\alpha \mathcal{H}_i^y(w) D^\beta \mathcal{H}_j^x(v)\ d\lambda.$$

Analog folgt

$$\sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^r_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z\mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda = \tag{5.14}$$

$$= \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ D^\alpha \mathcal{H}_i^x(w) D^\beta \mathcal{H}_j^y(v)\ d\lambda.$$

Wir setzen nun $w := I^{lin}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}(u)$. Konsistent mit der Definition der λ_z seien die $\lambda_{z''}\in\mathbb{R}$ so gewählt, daß gilt

$$u = \sum_{z''\in\mathcal{P}^2} \lambda_{z''} v_{z''}^{lin}.$$

Die $\lambda_{z''}$ sind die punktweisen hierarchischen Überschüsse von u. Wegen (2.43) ist der 2-dimensionale hierarchische Überschuß

$$v_{(k,l)} = \sum_{\substack{z''=(x'',y'')\in\mathcal{P}^2\\ T(x'')=k,T(y'')=l}} \lambda_{z''} v_{z''}.$$

Wegen Lemma 2.3 gilt aber $v_{(k,l)} = \left(I_k^x - I_{k-1}^x\right)\circ\left(I_l^y - I_{l-1}^y\right)(u)$. Daher folgt analog dem Beweis von Satz 2.2

$$\left\|D^{\alpha+\beta} v_{(k,l)}\right\|_2 \ \tilde{<}\ 2^{-k}2^{-l}\|u\|_{H^{G,3}}$$

für alle $k,l\in\mathbb{N}_0$ und alle $|\alpha|+|\beta|\leq 1$ und

$$\left\|D^{\alpha+\beta} v_{(k,l)}\right\|_2 \ \tilde{<}\ 2^{-k}2^{-l}\|u\|_{H^{G,4}}$$

für alle $k,l\in\mathbb{N}_0$ und falls $\alpha=(1,0)\wedge\beta=(0,1)$ oder $\alpha=(0,1)\wedge\beta=(1,0)$.

Den Wert $\|u\|_{H^{G,3}}$ beziehungsweise $\|u\|_{H^{G,4}}$ betrachten wir im folgenden immer als Konstante.

1. Fall $|\alpha|+|\beta|\leq 1$ oder $\alpha=(1,0)\wedge\beta=(0,1)$ oder $\alpha=(0,1)\wedge\beta=(1,0)$.

Wegen $\left\|D^{\alpha+\beta} v_{(k,l)}\right\|_2 \ \tilde{<}\ 2^{-k}2^{-l}$ folgt

$$\begin{aligned}\left\|D^{\alpha+\beta}\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_2 &= \left\|D^{\alpha+\beta}\mathcal{H}_i^y(I^{lin}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}(u))\right\|_2 \ \tilde{<}\\ &\tilde{<} \sum_{k=1}^{n+2n_0+1-i}\left\|D^{\alpha+\beta} v_{(k,i)}\right\|_2 \ \tilde{<} \sum_{k=1}^{n+2n_0+1-i} 2^{-k}2^{-i} \ \tilde{<}\ 2^{-i}\end{aligned}$$

für alle $i\in\mathbb{N}$. Man beachte, daß entweder $\mathcal{H}_i^y(w)$ oder $\mathcal{H}_j^x(w)$ am Rand des Gebietes Φ_{n_0} verschwindet, falls $n_0+2\leq i,j\leq n+n_0$ ist. Daher erhält man durch partielle Integration und wegen Gleichung (5.13) und Lemma 5.7

$$\left|\sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z\mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda\right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \left\| \int_{\Phi_{n_0}} p_{\alpha,\beta}\ D^{\alpha}\mathcal{H}_i^y(w) D^{\beta}\mathcal{H}_j^x(v)\ d\lambda \right\| \leq \\
&\leq \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \left\| \int_{\Phi_{n_0}} p_{\alpha,\beta}\ D^{\alpha+\beta}\mathcal{H}_i^y(w) \mathcal{H}_j^x(v)\ d\lambda \right\| + \\
&\quad + \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \left\| \int_{\Phi_{n_0}} D^{\beta} p_{\alpha,\beta}\ D^{\alpha}\mathcal{H}_i^y(w) \mathcal{H}_j^x(v)\ d\lambda \right\| \leq \\
&\leq \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \left\| D^{\alpha+\beta}\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_{L^2} \left\|\mathcal{H}_j^x(v)\right\|_{L^2} + \\
&\quad + \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \left\| D^{\beta} p_{\alpha,\beta}\right\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})} \|D^{\alpha}\mathcal{H}_i^y(w)\|_{L^2} \left\|\mathcal{H}_j^x(v)\right\|_{L^2} \ \tilde{<} \\
&\tilde{<} \left(\|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} + \left\| D^{\beta} p_{\alpha,\beta}\right\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})} \right) \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} 2^{-i}2^{-j} \left\| \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_j^x(v)\right\|_{L^2}
\end{aligned}$$

für alle v, n, n_0 und $p_{\alpha,\beta}$. Bekanntlich ist die 1-dimensionale hierarchische Basis orthogonal bezüglich der Bilinearform $(v_1, v_2) \mapsto \int_0^1 \frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial v_2}{\partial x}\ dx$. Daher folgt

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_{\Omega} p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z \mu_{z'} D^{\alpha} v_z^{lin} D^{\beta} v_{z'}^{lin}\ d\lambda \right| \ \tilde{<} \\
&\tilde{<} \ \|p_{\alpha,\beta}\|_{\alpha,\beta} \|v\|_{H^1} \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} 2^{-i}2^{-j} \ \tilde{<}\ 2^{-(n+n_0)} n \|p_{\alpha,\beta}\|_{\alpha,\beta} \|v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

für alle v, n, n_0 und $p_{\alpha,\beta}$. Diese Ungleichung gilt natürlich auch, wenn man $\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ durch $\mathcal{O}^r_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ ersetzt. Daher ergibt sich mit Lemma 5.5 die Behauptung.

2. Fall $\alpha = \beta = (1,0)$.

Man beachte wieder, daß entweder $\mathcal{H}_i^y(w)$ oder $\mathcal{H}_j^x(w)$ am Rand des Gebietes Φ_{n_0} verschwindet, falls $n_0 + 2 \leq i, j \leq n + n_0$ ist. Daher erhält man durch partielle Integration und wegen Gleichung (5.13)

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_{\Omega} p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z \mu_{z'} D^{\alpha} v_z^{lin} D^{\beta} v_{z'}^{lin}\ d\lambda \right| \leq \\
&\leq \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \left\| \int_{\Phi_{n_0}} p_{\alpha,\beta}\ \frac{\partial\mathcal{H}_i^y(w)}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{H}_j^x(v)}{\partial x}\ d\lambda \right\| = \\
&= \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \left\| \int_{\Phi_{n_0}} \frac{\partial p_{\alpha,\beta}}{\partial x}\ \frac{\partial\mathcal{H}_i^y(w)}{\partial x}\mathcal{H}_j^x(v)\ d\lambda \right\|
\end{aligned}$$

für alle v, n, n_0 und $p_{\alpha,\beta}$. Der Rest des Beweises ist analog dem *1. Fall.*

3. Fall $\alpha = \beta = (0,1)$. Analog dem *2. Fall.* **q.e.d.**

Die Ungleichungen in diesem Satz sind nicht für alle α, β scharf. Für $\alpha = \beta = (0,0)$ fällt der Term n weg, wie der folgender Satz zeigt.

Satz 5.3 (Ungleichungen zur Stabilität) *Es sei*

$$\begin{aligned} |p_{\alpha+\beta}|_{\alpha+\beta} &:= \max\left(\|D^\alpha p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}, \|D^\beta p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}, \|D^{\alpha+\beta} p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}\right), \\ \|p_{\alpha,\beta}\|_{\alpha,\beta} &:= \max\left(\|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}, \|D^\alpha p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}, \|D^\beta p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Phi_{n_0})}\right). \end{aligned}$$

Dann gelten folgende Abschätzungen:

1. *Es sei* $\alpha = \beta = (0,0)$. *Dann gilt*

$$|b_{\alpha,\beta}(w,v)| < 2^{-(n+2n_0)}\, 6^{-1} \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} |w|_{H^1} |v|_{H^1}$$

für alle $w, v \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *und* $p_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$.

2. *Es sei* $|\alpha| + |\beta| = 1$. *Dann gilt*

$$|b_{\alpha,\beta}(w,v)| \stackrel{\sim}{<} 2^{-\frac{n}{2}}(n+n_0)\|p_{\alpha,\beta}\|_{\alpha,\beta}\|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

für alle $w, v \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *und* $p_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$.

3. *Es sei* $|\alpha| + |\beta| = 2$ *und* $\alpha = \beta$. *Dann gilt*

$$|b_{\alpha,\beta}(w,v)| \stackrel{\sim}{<} 2^{-\frac{n}{2}}(n+n_0)|p_{\alpha,\beta}|_{\alpha+\beta}\|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

für alle $w, v \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *und* $p_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$.

4. *Es sei* $|\alpha| + |\beta| = 2$ *und* $\alpha \neq \beta$. *Dann gibt es eine Konstante* $C > 0$, *so daß gilt*

$$\begin{aligned} |b_{\alpha,\beta}(w,v)| &< \frac{4}{3}\|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty(\Omega)}|w|_{H^1}|v|_{H^1} + \\ &\quad +2^{-\frac{n}{2}}(n+n_0)C|p_{\alpha,\beta}|_{\alpha+\beta}\|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \end{aligned}$$

für alle $w, v \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ *und* $p_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$.

Beweis: Wir verwenden die am Anfang des Beweises von Satz 5.2 eingeführten Bezeichnungen für die Indizes z und z' und für w und v. Insbesondere gilt die Gleichung (5.13).

