Institut für Informatik
der
Technischen Universität München

Ein numerisches adaptives Verfahren zur Lösung der biharmonischen Gleichung auf dünnen Gittern

Thomas Störtkuhl

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Informatik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ. Prof. Dr. Arndt Bode

Prüfer der Dissertation:

1. Univ. Prof. Dr. Christoph Zenger
2. Univ. Prof. Dr. Ronald Hoppe

Die Dissertation wurde am 25.10.1994 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Informatik am 25.1.1995 angenommen.

Ein numerisches adaptives Verfahren zur Lösung der biharmonischen Gleichung auf dünnen Gittern

Zusammenfassung

In der vorgestellten Arbeit wird die Dünn-Gitter Technik, die eine neue, sehr effiziente Variante der Finite-Element Methode darstellt, zu einem adaptiven Lösungsverfahren für die biharmonische Gleichung weiterentwickelt. Die Diskretisierung der Gleichung erfolgt in einem Variationsansatz mit hierarchischen hermitesch kubischen Ansatzfunktionen. Die Separierbarkeit der Basisfunktionen in den Variablen der Raumrichtungen ermöglicht eine Verallgemeinerung auf Probleme beliebiger Dimension. In Bezug auf die Anzahl der Freiheitsgrade ist das Dünn-Gitter Verfahren von höherer Approximationsordnung als vergleichbare Methoden auf vollen Gittern. So erreicht man z.B. mit kubischen Elementen auf dünnen Gittern eine Approximationsgüte gemessen in der Energienorm, die man auf vollen Gittern mit Elementen 7. Grades erhält. Die Verwendung von Binärbäumen als dynamische Datenstruktur erlaubt weiter eine einfache Realisierung einer adaptiven Gitterverfeinerung (h-Adaptivität). Der hierarchische Ansatz eröffnet aber auch die Möglichkeit, im Sinne der Adaptivität von den einem Gitterpunkt zugeordneten Basisfunktionen nur diejenigen zu verwenden, die einen gewissen vorgegebenen Mindestbeitrag zur Approximation beisteuern. Diese Reduktion der Freiheitsgrade auf einem Gitterpunkt führt zu einer weiteren Verringerung des Rechen- und Speicheraufwandes ohne wesentlichen Verlust an Genauigkeit der berechneten Lösung.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der numerischen Berechnung der Navier-Stokes Gleichungen kommt in der Praxis zur Simulation von Strömungen große Bedeutung zu. Für den Fall der instationären Strömung inkompressibler Fluide wird häufig ein Verfahren zur Berechnung der Stokes Gleichungen als Kern eines Lösungsverfahrens für die Navier-Stokes Gleichungen verwendet [10, 24]. In der vorliegenden Arbeit stelle ich ein numerisches Verfahren zur Lösung der zweidimensionalen Stokes Gleichungen auf dünnen Gittern vor, das sich durch hohe Effizienz hinsichtlich des Speicher- und Rechenaufwandes auszeichnet.
Die Idee der dünnen Gitter wurde in [32] entwickelt. Dort wird gezeigt, daß zur Darstellung einer Funktion bei vorgegebener Genauigkeit auf dünnen Gittern erheblich weniger Gitterpunkte benötigt werden als auf den üblichen vollen Gittern. Ein adaptives Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung auf dünnen Gittern wird in [8] eingehend untersucht.
Zunächst möchte ich hier einige Lösungverfahren für die Stokes Gleichungen und die biharmonische Gleichung anführen. Ein sehr bekanntes Verfahren zur Lösung der Stokes Gleichungen in den primitiven Variablen wird in [7] vorgeschlagen. Auf einem sogenannten *staggered grid* werden die Impulsgleichungen und die Druckgleichung mit Hilfe der distributiven Gauß-Seidel Relaxation in einem Mehrgitterverfahren gelöst. In [30] wird die distributive Gauß-Seidel Iteration in einen allgemeineren Rahmen der *transforming smoother* gestellt. Robuste Glätter, die auf der unvollständigen LU-Zerlegung beruhen, werden für Mehrgitterverfahren zur Lösung der Stokes als auch der Navier-Stokes Gleichungen konstruiert. In [34] wird bereits ein adaptives Verfahren auf dünnen Gittern zur Lösung der Stokes Gleichungen in ihrer Formulierung mit Hilfe der Wirbelstärke ω und der Stromfunktion ψ vorgestellt. Die Diskretisierung des Systems zweier partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung erfolgt hier mit hierarchischen bilinearen Ansatzfunktionen.
Zur Lösung der biharmonischen Gleichung wird in [5] eine Finite Differenzen Approximation durchgeführt und ein direktes Lösungsverfahren mit nur $O(N^2)$ Rechenoperationen entwickelt. Ein Mehrgitterverfahren zur Lösung der biharmonischen Gleichung wird in [22] vorgeschlagen, wobei hier das Sattelpunktsproblem aus zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung mittels Finite Differenzen diskretisiert wird. Ein weiteres effizientes Verfahren zur Lösung von Randwertproblemen mit Nebenbedingung stellt der vorkonditionierte UZAWA-Algorithmus dar [21].

Gebietszerlegungsmethoden werden in [33] zur Lösung der Finite-Element Diskretisierung der biharmonischen Gleichung mit konformen C^1 Elementen angewendet. Insbesondere werden optimale Konvergenzraten für additive Schwarz Methoden bewiesen. Multilevel Vorkonditionierer werden auch in [23] entwickelt. Hier wird eine Verallgemeinerung des BPX-Vorkonditionierers (siehe [19]) für die Bogner-Fox-Schmit Rechteckselemente auf die biharmonische Gleichung vorgestellt und eine optimale Abschätzungen für die Konditionszahl des vorkonditionierten Systems gezeigt. Aber auch für die nichtkonforme Diskretisierung mit Adini Elementen wird ein optimaler multilevelartiger Vorkonditionierer vorgestellt.
In meiner Arbeit entwickle ich nun ein adaptives Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen 4. Ordnung auf dünnen Gittern. Die Hauptmerkmale des Verfahrens liegen in der Diskretisierung der Gleichung in einem konformen Ansatz mit hierarchischen bikubischen Basisfunktionen, in der iterativen Berechnung der Lösung und in der Realisierung einer Adaptivität, die sowohl eine Gitterverfeinerung als auch eine effiziente Auswahl der Freiheitsgrade auf jedem Gitterpunkt erlaubt.
Nach einer kurzen Darstellung der mit der biharmonischen Gleichung beschriebenen physikalischen Phänomene in Kapitel 2, führe ich im ersten Hauptteil, das die Kapitel 3 bis 5 umfaßt, die *hierarchische hermitesch kubische Basis* ein und diskutiere ihre Interpolations- und Approximationseigenschaften. Der zweite Hauptteil mit den Kapiteln 6 bis 8 beinhaltet die Darstellung des numerischen Verfahrens zur Lösung der biharmonischen Gleichung auf dünnen Gittern. Numerische Ergebnisse zu einigen Testbeispielen und zum Problem der *lid driven cavity* werden präsentiert.
Im einzelnen erfolgt eine Untergliederung in folgende Kapitel:
Kapitel 2 führt die biharmonische Gleichung ein und zeigt insbesondere den Zusammenhang mit den Stokes Gleichungen in zwei Dimensionen.
In Kapitel 3 wird die hierarchische hermitesch kubische Basis in d Dimensionen konstruiert. Ausgehend von der eindimensionalen hierarchischen Basis wird durch einen Produktansatz die d-dimensionale Basis gewonnen. Durch die eingeführte Hierarchie in den Basisfunktionen wird eine Zerlegung des Funktionenraumes in eine direkte Summe von Unterräumen induziert. Mit Hilfe dieser Unterräume wird anschließend der Funktionenraum des regulären dünnen Gitters $\tilde{B}_n^{(d)}$ aufgebaut. Dieser Funktionenraum stellt einen konformen Ansatzraum für die Diskretisierung einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung dar.