Zuerst wollen wir eine Ungleichung beweisen. Für $q > 1$ gilt

$$\sum_{\substack{i+j \geq n+2n_0+2 \\ n_0+2 \leq i,j \leq n+n_0}} q^{-i-j+n+2n_0+2} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_j^x(w) \right\|_{L^2} < \tag{5.15}$$
$$< (1-q^{-1})^{-1} \left\| \frac{\partial}{\partial y} w \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} v \right\|_{L^2} .$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\sum_{\substack{i+j \geq n+2n_0+2 \\ n_0+2 \leq i,j \leq n+n_0}} q^{-i-j+n+2n_0+2} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_j^x(w) \right\|_{L^2} \leq \tag{5.16}$$
$$\leq \left(\sum_{\substack{i+j \geq n+2n_0+2 \\ n_0+2 \leq i,j \leq n+n_0}} q^{-i-j+n+2n_0+2} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \left(\sum_{\substack{i+j \geq n+2n_0+2 \\ n_0+2 \leq i,j \leq n+n_0}} q^{-i-j+n+2n_0+2} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_j^x(v) \right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Außerdem gilt wegen der Orthogonalitätseigenschaft der 1-dimensionalen hierarchischen Basis

$$\sum_{\substack{i+j \geq n+2n_0+2 \\ n_0+2 \leq i,j \leq n+n_0}} q^{-i-j+n+2n_0+2} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2}^2 =$$
$$= \sum_{i=n_0+2}^{n+n_0} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2}^2 \sum_{j=n+2n_0+2-i}^{n+n_0} q^{-i-j+n+2n_0+2} =$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_{i+n_0}^y(w) \right\|_{L^2}^2 \sum_{j=0}^{i-2} q^{-j} < (1-q^{-1})^{-1} \left\| \frac{\partial}{\partial y} w \right\|_{L^2}^2 .$$

Eine ähnliche Ungleichung erhält man natürlich auch für v. Zusammen mit der Ungleichung (5.16) folgt somit (5.15).

Zu 1. Es sei $\alpha = \beta = (0,0)$. Wegen Gleichung (5.13) und (5.15) und Lemma 5.7 folgt dann

$$\left| \sum_{(z,z') \in \mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta} \; \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin} \; d\lambda \right| \leq$$
$$\leq \; \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{\substack{i+j \geq n+2n_0+2 \\ n_0+2 \leq i,j \leq n+n_0}} \|\mathcal{H}_i^y(w)\|_{L^2} \left\| \mathcal{H}_j^x(v) \right\|_{L^2} \leq$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \ \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} 3^{-1} \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2 \\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} 2^{-i-j} \left\|\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_{L^2} \left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_j^x(v)\right\|_{L^2} \leq \\
&\leq \ \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} 3^{-1} 2^{-(n+2n_0+2)} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2 \\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} 2^{-i-j+n+2n_0+2} \left\|\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_{L^2} \left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_j^x(v)\right\|_{L^2} < \\
&< \ \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} 3^{-1} 2^{-(n+2n_0+2)} 2 \left\|\frac{\partial}{\partial y}w\right\|_{L^2} \left\|\frac{\partial}{\partial x}v\right\|_{L^2} = \\
&= \ \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} 2^{-(n+2n_0)} 6^{-1} \left\|\frac{\partial}{\partial y}w\right\|_{L^2} \left\|\frac{\partial}{\partial x}v\right\|_{L^2} .
\end{aligned}
$$

Diese Ungleichung gilt natürlich auch, wenn man $\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ durch $\mathcal{O}^r_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ ersetzt und $\frac{\partial}{\partial x}$ mit $\frac{\partial}{\partial y}$ vertauscht. Daher ergibt sich mit Lemma 5.5 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Behauptung.

Zu 2. Es sei $|\alpha| + |\beta| = 1$. O.B.d.A. sei $\alpha = (1,0) \wedge \beta = (0,0)$. Wegen Lemma 5.6 folgt

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda \right| \leq \qquad (5.17)\\
&\leq \ S_1 + S_2 + S_3, \quad \text{wobei} \\
&\qquad S_1 = \left| \sum_{\substack{[\frac{n+1}{2}]+n_0 < T(x') \leq n+n_0 \\ n+2n_0+2-T(x') \leq T(y) \leq [\frac{n+1}{2}]+n_0}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} v_{z'}^{lin}\ d\lambda \right|, \\
&\qquad S_2 = \left| \sum_{\substack{n_0+2 \leq T(x') \leq [\frac{n+1}{2}]+n_0 \\ n+2n_0+2-T(x') \leq T(y) \leq n+n_0}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} v_{z'}^{lin}\ d\lambda \right| \quad \text{und} \\
&\qquad S_3 = \left| \sum_{\substack{[\frac{n+1}{2}]+n_0 < T(x') \leq n+n_0 \\ [\frac{n+1}{2}]+n_0 < T(y) \leq n+n_0}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} v_{z'}^{lin}\ d\lambda \right| .
\end{aligned}
$$

Es sei kurz $m := [\frac{n+1}{2}] + n_0$. Wegen Lemma 5.7 und 5.8 folgt

$$
\begin{aligned}
S_1 = &\left| \sum_{m<j\leq n+n_0} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ D^\alpha (I_m^y(w) - I_{n+2n_0+1-j}^y I_m^y(w)) \mathcal{H}_j^x(v)\ d\lambda \right| \leq \\
\leq \ &\|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{m<j\leq n+n_0} \left(\left\| I_m^y(\frac{\partial}{\partial x}w) \right\|_{L^2} + \left\| I_{n+2n_0+1-j}^y I_m^y(\frac{\partial}{\partial x}w) \right\|_{L^2} \right) \cdot
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot \left\| \mathcal{H}_j^x(v) \right\|_{L^2} \lesssim \\
\lesssim \quad & \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{m<j\leq n+n_0} \left(1+\sqrt{2}^{m-(n+2n_0+1-j)}\right) \left\| I_m^y(\frac{\partial}{\partial x} w) \right\|_{L^2} \left\| \mathcal{H}_j^x(v) \right\|_{L^2} \lesssim \\
\lesssim \quad & \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{[\frac{n+1}{2}]<j\leq n} \sqrt{2}^{[\frac{n+1}{2}]-n+1+j} \left\| I_m^y(w) \right\|_{H^1} \left\| \mathcal{H}_{j+n_0}^x(v) \right\|_{L^2} \lesssim \\
\lesssim \quad & (n+n_0) \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{[\frac{n+1}{2}]<j\leq n} \sqrt{2}^{[\frac{n+1}{2}]-n-j} \|w\|_{H^1} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_{j+n_0}^x(v) \right\|_{L^2} \lesssim \\
\lesssim \quad & 2^{-\frac{n}{2}} (n+n_0) \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1}
\end{aligned}
$$

für alle w, v, n, n_0 und $p_{\alpha,\beta}$. Wegen $w \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ ist $\mathcal{H}_i^y(w) = I_{n+2n_0+1-i}^x(\mathcal{H}_i^y(w))$. Daher folgt aus Lemma 5.7

$$
\left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2} \leq 2\sqrt{3} 2^{n+2n_0+1-i} \left\| \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2} \leq 2^{n+2n_0+2-2i} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2} .
$$

Hieraus erhält man mit Gleichung (5.15) und Lemma 5.7

$$
\begin{aligned}
S_2 = & \left| \sum_{\substack{n_0+2\leq j\leq [\frac{n+1}{2}]+n_0 \\ n+2n_0+2-j\leq i\leq n+n_0}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta} \, \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_i^y(w) \mathcal{H}_j^x(v) \; d\lambda \right| \leq \\
\leq \quad & \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{\substack{n_0+2\leq j\leq [\frac{n+1}{2}]+n_0 \\ n+2n_0+2-j\leq i\leq n+n_0}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2} \left\| \mathcal{H}_j^x(v) \right\|_{L^2} \lesssim \\
\lesssim \quad & \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{\substack{n_0+2\leq j\leq [\frac{n+1}{2}]+n_0 \\ n+2n_0+2-j\leq i\leq n+n_0}} 2^{n+2n_0-2i-j} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_j^x(v) \right\|_{L^2} \lesssim \\
\lesssim \quad & 2^{-\frac{n}{2}-n_0} \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \cdot \\
& \cdot \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2 \\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} 2^{n+2n_0-i-j+2} \left\| \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{H}_i^y(w) \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_j^x(v) \right\|_{L^2} \lesssim \\
\lesssim \quad & 2^{-\frac{n}{2}-n_0} \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial y} w \right\|_{L^2} \left\| \frac{\partial}{\partial x} v \right\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

für alle w, v, n, n_0 und $p_{\alpha,\beta}$. Eine Abschätzung für S_3 erhält man ganz analog. Aus den Abschätzungen für S_1, S_2 und S_3 folgt mit (5.17)

$$
\begin{aligned}
& \left| \sum_{(z,z')\in \mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta} \; \lambda_z \mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin} \; d\lambda \right| \lesssim \\
\lesssim \quad & 2^{-\frac{n}{2}} (n+n_0) \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1}
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

für alle w, v, n, n_0 und $p_{\alpha,\beta}$. Wegen Gleichung (5.14) erhält man durch partielle Integration

$$\sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^r_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z\mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda = \tag{5.19}$$

$$= \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \int_{\Phi_{n_0}} p_{\alpha,\beta}\ D^\alpha \mathcal{H}_i^x(w)\mathcal{H}_j^y(v)\ d\lambda =$$

$$T_1 + T_2, \quad \text{wobei}$$

$$T_1 = -\sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \int_{\Phi_{n_0}} D^\alpha p_{\alpha,\beta}\ \mathcal{H}_i^x(w)\mathcal{H}_j^y(v)\ d\lambda \quad \text{und}$$

$$T_2 = -\sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \int_{\Phi_{n_0}} p_{\alpha,\beta}\ \mathcal{H}_i^x(w) D^\alpha \mathcal{H}_j^y(v)\ d\lambda.$$

T_1 kann man wie in *1.* des Satzes 5.3 abschätzen. Eine Abschätzung für T_2 erhält man analog dem Beweis der Ungleichung (5.18). Daher folgt aus Gleichung (5.18) und (5.19) und Lemma 5.5 die Behauptung.

Zu 3. Es sei $|\alpha| + |\beta| = 2$ und $\alpha = \beta$. Diesen Fall kann man analog dem Beweis vom 2.Fall des Satzes 5.2 auf die Abschätzung *2.* des Satzes 5.3 zurückführen.

Zu 4. Es sei $|\alpha| + |\beta| = 2$ und $\alpha \neq \beta$. O.B.d.A. reicht es den Fall $\alpha = (1,0) \wedge \beta = (0,1)$ zu untersuchen. Wegen $w \in V_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ ist $\mathcal{H}_i^y(w) = I^x_{n+2n_0+1-i}(\mathcal{H}_i^y(w))$. Daher folgt aus Lemma 5.7

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_{L^2} \leq 2\sqrt{3}2^{n+2n_0+1-i}\left\|\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_{L^2} \leq 2^{n+2n_0+2-2i}\left\| \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_{L^2}.$$

Eine analoge Ungleichung gilt natürlich auch für v. Wegen Gleichung (5.13) und (5.15) folgt somit

$$\left|\sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^l_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z\mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda\right| \leq \tag{5.20}$$

$$\leq\ \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_{L^2}\left\|\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_j^x(v)\right\|_{L^2} \leq$$

$$\leq\ \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty} \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} 4^{-i-j+n+2n_0+2}\left\|\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{H}_i^y(w)\right\|_{L^2}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}_j^x(v)\right\|_{L^2} <$$

$$<\ \|p_{\alpha,\beta}\|_{L^\infty}\frac{4}{3}\left\|\frac{\partial}{\partial y}w\right\|_{L^2}\left\|\frac{\partial}{\partial x}v\right\|_{L^2}.$$

Wegen Gleichung (5.14) erhält man durch partielle Integration

$$\sum_{(z,z')\in\mathcal{O}^r_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \int_\Omega p_{\alpha,\beta}\ \lambda_z\mu_{z'} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin}\ d\lambda = \tag{5.21}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \int_{\Phi_{n_0}} p_{\alpha,\beta}\; D^\alpha \mathcal{H}_i^x(w) D^\beta \mathcal{H}_j^y(v)\; d\lambda = \\
&T_1 + T_2 + T_3, \quad \text{wobei} \\
&T_1 = - \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \int_{\Phi_{n_0}} D^\alpha p_{\alpha,\beta}\; \mathcal{H}_i^x(w) D^\beta \mathcal{H}_j^y(v)\; d\lambda, \\
&T_2 = \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \int_{\Phi_{n_0}} D^\beta p_{\alpha,\beta}\; \mathcal{H}_i^x(w) D^\alpha \mathcal{H}_j^y(v)\; d\lambda \quad \text{und} \\
&T_3 = \sum_{\substack{i+j\geq n+2n_0+2\\ n_0+2\leq i,j\leq n+n_0}} \int_{\Phi_{n_0}} p_{\alpha,\beta}\; D^\beta \mathcal{H}_i^x(w) D^\alpha \mathcal{H}_j^y(v)\; d\lambda.
\end{aligned}
$$

T_1 und T_2 kann man wie in *2.* des Satzes 5.3 und T_3 wie in der Ungleichung (5.20) abschätzen. Daher folgt aus Gleichung (5.20) und (5.21), Lemma 5.5 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Behauptung. **q.e.d.**

Bevor wir einen allgemeinen Konvergenzsatz für die Diskretisierungen mit Semi-Orthogonalität angeben, werden wir an einen einfachen Beispiel zeigen, wie man die Sätze 5.2 und 5.3 anwenden kann.

Beispiel: *Es sei*

$$a(w,v) = \int_\Omega (\nabla w)^T \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \nabla v + 12xy\, uv\; d\lambda.$$

Mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin folgt

$$4|w|_{H^1}^2 \leq a(w,w) \quad \textit{und} \quad |a(w,v)| \leq 12\|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$$

für alle $w, v \in H_0^1(\Omega)$. Man beachte $\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_{n,0}$. Aus Satz 5.3 folgt daher

$$|a_{\mathcal{D}_n}^{dünn}(w,v)| \leq \frac{11}{3}|w|_{H^1}|v|_{H^1}$$

für alle $w, v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ und $n \geq 1$. Daher folgt

$$
\begin{aligned}
|a_{\mathcal{D}_n}^{voll}(w,v)| &\leq |a(w,v)| + |a_{\mathcal{D}_n}^{dünn}(w,v)| \leq 16\|w\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \quad \textit{und} \\
|a_{\mathcal{D}_n}^{voll}(w,w)| &\geq |a(w,w)| - |a_{\mathcal{D}_n}^{dünn}(w,w)| \geq \frac{1}{3}|w|_{H^1}^2
\end{aligned}
$$

für alle $w, v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ und $n \geq 1$. Damit ist die Bilinearform $a_{\mathcal{D}_n}^{voll}$ gleichmäßig $\mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$-elliptisch für $n \in \mathbb{N}$. Deshalb existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau eine Lösung $u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ der Gleichung (5.7).

Falls $u \in H^{G,4}(\Omega)$ ist, dann folgt aus Satz 5.2

$$|a_{\mathcal{D}_n}^{dünn}(I_{\mathcal{D}_n}^{lin}(u), v)| \overset{\sim}{<} 2^{-n} n\|v\|_{H^1}$$

für alle $v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$. *Das Lemma von Strang (siehe Lemma 4.14 in [22]) zeigt daher, daß* $u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho}$ *gegen* u *mit der Ordnung*

$$\|u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho} - u\|_{H^1} = O(h \log h^{-1}),$$

konvergiert, wobei $h = 2^{-n}$ *ist.*

Äquivalent zur Voraussetzung, daß a H_0^1-elliptisch ist, ist die Existenz einer Konstante $\gamma' > 0$ so daß gilt

$$a(v,v) \geq \gamma' |v|_{H^1}^2 \quad \text{für alle} \quad v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.22}$$

Wir erhalten nun folgenden Satz für die Diskretisierung mit starker Semi-Orthogonalität.

Satz 5.4 (Konvergenz mit starker Semi-Orthogonalität) *Es sei* a H_0^1*-elliptisch im Sinne der Gleichung (5.22). Für die variablen Koeffizienten* $q_{\alpha\beta}$ *der Bilinearform* a *gelte*

$$q_{\alpha\beta}, \quad D^\alpha q_{\alpha\beta}, \quad D^\beta q_{\alpha\beta}, \quad D^{\alpha+\beta} q_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$$

und für ein $0 < q < 1$

$$\|q_{(0,1)(1,0)}\|_{L^\infty} + \|q_{(1,0)(0,1)}\|_{L^\infty} \leq \frac{3}{4} q \gamma'.$$

Außerdem sei $u \in H^{G,4}(\Omega)$. *Dann existiert genau eine Lösung* $u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ *der Gleichung (5.7), falls* n *groß genug ist. Des weiteren konvergieren diese Lösungen* $u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho}$ *gegen* u *mit der Ordnung*

$$\|u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho} - u\|_{H^1} = O(h \log h^{-1}),$$

wobei $h = 2^{-n}$.

Beweis: Wir setzen $p_{\alpha\beta} := q_{\alpha\beta}$. Aus Satz 5.3 folgt, daß es Konstanten C_1 und C_2 gibt, so daß gilt

$$\begin{aligned} |a_{\mathcal{D}_n}^{voll}(w,v)| &\leq |a(w,v)| + |a_{\mathcal{D}_n}^{dünn}(w,v)| \leq C_1 \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \text{und} \\ |a_{\mathcal{D}_n}^{voll}(w,w)| &\geq |a(w,w)| - |a_{\mathcal{D}_n}^{dünn}(w,w)| \geq \\ &\geq (1-q)\gamma' |w|_{H^1}^2 - C_2 2^{-\frac{n}{2}} n \|w\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

für alle $w, v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ und $n \geq 1$. Damit ist die Bilinearform $a_{\mathcal{D}_n}^{voll}$ gleichmäßig $\mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$-elliptisch, falls n groß genug ist. Deshalb existiert genau eine Lösung $u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ der Gleichung (5.7), falls n groß genug ist.

Da $u \in H^{G,4}(\Omega)$ ist, folgt aus Satz 5.2

$$|a_{\mathcal{D}_n}^{dünn}(I_{\mathcal{D}_n}^{lin}(u), v)| \stackrel{\sim}{<} 2^{-n} n \|v\|_{H^1}$$

für alle $v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$. Mit Strang's Lemma erhält man die Behauptung (siehe Lemma 4.14 in [22]). **q.e.d.**

Für die Diskretisierung mit schwacher Semi-Orthogonalität erhalten wir:

Satz 5.5 (Konvergenz mit schwacher Semi-Orthogonalität) *Es sei a H_0^1-elliptisch. Für die variablen Koeffizienten $q_{\alpha\beta}$ der Bilinearform a gelte*

$$q_{\alpha\beta}, \quad D^\alpha q_{\alpha\beta}, \quad D^\beta q_{\alpha\beta}, \quad D^{\alpha+\beta} q_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega).$$

Außerdem sei $u \in H^{G,4}(\Omega)$. Dann existiert genau eine Lösung $u_{n,n_0}^{schw\_ortho} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ der Gleichung (5.8), falls n und n_0 groß genug sind. Des weiteren konvergieren diese Lösungen $u_{n,n_0}^{schw\_ortho}$ gegen u mit der Ordnung

$$\|u_{n,n_0}^{schw\_ortho} - u\|_{H^1} = O(h \log h^{-1}),$$

wobei $h = 2^{-n}$.