Das Kapitel 4 beschäftigt sich mit den Interpolationseigenschaften des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n^{(d)}$. So werden Fehlerschranken in der L_2-Norm und Maximumnorm für die Interpolation d-dimensionaler Funktionen hergeleitet. Die Beweise nutzen dabei die hierarchische Struktur des Funktionenraumes $\tilde{B}_n^{(d)}$. Die Approximationseigenschaften dieses Raumes als Ansatz- und Testraum zur Lösung einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung in einem Galerkin Verfahren werden in Kapitel 5 studiert. Fehlerschranken in der H^1- und H^2-Sobolev Norm für zwei und drei Dimensionen bewiesen. Die Approximationsordnung des Raumes $\tilde{B}_n^{(d)}$ wird im Vergleich zu der des Voll-Gitter Raumes $B_n^{(d)}$ untersucht. Ferner wird ein adaptives Verfahren zur weiteren Verbesserung der Approximationsgüte vorgestellt.
Mit Kapitel 6 beginne ich die Beschreibung des numerischen Lösungsverfahrens. Das rekursive Verfahren zur Berechnung des Residuums des Gleichungssystems wird eingehend dargestellt. Anschließend werden auch die algebraischen Eigenschaften der Gauß-Seidel Iteration untersucht.
In Kapitel 7 präsentiere ich numerische Ergebnisse für einige Testprobleme. Die in Kapitel 5 bewiesenen Approximationsordnungen werden bestätigt und die Eigenschaften des adaptiven Verfahrens studiert.
In Kapitel 8 wird die numerische Berechnung der Stokes Gleichungen für das Modellproblem der *lid driven cavity* durchgeführt. Hier kommt das adaptive Verfahren zum Einsatz. Weiter wird ein modifiziertes Problem der *lid driven cavity*, das mit den Bedingungen eines physikalischen Experimentes besser übereinstimmt, berechnet.

An dieser Stelle möchte ich all meinen Kollegen für ihre Unterstützung und Zusammenarbeit danken. Bei Christoph Pflaum bedanke ich mich für die vielen wichtigen Hinweise bei der Erstellung dieser Arbeit. Für das gewissenhafte Korrekturlesen danke ich meinem Kollegen Robert Balder, der mit seinen Vorschlägen viel zum Gelingen der Arbeit beitrug. Mein großer Dank gilt auch Dr. Hans-Joachim Bungartz, der auf all meine Fragen mit Geduld einging. Viel verdanke ich Dr. habil. Michael Griebel, der immer zu Diskussionen bereit war und mir zahlreiche wichtige Anregungen gab. Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei Stefan Zimmer für den regen Gedankenaustausch und seine große Hilfsbereitschaft.
Mein herzlichster Dank gilt jedoch meinem Doktorvater Prof. Dr. Christoph Zenger für die Überlassung des Themas und seine sehr anregende und en-

gagierte Betreuung. Ihm verdanke ich grundlegende Einsichten, die das Entstehen dieser Arbeit erst möglich gemacht haben. Nicht nur im fachlichen Bereich sind seine Ideen und Gedanken für mich eine Herausforderung.
Beim Forschungsverbund für technisch wissenschaftliches Hochleistungsrechnen (FORTWIHR) bedanke ich mich für die materielle Unterstützung während der letzten zweieinhalb Jahre.

2 Die Problemstellung

In diesem Kapitel wird die biharmonische Randwertaufgabe eingeführt. In der linearen Elastizitätstheorie tritt sie auf bei der Beschreibung der Durchbiegung von Platten unter vertikaler Belastung. Es besteht aber auch ein Zusammenhang mit den Stokes Gleichungen aus der Strömungsmechanik, der in einem Unterkapitel eigens erläutert wird.

2.1 Die biharmonische Gleichung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die numerische Berechnung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung des Typs

$$\Delta^2 u \quad = \quad f \qquad \text{in} \quad \Omega \subset \Re^2. \tag{1}$$

Mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{rcl} u & = & g_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & g_2 \end{array}\right\} \quad \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega \tag{2}$$

ist das erste Dirichlet'sche biharmonische Randwertproblem definiert. Mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ wird wie üblich der Laplace-Operator bezeichnet, mit $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen auf dem Rand Γ von Ω. f, g_1 und g_2 sind gegebene Funktionen. In der Elastizitätstheorie ist die Gleichung (1) als Kirchhoffsche Plattengleichung bekannt. Sie beschreibt die Durchbiegung einer dünnen ebenen Platte bei vertikaler Belastung zu ihrer Mittelebene. Die Funktion f stellt dann die Flächenlast dar und u beschreibt die vertikale Auslenkung der Platte. Die Randbedingungen (2) führen mit $g_1 = g_2 = 0$ zu dem Problem der fest eingespannten Platte.
Mit der Materialkonstanten σ (Poissonschen Zahl oder Querkontraktionszahl genannt) beschreiben die natürlichen Randbedingungen

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial^3 u}{\partial n^3} + (2-\sigma)\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial n \partial s^2} & = & 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \sigma\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{auf} \quad \Gamma$$

schließlich die Platte mit durchhängenden Rändern. Hierbei bezeichnet $\frac{\partial}{\partial s}$ die Tangentialableitung entlang des Randes Γ.