Beweis: Wir setzen

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta} &:= \begin{cases} q_{\alpha\beta} - I_{\Omega_{n_0,n_0}}^{kon}(q_{\alpha\beta}) & \text{falls } |\alpha| + |\beta| = 2 \text{ und } \alpha \neq \beta \\ q_{\alpha\beta} & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{und} \\ a_{h,h_0}^{diff}(w,v) &:= \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq 1} \int_\Omega \sum_{(z,z') \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}} \lambda_z \mu_{z'} p_{\alpha\beta} D^\alpha v_z^{lin} D^\beta v_{z'}^{lin} \, d\lambda. \end{aligned}$$

wobei $w = \sum_{z \in \mathcal{D}_{n,n_0}} \lambda_z v_z^{lin}$ und $v = \sum_{z' \in \mathcal{D}_{n,n_0}} \mu_{z'} v_{z'}^{lin}$. Damit erhalten wir

$$a_{h,h_0}^{schw\_ortho} = a - a_{h,h_0}^{diff}.$$

Man beachte, daß auf dem Gebiet Φ_{n_0} gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha p_{\alpha\beta}\Big|_{\Phi_{n_0}} = D^\alpha q_{\alpha\beta}\Big|_{\Phi_{n_0}}, \qquad D^\beta p_{\alpha\beta}\Big|_{\Phi_{n_0}} &= D^\beta q_{\alpha\beta}\Big|_{\Phi_{n_0}} \quad \text{und} \\ D^{\alpha+\beta} p_{\alpha\beta}\Big|_{\Phi_{n_0}} &= D^{\alpha+\beta} q_{\alpha\beta}\Big|_{\Phi_{n_0}}. \end{aligned}$$

Aus Satz 5.3 und der Interpolationseigenschaft des Operators $I_{\Omega_{n_0,n_0}}^{kon}$ folgt somit, daß es Konstanten C_1 und C_2 gibt, so daß gilt

$$\begin{aligned} |a_{h,h_0}^{schw\_ortho}(w,v)| &\leq |a(w,v)| + |a_{h,h_0}^{diff}(w,v)| \leq C_1 \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \text{und} \\ |a_{h,h_0}^{schw\_ortho}(w,w)| &\geq |a(w,w)| - |a_{h,h_0}^{diff}(w,w)| \geq \\ &\geq \left(\gamma - C_2 \left(2^{-n_0} + 2^{-\frac{n}{2}}(n+n_0)\right)\right) \|w\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

für alle $w, v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$, $n \geq 1$ und $n_0 \geq 0$. Damit ist die Bilinearform $a_{h,h_0}^{schw\_ortho}$ gleichmäßig $\mathring{V}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$-elliptisch, falls n und n_0 groß genug sind. Deshalb existiert genau eine Lösung $u_{n,n_0}^{schw\_ortho} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$ der Gleichung (5.8), falls n und n_0 groß genug sind.

Da $u \in H^{G,4}(\Omega)$ ist, folgt aus Satz 5.2

$$|a_{h,h_0}^{schw\_ortho}(I_{\mathcal{D}_{n,n_0}}^{lin}(u), v)| \stackrel{\sim}{<} 2^{-n} n \|v\|_{H^1}$$

für alle $v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_{n,n_0}}$. Mit Strang's Lemma erhält man die Behauptung (siehe Lemma 4.14 in [22]). **q.e.d.**

5.2 Konvergenz in negativen Normen

In [9] wurde bewiesen, daß die Galerkin-Lösung auf dünnen Gittern mit der Ordnung $O(h)$ in der H^1-Norm konvergiert. Diese Konvergenzordnung ist sicherlich optimal, da der Dünngitterinterpolant auch keine besseren Ergebnisse liefert. In [33] wurde eine Konvergenz der Ordnung $O(h^{\frac{3}{2}})$ in der L^2-Norm bewiesen. Numerische Experimente haben jedoch eine bessere Konvergenzordnung in der L^2-Norm gezeigt. Bis jetzt ist es aber noch nicht gelungen eine bessere Konvergenzordnung zu beweisen. Vermutlich ist die L^2-Norm eine für die Galerkin-Lösung auf dünnen Gittern unnatürliche Norm während die H^1-Norm eine natürliche Norm ist. Ähnliche Probleme treten auch bei vollen Gittern und der L^∞-Norm auf. Interessanter Weise ist es in bestimmten negativen Normen relativ einfach eine optimale Konvergenzordnung bei dünnen Gittern zu beweisen. Diese Normen scheinen für dünne Gitter natürlichere Normen zu sein.

Zur Vereinfachung werden wir in diesem Abschnitt die Bilinearform a nicht durch eine andere Bilinearform approximieren. Es sei daher $u_{\mathcal{D}_n} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ die Lösung der Gleichung

$$a(u_{\mathcal{D}_n}, v) = \int_{\Omega^d} f v \; d\lambda \quad \text{für alle} \quad v \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}.$$

Für dünne Gitter ist die Dualraumnorm von $H^{G,l}(\Omega^d) \cap H_0^1(\Omega^d)$ eine geeignete Norm. Für Funktionen $f \in L^2(\Omega^d)$ ist diese Norm definiert durch

$$\|f\|_{G,-l} := \sup_{\Phi \in H^{G,l}(\Omega^d) \cap H_0^1(\Omega^d)} \frac{\int_{\Omega^d} f \Phi \; d\lambda}{\|\Phi\|_{H^{G,l}}}.$$

Wir erhalten nun folgenden Konvergenzsatz.

Satz 5.6 (Konvergenz in negativen Normen)
Das Problem (3.10) sei $H^{G,d+1}$-regulär und es sei $u \in H^{G,d+1}(\Omega^d)$. Dann gilt

$$\|u_{\mathcal{D}_n} - u\|_{G,-d+1} = O(h^2 (\log h^{-1})^{2(d-1)}).$$

Das Problem (3.10) sei $H^{G,d+2}$-regulär und es sei $u \in H^{G,d+2}(\Omega^d)$. Dann gilt

$$\|u_{\mathcal{D}_n} - u\|_{G,-d} = O(h^2).$$

Hierbei ist $h = 2^{-n}$.

Beweis: Der Beweis folgt den Ideen des Beweises von Theorem (5.8.3) in [7]. Es sei $l = d+1$ oder $l = d+2$ und

$$L_l(h) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad l = d+2 \\ (\log h^{-1})^{d-1} & \text{falls} \quad l = d+1 \end{cases}.$$

Aus Satz 2.4 und Cea's Lemma folgt für alle $u \in H^{G,l}(\Omega^d)$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_{\mathcal{D}_n} - u\|_{H^1} \stackrel{\sim}{<} hL_l(h)\|u\|_{H^{G,l}}.$$

Für jedes $\Phi \in H^{G,l-2}(\Omega^d) \cap H_0^1(\Omega^d)$ sei $w \in H_0^1(\Omega^d)$ die Lösung der Gleichung

$$a(v,w) = \int_{\Omega^d} v\Phi \; d\lambda \quad \text{für alle} \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Für $w_h = I_{\mathcal{D}_n}^{lin}(w)$ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^d}(u - u_{\mathcal{D}_n})\Phi \; d\lambda &= a(u - u_{\mathcal{D}_n}, w) = \\ &= a(u - u_{\mathcal{D}_n}, w - w_h) \leq \beta\|u - u_{\mathcal{D}_n}\|_{H^1}\|w - w_h\|_{H^1}.\end{aligned}$$

Wegen Satz 2.4 ist $\|w_h - w\|_{H^1} \stackrel{\sim}{<} hL_l(h)\|w\|_{H^{G,l}}$, wobei die Konstante in dieser Ungleichung unabhängig von w und h ist. Aus der Regularitätseigenschaft der Bilinearform a folgt $\|w\|_{H^{G,l}} \leq C_{reg}\|\Phi\|_{H^{G,l-2}}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|u_{\mathcal{D}_n} - u\|_{G,-(l-2)} &= \sup_{\Phi \in H^{G,l-2}(\Omega^d) \cap H_0^1(\Omega^d)} \frac{\int_{\Omega^d}(u - u_{\mathcal{D}_n})\Phi \; d\lambda}{\|\Phi\|_{H^{G,l-2}}} \stackrel{\sim}{<} \\ &\stackrel{\sim}{<} h^2(L_l(h))^2\|u\|_{H^{G,l}}\end{aligned}$$

für alle $u \in H^{G,l}(\Omega^d)$ und $n \in \mathbb{N}$. **q.e.d.**

Zusammen mit Satz 3.1 folgt nun:

Korollar 5.1 *Für das Poisson-Problem (3.11) gilt:*
Falls $u \in H^{G,d+1}(\Omega)$, *dann ist* $\|u_{\mathcal{D}_n} - u\|_{G,-d+1} = O(h^2(\log h^{-1})^2)$.
Falls $u \in H^{G,d+2}(\Omega)$, *dann ist* $\|u_{\mathcal{D}_n} - u\|_{G,-d} = O(h^2)$.

5.3 Mehrgitterverfahren

In diesem Abschnitt wird ein Mehrgitterverfahren beschrieben, mit dem man die Gleichungssysteme, die bei der Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen auf dünnen Gittern entstehen, effizient lösen kann. Hierbei betrachten wir nur den 2-dimensionalen Fall. Sicherlich kann man dieses Mehrgitterverfahren auch auf den höher-dimensionalen Fall verallgemeinern. Völlig trivial ist eine solche Verallgemeinerung jedoch nicht, so daß an ihr noch geforscht werden muß.

Bei der Beschreibung des Mehrgitterverfahrens werden wir uns auf die regulären dünnen Gitter $\mathcal{D}_n^2$ beschränken. Der Algorithmus wurde jedoch auf adaptiven dünnen Gittern implementiert. Zur Vereinfachung schreiben wir kurz

$$\mathcal{D}_n := \mathcal{D}_n^2 \quad \text{und} \quad \Omega_{i,j} := \Omega_{(i,j)}$$

für ein reguläres dünnes Gitter beziehungsweise ein volles Gitter. Man beachte die Definition von $\mathring{\mathcal{D}}$ und $\mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ am Ende des Abschnittes 2.3.4.