Die Energie der deformierten Platte läßt sich angeben durch (siehe [20])

$$\mathcal{J}_{(u)} = \frac{E \cdot b^3}{24(1-\sigma^2)} \cdot \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right. \tag{3}$$
$$+ \quad 2 \cdot (1-\sigma) \left. \left[(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \right\} dxdy.$$

E bezeichnet das Elastizitätsmodul und b die Dicke der Platte. Das Minimum der Energie stellt den Gleichgewichtszustand der Platte dar und wird durch die erste Variation der Energie (3) bestimmt. Zu berücksichtigen sind dabei die äußeren Kräfte, die die Platte auslenken. Als zugehörige Euler-Lagrange Gleichung erhält man die biharmonische Gleichung (1).
Die biharmonische Gleichung kann in das gekoppelte Differentialgleichungssytem

$$\left. \begin{array}{rcl} \Delta v &=& f \\ \Delta u &=& v \end{array} \right\} \quad \text{in} \quad \Omega \tag{4}$$

übergeführt werden mit z.B. den Dirichlet'schen Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{rcl} u &=& g_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &=& g_2 \end{array} \right\} \quad \text{auf} \quad \Gamma. \tag{5}$$

Das System von Differentialgleichungen 2. Ordnung (4) definiert ein Sattelpunktsproblem. Für die Funktion v liegen keine Randbedingungen vor, für u hingegen die zwei Randbedingungen (5). Aus der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ und der zweiten Gleichung von (4) müssen daher die Werte von v auf dem Rand Γ berechnet werden. Die Gleichungen koppeln daher über den Rand miteinander.

2.2 Die Stokes Gleichungen

Die laminare Strömung normal viskoser Fluide (Newtonscher Fluide) wird durch die Navier-Stokes Gleichungen beschrieben. Im Grenzfall eines unendlich zähen Fluids können die Trägheitskräfte und somit die konvektiven Terme in den Impulsgleichungen vernachlässigt werden. Die Navier-Stokes Gleichungen gehen für diesen Grenzfall einer Kriechströmung mit Reynoldszahl $Re \to 0$ in die Stokes Gleichungen über. Ich beschränke mich auf den zweidimensionalen Fall. Dann lauten die Gleichungen auf dem Gebiet $\Omega \subset \Re^2$

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + \tfrac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\ -\Delta u_2 + \tfrac{\partial p}{\partial x_2} &= 0 \\ -\tfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - \tfrac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

u_1 und u_2 stellen die Geschwindigkeiten in x_1- und x_2-Richtung dar und p bezeichnet den Druck. Das Differentialgleichungssystem (6) ist elliptisch [15]. Auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ werden nun die Geschwindigkeiten vorgegeben, also

$$u_1|_\Gamma = w_1 \quad \text{und} \quad u_2|_\Gamma = w_2 \tag{7}$$

mit gegebenen Funktionen w_1 und w_2. Physikalisch sinnvolle Dirichlet-Randbedingungen sind etwa

$$u_1 \mid_\Gamma = 0 \qquad \text{und} \qquad u_2 \mid_\Gamma = 0.$$

an ruhenden Wänden des Strömungsgebietes („no slip" Bedingung). Die Geschwindigkeiten auf dem Rand sind aber nicht beliebig wählbar, sondern müssen so gewählt werden, daß die dritte Gleichung von (6), die sogenannte Kontinuitätsgleichung, erfüllt wird. Die Kontinuitätsgleichung ist Ausdruck des Massenerhaltungssatzes bei inkompressiblen Fluiden (Dichte $\rho = const.$). Mit dem Gauß'schen Intergralsatz gilt dann

$$0 = \int\limits_\Omega div(\vec{u}) dx_1 dx_2 = \int\limits_\Gamma \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int\limits_\Gamma \vec{w} \cdot \vec{n} ds$$

für $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ und $\vec{w} = (w_1, w_2)^T$. Die Kompatibilitätsbedingung

$$\int\limits_\Gamma \vec{w} \cdot \vec{n} ds = 0 \tag{8}$$

muß somit von den Randwerten erfüllt werden. Der Druck p, der nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, wird üblicherweise durch die Normierung $\int\limits_\Omega p dx_1 dx_2 = 0$ festgelegt. Damit besitzt (6) eine eindeutige Lösung [15]. Die Variable p kann auch als Lagrange-Parameter verstanden werden. Die Kontinuitätsgleichung stellt dann die Nebenbedingung dar, unter der das partielle Differentialgleichungssytem (6) zu lösen ist. Durch (6) ist damit ein

Sattelpunktsproblem definiert (siehe [6]).
In den ersten zwei Gleichungen in (6) kann die Druckvariable p eliminiert werden. Durch kreuzweises Differenzieren transformieren sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= 0 \\ -\Delta\psi &= \omega. \end{aligned} \tag{9}$$

ω bezeichnet die Wirbelstärke (vorticity) und ψ die Stromfunktion (streamfunction). Dabei sind ω und ψ wie folgt durch u_1 und u_2 definiert:

$$\begin{aligned} \omega &= \tfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ u_1 &= \tfrac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ u_2 &= -\tfrac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{aligned} \tag{10}$$

Die Wirbelstärke ω beschreibt die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes und die Höhenlinien der Stromfunktion ψ stellen die Stromlinien dar. Die Kontinuitätsgleichung ist automatisch erfüllt, da gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Aus den Randbedingungen (7) können die Randbedingungen für ψ abgeleitet werden (siehe [24]). Sei $\vec{n} = (n_1, n_2)^T$ der äußere Normalenvektor auf Γ und $\vec{s} = (-n_2, n_1)^T$ der Tangentialvektor. Ferner sei ein beliebiger Punkt $x_0 \in \Gamma$ gegeben und $\psi(x_0) = 0$ gewählt. Dann erhalte ich für alle $x \in \Gamma$ die Randbedingungen

$$\psi|_\Gamma = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi}{\partial s} ds = \int_{x_0}^{x} \vec{w} \cdot \vec{n} ds = g_1 \tag{11}$$

und

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -\vec{w} \cdot \vec{s} = g_2. \tag{12}$$

Gilt z.B. $\psi|_\Gamma = 0$, so stellt der Rand Γ selbst eine Stromlinie dar.
Gleichung (9) kann ich weiter umformen, indem ich ω aus der zweiten Gleichung in die erste Gleichung einsetze. Dies führt auf die biharmonische Gleichung

$$\Delta^2 \psi = 0 \tag{13}$$

für die Stromfunktion ψ mit den ersten Dirichlet'schen Randbedingungen (11) und (12). Das zugehörige Energiefunktional lautet in diesem Fall

$$\mathcal{J}_{(\psi)} = \int_{\Omega} (\Delta\psi)^2 dx_1 dx_2. \qquad (14)$$

Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun die numerische Berechnung von Lösungen der biharmonischen Gleichung (13). Zur Diskretisierung von (13) werde ich die Finite-Element Methode verwenden. Das folgende Kapitel beschäftigt sich daher mit dem Aufbau eines geeigneten Funktionenraumes für einen konformen Finite-Element Ansatz.

3 Die d-kubische Dünn-Gitter Basis

Um die Differentialgleichung (1) für homogene Dirichlet'sche Randbedingungen mit Hilfe der Finite-Element Methode in einem konformen Ansatz lösen zu können, ist es notwendig, einen endlich dimensionalen Funktionenraum $V \subset H^2_{0(\Omega)}$ zu konstruieren. Zu diesem Zweck werde ich in diesem Kapitel zuerst die eindimensionale hierarchische kubische Basis und ihre Eigenschaften erläutern. Durch einen Produktansatz werde ich sodann die eindimensionale Basis zur d-dimensionalen Basis ausbauen. Die Hierarchie der eindimensionalen Basisfunktionen werde ich jedoch übernehmen und so eine d-kubische hierarchische Basis konstruieren. Je nachdem welche Unterräume dann verwendet werden, erhält man eine Basis des endlich dimensionalen Voll-Gitter-Raumes $B_n^{(d)} \subset H^2_{0(\Omega^{(d)})}$ oder des sogenannten Dünn-Gitter-Raumes $\tilde{B}_n^{(d)} \subset H^2_{0(\Omega^{(d)})}$ [8, 32]. Die Basis des Raumes $B_n^{(2)}$ erhält man auch durch eine hierarchische Transformation der Basis, die den konformen Raum der Bogner-Fox-Schmidt (BFS) Elemente aufspannt.