5.3.1 Der Q-Zyklus

Es sei $\bar{a}_h$ eine der in den Abschnitten 5.1.2 oder 5.1.4 beschriebenen approximativen Bilinearformen. Unser Ziel ist es iterativ folgendes Gleichungssystem zu lösen:

Diskretes Gleichungssystem
Suche $u_h \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$, so daß gilt

$$\bar{a}_h(u_h, v_h) = f(v_h) \qquad \forall v_h \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}. \tag{5.23}$$

Man nehme an, daß $\bar{u} \in \mathring{V}_{\mathcal{D}_n}$ eine Näherungslösung dieses Gleichungssystems ist. Natürlich gibt es $\lambda_z \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\bar{u} = \sum_{z \in \mathring{\mathcal{D}}_n} \lambda_z v_z^{lin}.$$

Für feste $k, l \in \mathbb{N}$ und $k + l \leq n + 1$, machen wir folgende Zerlegung

$$\bar{u} = \bar{u}^{k,l} + \bar{u}^{k,l}_{Rest},$$

wobei

$$\bar{u}^{k,l} = \sum_{z \in \mathring{\Omega}_{k,l}} \lambda_z v_z^{lin} \in \mathring{V}_{\Omega_{k,l}} \quad \text{und} \quad \bar{u}^{k,l}_{Rest} = \sum_{\substack{z=(x,y) \in \mathring{\mathcal{D}}_n \wedge \\ (T(x) > k \ \vee \ T(y) > l)}} \lambda_z v_z^{lin}.$$

Zur Konstruktion eines Mehrgitteralgorithmus ist es notwendig den Wert $\bar{u}^{k,l}_{Rest}$ auf die rechte Seite zu schieben. Deswegen definieren wir

$$f^{k,l}(v_h) := f(v_h) - \bar{a}_h(\bar{u}^{k,l}_{Rest}, v_h) \quad \text{für} \quad v_h \in \mathring{V}_{\Omega_{k,l}}. \tag{5.24}$$

Hieraus ergibt sich das

Gleichungssystem auf der Ebene (k, l)
Suche $\bar{u}^{k,l} \in \mathring{V}_{\Omega_{k,l}}$, so daß gilt

$$\bar{a}_h(\bar{u}^{k,l}, v_h) = f^{k,l}(v_h) \qquad \forall v_h \in \mathring{V}_{\Omega_{k,l}}. \tag{5.25}$$

Falls $\bar{u} = u$ die exakte Lösung des diskreten Gleichungssystems ist, dann ist $\bar{u}^{k,l}$ die Lösung des Gleichungssystem der Ebene (k, l) für jedes (k, l). Ist umgekehrt $\bar{u}^{k,l}$ die Lösung des Gleichungssystem der Ebene (k, l) für jedes (k, l) mit $k + l \leq n + 1$, dann ist $\bar{u} = u$

die exakte Lösung des diskreten Gleichungssystems.

Um Relaxationen machen zu können, ist es nützlich, das Gleichungssystem der Ebene (k,l) in ein Matrixgleichungssystem umzuformen. Wir definieren daher die Vektoren $\left(U_z^{k,l}\right)_{z\in\mathring{\Omega}_{k,l}}, \left(F_z^{k,l}\right)_{z\in\mathring{\Omega}_{k,l}} \in \mathbb{R}^{|\mathring{\Omega}_{k,l}|}$ und die Matrix $\left(A_{z,z'}^{k,l}\right)_{z,z'\in\mathring{\Omega}_{k,l}} \in \mathbb{R}^{|\mathring{\Omega}_{k,l}|\times|\mathring{\Omega}_{k,l}|}$ durch

$$\bar{u}^{k,l} = \sum_{z\in\mathring{\Omega}_{k,l}} U_z^{k,l} v_z^{k,l}, \tag{5.26}$$

$$F_z^{k,l} := f^{k,l}(v_z^{k,l}) \quad \text{und} \tag{5.27}$$

$$A_{z,z'}^{k,l} := \bar{a}_h\left(v_{z',(k,l)}^{lin}, v_{z,(k,l)}^{lin}\right). \tag{5.28}$$

Die folgende Matrixgleichung ist äquivalent zum Gleichungssystem der Ebene (k,l):

Matrixgleichung auf der Ebene (k,l)
Suche $\left(U_z^{k,l}\right)_{z\in\mathring{\Omega}_{k,l}} \in \mathbb{R}^{|\mathring{\Omega}_{k,l}|}$, *so daß gilt*

$$A^{k,l}U^{k,l} = F^{k,l}. \tag{5.29}$$

Nun können wir den Mehrgitteralgorithmus genauer erklären. Die wichtigsten Speicher sind:

- k,l: Tiefe der aktuellen Ebene. 2^{-k} und 2^{-l} sind die Maschenweiten des vollen Gitters $\mathring{\Omega}_{k,l}$, das zur aktuellen Ebene gehört,
- $(U_z)_{z\in\mathring{\mathcal{D}}_n}$: die aktuelle Näherungslösung,
- $(F_z)_{z\in\mathring{\mathcal{D}}_n}$: die rechte Seite der aktuellen Ebene und
- $(W_z)_{z\in\mathring{\mathcal{D}}_n}$: der 1-dimensionale hierarchische Überschuß in Richtung der letzten Vergröberung.

Zuerst müssen wir erklären, was eine Relaxation auf der Ebene (k,l) ist. Hierzu sei

$$\bar{u}_{alt} = \bar{u}_{alt}^{k,l} + \bar{u}_{alt,Rest}^{k,l}$$

die Zerlegung der aktuellen Näherungslösung. Man nehme an $U_z = \bar{u}_{alt}^{k,l}(z)$ für alle $z \in \mathring{\Omega}_{k,l}$.

Prozedur: Relaxation
Wähle $(U_z)_{z\in\mathring{\Omega}_{k,l}}$ *als Startlösung für (5.29). Mache eine Standard-Relaxation (z.B. Gauß-Seidel-Relaxation) der Gleichung (5.29). Dies ergibt die neue Näherungslösung* $(U_z)_{z\in\mathring{\Omega}_{k,l}}$ *auf der Ebene* (k,l).

Nach einer Relaxation sei $\bar{u}^{k,l}_{neu}(z) := U_z$ wobei $z \in \mathring{\Omega}_{k,l}$. $\bar{u}^{k,l}_{neu} \in \mathring{V}_{\Omega_{k,l}}$ ist die neue Näherungslösung auf der Ebene (k,l). Die neue Näherungslösung ist

$$\bar{u}_{neu} := \bar{u}^{k,l}_{neu} + \bar{u}^{k,l}_{alt,Rest}.$$

Nach einer Relaxation haben wir aber genaugenommen nur die Werte $\bar{u}_{neu}(z) := U_z$ für $z \in \mathring{\Omega}_{k,l}$ berechnet. Um $\bar{u}_{neu}$ auch auf den anderen Gitterpunkten berechnen zu können, benötigen wir die Prozeduren *Restriktion* und *Prolongation*. Die Prozedur *Prolongation* berechnet $\bar{u}_{neu}$ auf der neuen aktuellen Ebene.

Prozedur: Restriktion in x-Richtung
Für $(x,y) \in \mathring{\Omega}_{k,l}$ mit $T(x) = k$ berechne

$$W_{(x,y)} := U_{(x,y)} - 0.5 \cdot (U(x + 2^{-k}, y) + U(x - 2^{-k}, y));$$

Prozedur: Prolongation in x-Richtung
Für $(x,y) \in \mathring{\Omega}_{k,l}$ mit $T(x) = k$ berechne

$$U_{(x,y)} := W_{(x,y)} + 0.5 \cdot (U(x + 2^{-k}, y) + U(x - 2^{-k}, y));$$

Prozedur: Restriktion in y-Richtung
Für $(x,y) \in \mathring{\Omega}_{k,l}$ mit $T(y) = l$ berechne

$$W_{(x,y)} := U_{(x,y)} - 0.5 \cdot (U(x, y + 2^{-l}) + U(x, y - 2^{-l}));$$

Prozedur: Prolongation in y-Richtung
Für $(x,y) \in \mathring{\Omega}_{k,l}$ mit $T(y) = l$ berechne

$$U_{(x,y)} := W_{(x,y)} + 0.5 \cdot (U(x, y + 2^{-l}) + U(x, y - 2^{-l}));$$

Die Prozeduren *Restriktion* und *Prolongation* berechnen

$$U_z := \bar{u}_{neu}(z) \quad \text{für} \quad z \in \mathring{\Omega}_{k_{neu}, l_{neu}},$$

wobei (k_{neu}, l_{neu}) die neue Ebene ist. Diese Prozeduren können in einem Mehrgitteralgorithmus diese Berechnungen aber nur dann richtig ausführen, wenn bestimmte Regeln eingehalten werden. Diese Regeln sind in [32] beschrieben. Zuletzt benötigen wir die Prozedur

Prozedur: Korrektur der rechten Seite
Diese Prozedur berechnet $F_z := F^{k,l}_z$ für alle Gitterpunkte $z \in \mathring{\Omega}_{k,l}$.

Im Fall der Diskretisierung mit starker Semi-Orthogonalität ist es ziemlich einfach die Prozedur *Korrektur der rechten Seite* zu implementieren. Wir werden dies im nächsten Abschnitt genauer erklären. Bei anderen Diskretisierungen ist die Beschreibung der Implementierung etwas technisch. Daher lassen wir sie hier weg. Man kann sie sich aber auch selber überlegen.

Nun können wir den $Q - Zyklus$ erklären.

Der Q-Zyklus {
  Schritt 1: Weg in x-Richtung
  SETZE $k := 1$;
  WÄHREND $k < n$ {
    Schritt 1.1: V-Zyklus in einer Richtung
    SETZE $l := n - k + 1$;
    Relaxation;
    WÄHREND $l > 1$ {
      Restriktion in y-Richtung; UND $l := l - 1$;
      Korrektur der rechten Seite;
      Relaxation;
    }
    WÄHREND $l < n - k + 1$ {
      $l := l + 1$ UND *Prolongation in y-Richtung*;
      Korrektur der rechten Seite;
      Relaxation ;
    }
    Schritt 1.2: Änderung von k
    Restriktion in y-Richtung; UND $l := n - k$;
    Korrektur der rechten Seite;
    $k := k + 1$; UND *Prolongation in x-Richtung*;
    Korrektur der rechten Seite;
  }
  Schritt 2: Weg in y-Richtung
    analog
}

5.3.2 Korrektur der rechten Seite

In diesem Abschnitt untersuchen wir nur die Korrektur der rechten Seite im Fall der Diskretisierung mit starker Semi-Orthogonalität. Es sei daher

$$\bar{a}_h := a_{\mathcal{D}_n}^{voll}.$$

Die Korrektur der rechten Seite muß so geschehen, daß vor jedem *V-Zyklus in einer Richtung* die rechten Seiten auf dem zugehörigen feinsten vollen Gitter korrekt sind. Diese feinsten vollen Gitter sind die Gitter auf der Diagonale, der in Abbildung 5.3 dargestellten vollen Gitter. Die rechten Seiten der restlichen Punkte müssen so gesetzt sein, daß sie richtig sind, sobald sie zu einem späteren Zeitpunkt des Algorithmus in einem vollen Gitter enthalten, das das Startgitter eines *V-Zyklus in einer Richtung* ist.

Formal können wir dies in folgender Weise beschreiben. *Vor jedem V-Zyklus in einer Richtung soll für jedes* $(x, y) \in \mathring{\mathcal{D}}_n$ *gelten:*

$$F_{(x,y)} = F_{(x,y)}^{i,j}, \quad \text{wobei} \tag{5.30}$$

$$\begin{array}{llll} i := T(x), & j := n - T(x) + 1, & \text{falls} & T(x) > k \\ i := n - T(y) + 1, & j := T(y), & \text{falls} & T(y) > l \\ i := k, & j := l, & \text{falls} & T(x) \leq k \quad \text{und} \quad T(y) \leq l. \end{array} \tag{5.31}$$

Wir nehmen homogene Dirichlet-Randbedingungen an. Daher können wir $\bar{u} = 0$ als Start-Näherungslösung für die Gleichung (5.23) wählen. Man sieht leicht, daß nun die Gleichung (5.30) richtig ist, falls wir $F_{(x,y)} = 0$ setzen.

Wir nehmen nun an, daß (5.30) vor dem Start eines Q-Zyklus richtig ist. Die Korrektur der rechten Seite muß nun so durchgeführt werden, daß (5.30) auch nach einem Q-Zyklus richtig ist.

Der Vorteil der Diskretisierung mit starker Semi-Orthogonalität ist, daß man die Korrektur der rechten Seite ganz ähnlich wie bei vollen Gittern machen kann. Um dies zu zeigen unterscheiden wir zwei Fälle.

1. Fall: *Korrektur der rechten Seite während des V-Zyklus in einer Richtung.*
Es reicht den Weg in x-Richtung zu betrachten. Mit Hilfe von Abbildung 5.4 erhält man leicht folgende Formel

$$v_{(x,y),(k,l-1)}^{lin} = v_{(x,y),(k,l)}^{lin} + \frac{1}{2}\left(v_{(x,y-2^{-l}),(k,l)}^{lin} + v_{(x,y+2^{-l}),(k,l)}^{lin}\right).$$

Daher erhalten wir aus (5.24) und (5.27) für jedes $(x, y) \in \mathring{\Omega}_{k,l-1}$

$$F_{(x,y)}^{k,l-1} = F_{(x,y)}^{k,l} + \frac{1}{2}\left(F_{(x,y-2^{-l})}^{k,l} + F_{(x,y+2^{-l})}^{k,l}\right) - \bar{a}_h\left(\bar{u}^{k,l} - \bar{u}^{k,l-1}, v_{(x,y),(k,l-1)}^{lin}\right), \tag{5.32}$$

$$F_{(x,y)}^{k,l} = F_{(x,y)}^{k,l-1} - \frac{1}{2}\left(F_{(x,y-2^{-l})}^{k,l} + F_{(x,y+2^{-l})}^{k,l}\right) + \bar{a}_h\left(\bar{u}^{k,l} - \bar{u}^{k,l-1}, v_{(x,y),(k,l-1)}^{lin}\right). \tag{5.33}$$

Man beachte, daß $\bar{u}^{k,l} - \bar{u}^{k,l-1}$ der 1-dimensionale hierarchische Überschuß ist. Wir nehmen an, daß (5.30) vor einem *V-Zyklus in einer Richtung* richtig ist. Dann sind die rechten Seiten auf dem Gitter $\mathring{\Omega}_{k,n-k+1}$ richtig. Das heißt $F_z = F_z^{k,n-k+1}$ für alle $z \in \mathring{\Omega}_{k,n-k+1}$. Aus den obigen Formeln erkennt man nun leicht, wie die Korrektur der rechten Seite für die Punkte des Gitters $\mathring{\Omega}_{k,n-k+1}$ während eines *V-Zyklus in einer Richtung* durchzuführen ist. Dies macht man genauso wie bei einem V-Zyklus auf vollen Gittern. Die rechten Seiten der Punkte, die nicht in $\mathring{\Omega}_{k,n-k+1}$ enthalten sind, ändert man nicht. Wir beweisen nun, daß nach einem solchen *V-Zyklus in einer Richtung* die Gleichung (5.30) immer noch für alle $(z, y) \in \mathring{\mathcal{D}}_n$ richtig ist.

Für alle Punkte $(z, y) \in \mathring{\Omega}_{k,n-k+1}$ ist klar, daß (5.30) gilt. Man nehme nun an $(x, y) \in \mathring{\mathcal{D}}_n \backslash \mathring{\Omega}_{k,n-k+1}$. Dann ist entweder $T(y) > l$ oder $T(x) > k$. Wir betrachten nur den Fall $T(y) > l$. Den Fall $T(x) > k$ untersucht man ganz analog.

Es sei also $T(y) > l$. Man setze i, j gemäß (5.31). Dann gibt es $\lambda_{z'} \in \mathbb{R}$, so daß gilt $\bar{u} = \sum_{z' \in \mathring{\mathcal{D}}_n} \lambda_{z'} v_{z'}^{lin}$. Wegen (5.24) und (5.27) erhalten wir

$$\begin{aligned} F_z^{i,j} &= f^{k,l}(v_{z,(i,j)}^{lin}) = f(v_{z,(i,j)}^{lin}) - \bar{a}_h\left(\bar{u}_{Rest}^{i,j}, v_{z,(i,j)}^{lin}\right) = \\ &= f(v_{z,(i,j)}^{lin}) - \bar{a}_h\left(\sum_{\substack{z' = (x', y') \in \mathring{\mathcal{D}}_n \,\wedge \\ (T(x') > i \,\vee\, T(y') > j)}} \lambda_{z'} v_{z'}^{lin}, v_{z,(i,j)}^{lin} \right). \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, daß die Werte

$$S_1 = \bar{a}_h\left(\sum_{\substack{z' = (x', y') \in \mathring{\mathcal{D}}_n \\ \wedge\, T(y') > j}} \lambda_{z'} v_{z'}^{lin}, v_{z,(i,j)}^{lin} \right) \quad \text{und} \quad S_2 = \bar{a}_h\left(\sum_{\substack{z' = (x', y') \in \mathring{\mathcal{D}}_n \\ \wedge\, T(x') > i}} \lambda_{z'} v_{z'}^{lin}, v_{z,(i,j)}^{lin} \right)$$

sich während des *V-Zyklus in einer Richtung* nicht geändert haben. Durch Relaxationen können sich während des *V-Zyklus in einer Richtung* nur die Koeffizienten $\lambda_{z'} = \lambda_{(x',y')}$, wobei $T(x') \leq k$ und $T(y') \leq l$, geändert haben. Wegen $j = T(y) > l$, kann sich S_1 also auch nicht geändert haben.

Betrachten wir nun S_2. Wegen (5.31) erhalten wir $i = n - T(y) + 1$ und $j = T(y)$. Natürlich gibt es $\rho_{z''} \in \mathbb{R}$, so daß gilt

$$v_{z,(i,j)}^{lin} = \sum_{\substack{z'' = (x'', y'') \in \mathring{\mathcal{D}}_n \,\wedge \\ T(x'') \leq i \,\wedge\, T(y'') = T(y)}} \rho_{z''} v_{z''}^{lin}.$$

Daher schließt man

$$S_2 := \bar{a}_h \left(\sum_{\substack{z' = (x',y') \in \mathring{\mathcal{D}}_n \wedge \\ T(x') > n - T(y) + 1}} \lambda_{z'} v_{z'}^{lin}, \sum_{\substack{z'' = (x'',y'') \in \mathring{\mathcal{D}}_n \wedge \\ T(x'') \leq i \wedge T(y'') = T(y)}} \rho_{z''} v_{z''}^{lin} \right).$$

Aus Lemma 5.6 und wegen der starken Semi-Orthogonalität folgt $S_2 = 0$. Somit ist bewiesen, daß nach einem *V-Zyklus in einer Richtung* für alle $(x,y) \in \mathring{\mathcal{D}}_h$ mit $T(y) > l$ gilt

$$F_{(x,y)} = F_{(x,y)}^{i,j}.$$

2. Fall: *Korrektur der rechten Seite nach der Änderung von k.*
Es reicht wieder den Weg in x-Richtung zu betrachten. Analog dem Beweis der Gleichung (5.33) zeigt man

$$F_{(x,y)}^{k,l} = F_{(x,y)}^{k-1,l} - \frac{1}{2}\left(F_{(x-2^{-k},y)}^{k,l} + F_{(x+2^{-k},y))}^{k,l}\right) + \bar{a}_h \left(\bar{u}^{k,l} - \bar{u}^{k-1,l}, v_{(x,y),(k-1,l))}^{lin}\right) \tag{5.34}$$

für alle $(x,y) \in \mathring{\Omega}_{k-1,l}$. Mit Hilfe von (5.32) und (5.34) kann man nun leicht die *Korrektur der rechten Seite* vornehmen, da während der *Änderung von k* keine Relaxationen gemacht werden.

Bemerkung:
Insgesamt stellt man somit fest, daß die Korrektur der rechten Seite im wesentlichen auf den Gleichungen (5.32), (5.33), (5.34) und ähnlichen Gleichungen beruht. Zur Implementierung dieser Gleichungen benötigt man wie bei vollen Gittern nur 9-Punkte-Sterne. Für Relaxationen benötigt man natürlich auch nur 9-Punkte-Sterne. Dies zeigt, daß man die ganze Steifigkeitsmatrix im Fall der Diskretisierung mit starker Semi-Orthogonalität in 9-Punkte-Sternen abspeichern kann.

5.4 Numerische Ergebnisse

Man nehme an die Gleichung

$$\operatorname{div}\left(\begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix} \operatorname{grad} u\right) = 0 \tag{5.35}$$

soll auf dem Gebiet

$$\Psi = \left\{ (x,y) \in]0,1[^2 \;\middle|\; \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \sin(\pi \cdot x)) > y > x \cdot \tfrac{1}{4} \right\}$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen

$$u\Big|_{\partial\Psi} = \exp(-2.5 \cdot y) \cdot (x^2 - 0.4)\Big|_{\partial\Psi}$$

ohne Semi-Orthogonalität				mit Semi-Orthogonalität			
n	$\lvert\mathcal{D}_n\rvert$	e_n	$\frac{e_{n-1}}{e_n}$	n	$\lvert\mathcal{D}_n\rvert$	e_n	$\frac{e_{n-1}}{e_n}$
4	113	$2.39e-03$	1.73	4	113	$1.70e-03$	2.55
5	257	$7.84e-04$	3.04	5	257	$6.17e-04$	2.75
6	577	$2.39e-04$	3.28	6	577	$1.91e-04$	3.23
7	1281	$7.40e-05$	3.23	7	1281	$6.21e-05$	3.07
8	2817	$2.24e-05$	3.31	8	2817	$1.85e-05$	3.35
9	6145	$6.45e-06$	3.47	9	6145	$5.32e-06$	3.48
10	13313	$1.85e-06$	3.49	10	13313	$1.53e-06$	3.47
11	22529	$5.19e-07$	3.57	11	22529	$4.31e-07$	3.56

Tabelle 5.1: Diskretisierung durch Interpolation der variablen Koeffizienten

näherungsweise gelöst werden. Die exakte Lösung dieses Problems ist

$$u(x,y) = \exp(-2.5\cdot y)\cdot(x^2-0.4).$$

Hierzu transformieren wir das Gebiet $\Omega =]0,1[^2$ mit Hilfe der Abbildung

$$\begin{aligned} T:\Omega &\rightarrow \Psi \\ (x,y) &\mapsto \left(x, \tfrac{1}{2}\cdot(1+\sin(\pi\cdot x))\cdot y + \tfrac{1}{4}\cdot x\cdot(1-y)\right) \end{aligned}$$

auf das Gebiet Ψ. Abbildung 5.5 zeigt das transformierte dünne Gitter $T(\mathcal{D}_8)$. Mit Hilfe der Transformation T kann man die schwache Form der elliptischen Differentialgleichung (5.35) auf die schwache Form einer elliptischen Differentialgleichung auf dem Einheitsquadrat transformieren. Diese Transformation wird für dünne Gitter in [13] genau beschrieben. Zur Diskretisierung der elliptischen Differentialgleichung auf dem Einheitsquadrat verwenden wir die in Abschnitt 5.1.2 beschriebene Diskretisierung durch Interpolation der variablen Koeffizienten. Hierdurch erhält man auf den regulären dünnen Gitter $\mathcal{D}_n$ die Näherungslösung $u_{\mathcal{D}_n}$. Des weiteren verwenden wir die in Abschnitt 5.1.4 beschriebene Diskretisierung mit starker Semi-Orthogonalität, wobei die variablen Koeffizienten auch hier interpoliert werden. Hierdurch erhalten wir die Näherungslösung $u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho}$.

Zur Abschätzung des Fehlers wird die Maximumsnorm

$$e_n := \max_{z\in\mathcal{D}_n} |u(z)-u_n(z)| = \|u-u_n\|_{\mathcal{D}_n,\infty}$$

berechnet, wobei wir $u_n = u_{\mathcal{D}_n}$ beziehungsweise $u_n = u_{\mathcal{D}_n}^{stark\_ortho}$ setzen.

Tabelle 5.4 zeigt den Fehler e_n in Abhängigkeit von der Tiefe n des regulären dünnen Gitters. Die Fehler bei der Diskretisierung mit und ohne Semi-Orthogonalität unterscheiden sich kaum. Die numerischen Ergebnisse weisen darauf hin, daß der Fehler mit der

Ordnung

$$e_n = O(h^2 \log h^{-1})$$

konvergiert. Dabei haben wir den Fehler nur in einer diskreten Norm gemessen. Wegen Lemma 2.7 und aus der bekannten inversen Ungleichung auf vollen Gittern folgt nun

$$\begin{aligned} h \left\| I^{lin}_{\mathcal{D}_n}(u) - u_n \right\|_{H^1(\Omega)} &\overset{\sim}{<} \left\| I^{lin}_{\mathcal{D}_n}(u) - u_n \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ \leq \left\| I^{lin}_{\mathcal{D}_n}(u) - u_n \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\overset{\sim}{<} e_n \log h^{-1} \end{aligned}$$

für alle h. Wegen Satz 2.2 gilt

$$\begin{aligned} \left\| I^{lin}_{\mathcal{D}_n}(u) - u \right\|_{H^1(\Omega)} &= O(h) \quad \text{und} \\ \left\| I^{lin}_{\mathcal{D}_n}(u) - u \right\|_{L^2(\Omega)} &= O(h^2 \log h^{-1}). \end{aligned}$$

Alle diese Ungleichungen zeigen darauf hin, daß die Näherungslösungen u_n wenigstens mit folgender Ordnung in der L^2- bzw. der H^1-Norm gegen u konvergieren:

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_{H^1(\Omega)} &= O(h(\log h^{-1})^2) \quad \text{und} \\ \|u - u_n\|_{L^2(\Omega)} &= O(h^2(\log h^{-1})^2). \end{aligned}$$

Die numerischen Ergebnisse sind somit sehr zufriedenstellend, da sie auf fast die gleiche Konvergenzordnung wie bei der Dünngitterinterpolation hinweisen.

Wenn man mit Hilfe numerischer Ergebnisse Hinweise auf eine noch bessere Konvergenzordnung in der L^2- oder H^1-Norm haben möchte, dann muß man diskrete Normen auf einem vollen Gitter verwenden, das das dünne Diskretisierungsgitter enthält.

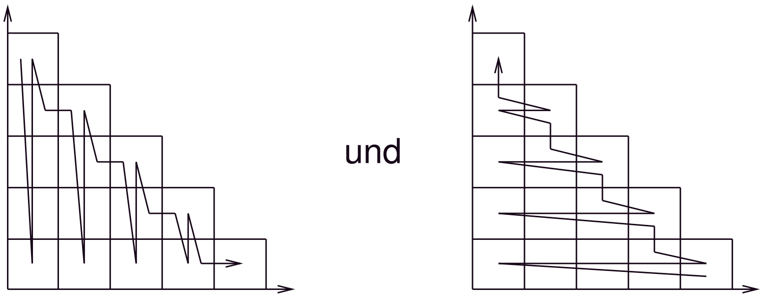


Abbildung 5.3: Der Q-Zyklus

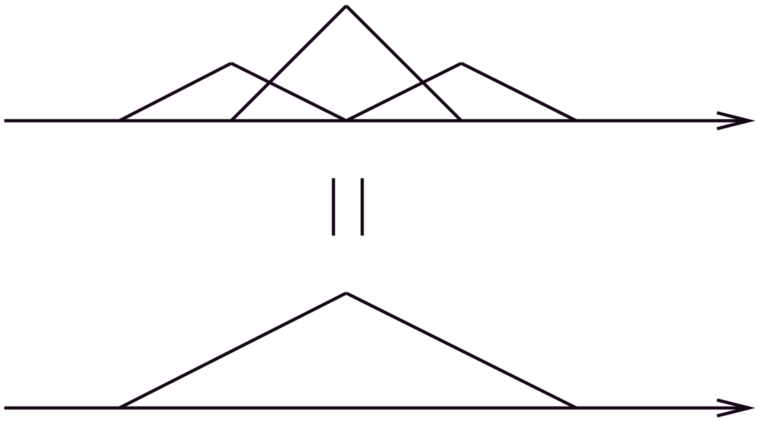


Abbildung 5.4: Hierarchische Basis Funktionen

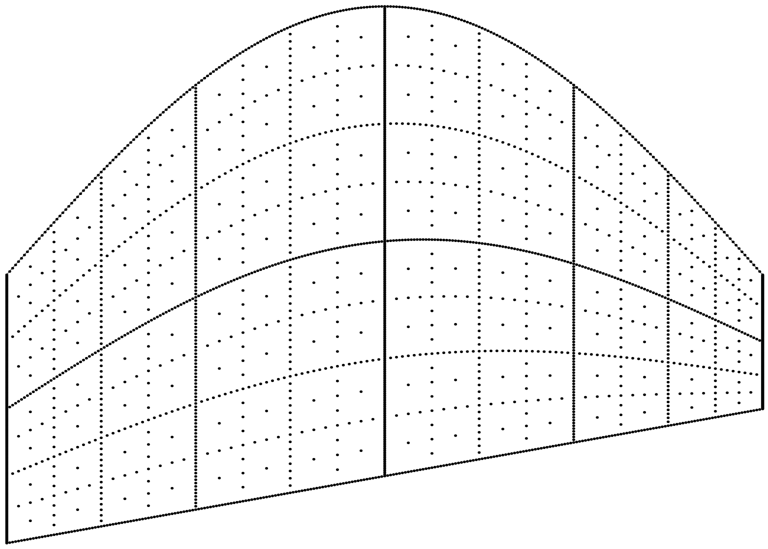


Abbildung 5.5: Das dünne Gitter $\mathcal{D}_8$ transformiert auf das Gebiet Ψ.

Kapitel 6

Historische Entwicklung dünner Gitter

Dünne Gitter wurden schon 1962 von Smoljak [34] zur numerischen Integration und Interpolation mit trigonometrischen Polynomen entwickelt. Interessant an dieser Arbeit ist die konsequente Verwendung eines Tensorproduktansatzes sowohl bei der Konstruktion der Räume als auch bei der Definition der Normen auf diesen Räumen. Dies führt zu einem sehr eleganten Ansatz zur Verwendung von dünnen Gittern, was jedoch den Nachteil in sich birgt, daß man diesen Ansatz nur schwer verwenden kann, wenn sich die Problemstellung nicht konsequent als Tensorprodukt formulieren läßt. Dies ist zum Beispiel bei einer stückweise multilinearen Interpolation zusammen mit der H^1-Norm der Fall.

Einen anderen Weg zur Interpolation von Funktionen auf dünnen Gittern erhält man mit Hilfe der Boolschen Summe $P_1 \oplus P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$ (siehe [14]). Gordon verwendete diesen Weg zur Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen (siehe [15]). Dabei wurden dünne Gitter jedoch nicht global verwendet — so wie von Bungartz in [9] — sondern nur lokal zur Konstruktion von neuen finiten Elementen. Man kann dieses Verfahren in folgender Weise beschreiben. Zuerst legt man mehrere dünne Gitter einer festen Tiefe — im wesentlichen der Tiefe 1 — nebeneinander. Dann wird die Differentialgleichung auf dem entstehenden Gitter diskretisiert. Bei einer Verfeinerung wird nicht die Tiefe des dünnen Gitters sondern die Anzahl der verwendeten lokalen dünnen Gitter erhöht.

Die Eigenschaften der Interpolation auf dünnen Gittern mit Hilfe der Boolschen Summe wurden von Delvos in [11] genauer untersucht. Er entdeckte, daß man diese Interpolation durch eine bestimmte Formel genau beschreiben kann. Diese Formel wurde später in [19] Kombinationsformel genannt und zur Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen verwendet. Die Boolsche Summe kann man aber auch bei der näherungsweisen Integration von Funktionen und der schnellen Fourier-Transformation anwenden. Eine

Untersuchung der Konvergenz dieser Verfahren abhängig von der Tiefe der verwendeten dünnen Gitter findet man in [12] und [2].

In [41] wurde von Zenger ein neuer Ansatz zur Konstruktion von dünnen Gittern entwickelt. Dieser Ansatz verwendet eine geeignete hierarchische Basis und bietet viele Vorteile. Zum einen erhält man in einer sehr natürlichen Art und Weise adaptive dünne Gitter. Zum anderen kann man mit diesem Ansatz den Fehler bei der Dünngitterinterpolation einfach berechnen. Schließlich führt die hierarchische Basis zu einer natürlichen Diskretisierung von elliptischen Differentialgleichungen mit Hilfe des Galerkin-Ansatzes.

Weitere Informationen zur Interpolation von Funktionen auf dünnen Gittern findet man in [9], [24] und [42]. Zur näherungsweisen Integration von Funktionen und zur Fourier-Transformation gibt es weitere Beiträge in [4] und [36], wobei in [36] dünne Gitter „hyperbolic crosspoints“ genannt werden.

Literaturverzeichnis

[1] R. Balder. *Adaptive Verfahren für elliptische und parabolische Verfahren auf dünnen Gittern.* Dissertation, Technische Universität München, 1994.

[2] G. Baszenski and F.-J. Delvos. A Discrete Fourier Transform Scheme for Boolean Sums of Trigonometric Operators. In C. Chui, W. Schempp, and K. Zeller, editors, *Multivariate Approximation Theory IV*, International Series of Mathematics, pages 15–24. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1989.

[3] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1978.

[4] T. Bonk. *Ein rekursiver Algorithmus zur adaptiven numerischen Quadratur mehrdimensionaler Funktionen.* Dissertation, Technische Universität München, 1995.

[5] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1992.

[6] A. Brandt. Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems. *Math. Comp.*, 31(138):333–390, 1977.

[7] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1994.

[8] H. Bungartz, M. Griebel, D. Röschke, and C. Zenger. A Proof of Convergence for the Combination Technique for the Laplace Equation Using Tools of Symbolic Computation. In G. Jacob and N.E. Oussous and S. Steinberg, editor, *Proceedings of the international IMACS Symposium on Symbolic Computation, Lille, 14.-17.6.1993.* IMACS/USTL, 1993.

[9] H.-J. Bungartz. *Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson-Gleichung.* Dissertation, Technische Universität München, 1992.

[10] P. de Zeeuw. Development of semi-coarsening and sparse-grid techniques. Report NM-R9504, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1995.

[11] F.-J. Delvos. d-Variate Boolean Interpolation. *Journal of Approximation Theory*, pages 99–114, 1982.

[12] F.-J. Delvos and H. Nienhaus. A Trivariate Boolean Cubature Scheme. In C. Chui, W. Schempp, and K. Zeller, editors, *Multivariate Approximation Theory IV*, International Series of Mathematics, pages 115–122. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1989.

[13] T. Dornseifer and C. Pflaum. Discretization of Elliptic Differential Equations on Curvilinear Bounded Domains with Sparse Grids. *to appear in Computing.*

[14] W. Gordon. Distributive Lattices and the Approximation of Multivariate Functions. In I. J. Schoenberg, editor, *Approximations with Special Emphasis on Spline Functions*, pages 223–277. Academic Press: New York, London, 1969.

[15] W. Gordon and C. Hall. Transfinite Element Methods: Blending-Function over Arbitrary Curved Element Domains. *Numer. Math.*, 21:109–129, 1973.

[16] M. Griebel and W. Huber. Turbulence simulation on sparse grids using the combination method. SFB Bericht 342/19/94 A, Institut für Informatik, TU München, Dezember 1994.

[17] M. Griebel, W. Huber, U. Rüde, and T. Störtkuhl. The combination technique for parallel sparse-grid-preconditioning and -solution of PDEs on multiprocessor machines and workstation networks. In L. Bougé, M. Cosnard, Y. Robert, D. Trystram, editor, *Proceedings of the Second Joint International Conference on Vector and Parallel Processing CONPAR/VAPP V 92, 634, pp. 217-228.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992. Also available as SFB Bericht 342/11/92 A.

[18] M. Griebel and P. Oswald. On additive Schwarz preconditioners for sparse grid discretizations. *Numer. Math.*, 66:449–463, 1994.

[19] M. Griebel, M. Schneider, and C. Zenger. A combination technique for the solution of sparse grid problems. In P. de Groen and R. Beauwens, editors, *in Proceedings of the IMACS International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra, Brüssel, April, 1991.* Elsevier, Amsterdam, 1992.

[20] M. Griebel and V. Thurner. Solving CFD-problems efficiently by the combination method. *CFD-News*, 1993.

[21] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Monographs and Studies in Mathematics 24. Pitman, Boston, London, Melbourne, 1985.

[22] C. Großmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart, 1992.

[23] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart, 1986.

[24] P. Hemker. Sparse-grid finite-volume multigrid for 3D-problems. *Advances in Computational Mathematics*, 4:83–110, 1995.

[25] P. Lesaint and M. Zlamal. Superconvergence of the gradient of finite element solutions. *RAIRO Analyse numérique*, 13:139–166, 1979.

[26] S. McCormick. *Multilevel Adaptive Methods for Partial Differential Equations*, volume 6 of *Frontiers in Applied Mathematics.* SIAM, Philadelphia, 1987.

[27] S. McCormick. *Multilevel Projection Methods for Partial Differential Equations*, volume 62 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics.* SIAM, Philadelphia, 1992.

[28] K. Meyberg. *Algebra, Teil 1.* Carl Hanser Verlag, München , Wien, 1980.

[29] N. H. Naik and J. V. Rosendale. The improved robustness of multigrid elliptic solvers based on multible semicoarsening grids. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(1):215–229, 1993.

[30] S. M. Nikol'skiǐ. A Classification of Differentiable Functions in some Fundamental Spaces with Dominant Mixed Derivative. In I. G. Petrovskiǐ and S. M. Nikol'skiǐ, editors, *Theory and Applications of Differentiable Functions of Several Variables*, volume 77 of *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, pages 160–187. American Mathematical Society, 1965. English Translation.

[31] P. Oswald. *Multilevel Finite Element Approximation.* Teubner Skripten zur Numerik, Hrsg.: H.G.Bock, W.Hackbusch, R.Rannacher. Teubner, Stuttgart, 1994.

[32] C. Pflaum. Anwendung von Mehrgitterverfahren auf dünnen Gittern. Technische Universität München, Diplomarbeit, 1992.

[33] C. Pflaum. Discretization of Second Order Elliptic Differential Equations on Sparse Grids. In C. Bandle, J. Bemelmans, M. Chipot, J. Saint Jean Paulin, and I. Shafrir, editors, *Progress in partial differential equations, Pont-á-Mousson 1994, vol. 2, calculus of variations, applications and computations*, Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman, June 1994.

[34] S. A. Smoljak. Quadrature and Interpolation Formulas for Tensor Products of Certain Classes of Functions. *Soviet Mathematics*, 4:240–243, 1963. Englische Übersetzung von Doklady Akademii Nauk SSSR.

[35] T. Störtkuhl. *Ein numerisches adaptives Verfahren zur Lösung der biharmonischen Gleichung auf dünnen Gittern.* Dissertation, Technische Universität München, 1994.

[36] V. N. Temlyakov. On the Behavior of the Partial Sums, over hyperbolic crosses, of Fourier Series of Periodic Functions of Several Variables. In S. M. Nikol'skiĭ, editor, *Differential Equations and Function Spaces*, volume 192 issue 3 of *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, pages 209–218. American Mathematical Society, 1992. English Translation.

[37] J. F. Šarygin. The Use of Number Theoretic Methods of Integration in the Case of Non-Periodic Functions. *Soviet Mathematics*, 1, 1960. Englische Übersetzung von Doklady Akademii Nauk SSSR.

[38] J. Wloka. *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner, Stuttgart, 1982.

[39] H. Yserentant. On the multi-level splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49:379–412, 1986.

[40] H. Yserentant. Two preconditioners based on the multi-level splitting of the finite element spaces. *Numer. Math.*, 58:163–184, 1990.

[41] C. Zenger. Sparse grids. In W. Hackbusch, editor, *Parallel Algorithms for Partial Differential Equations: Proceedings of the Sixth GAMM-Seminar, Kiel, January 1990*, volume 31 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg, Braunschweig, 1991.

[42] A.-H. Zhou. A Sparse Multiresolution Technique. In J. zhi Cui, Z. ci Shi, and D. liu Wang, editors, *Scientific and Engineering Computing*, pages 258–261. National Defence Industry Press, Beijing, China, 1993.

[43] S. Zimmer. Lösung der Stokes-Gleichungen durch ein adaptives Verfahren mit hierarchischen Basisfunktionen. Technische Universität München, Diplomarbeit, 1991.

Index