3.1 Die eindimensionale Basis

Als eindimensionales Analogon der biharmonischen Gleichung möchte ich zuerst das Beispiel

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f \quad \text{in} \quad I = (0,1) \tag{15}$$

mit den homogenen Randbedingungen

$$u|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = u|_{x=1} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 0 \tag{16}$$

angeben. Aus der Elastizitätstheorie ist (15) als Biegegleichung bekannt und beschreibt die vertikale Durchbiegung eines Balkens unter Beanspruchung aufgebrachter Momente. Die Lösungen von (15) mit den Randbedingungen (16) sind im Sobolev Raum $H^2_{0(I)}$ zu suchen. Im weiteren werde ich homogene Randbedingungen annehmen. Die Aufgabe besteht nun also darin, endliche Finite-Element Räume $V \subset H^2_0$ zu konstruieren.

3.1.1 Die hermitesche kubische Basis

Um die Differentialgleichung (15) auf dem Computer berechnen zu können, muß die Gleichung diskretisiert werden. Zur Diskretisierung der Differential-

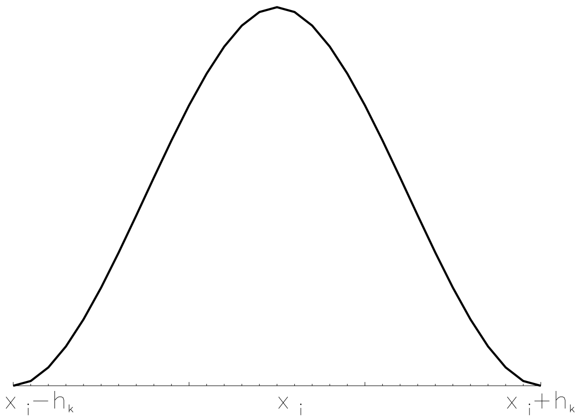


Abbildung 1: Die Basisfunktion $\phi^0_{k,i}$ vom Typ I an der Stelle x_i des Gitters G_k mit $h_k = 2^{-k}$.

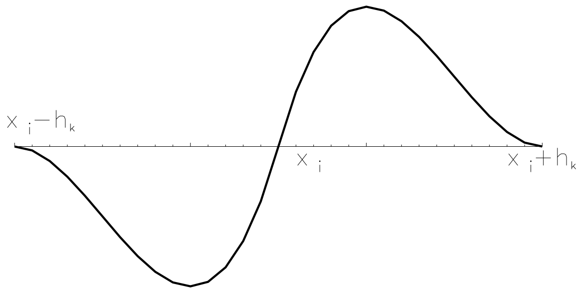


Abbildung 2: Die Basisfunktion $\phi^1_{k,i}$ vom Typ II an der Stelle x_i des Gitters G_k mit $h_k = 2^{-k}$.

gleichung (15) wähle ich in einem Finite-Element-Ansatz das kubische hermitesche Element vom C^1-Typ. Dieses konforme Element wird gebildet durch die in Abb.1 und Abb.2 gezeigten Basisfunktionen [29], die einen Träger der Länge $2 \cdot h_k$ besitzen. Zur Kennzeichnung der zwei Typen von Basisfunktionen wird der zusätzliche Index $\alpha \in \{0, 1\}$ eingeführt. So bezeichnet z.B. $\phi^0_{k,i}$ die Basisfunktion vom Typ I an der Stelle x_i. Die Basisfunktionen werden so skaliert, daß sie der Beziehung

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \phi^\alpha_{k,j(x_i)} = \delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} \tag{17}$$

genügen. Das bedeutet, daß die Funktion $\phi^0_{k,i}$ vom Typ I im Mittelpunkt x_i seines Trägers den Wert 1 annimmt und $\phi^1_{k,i}$ dort verschwindet. Hingegen gilt für die Ableitungen $\frac{\partial \phi^0_{k,i}}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial \phi^1_{k,i}}{\partial x} = 1$ im Mittelpunkt x_i. Ich erhalte unter Berücksichtigung von (17) als Basisfunktionen

$$\phi^0_{k,i} = \begin{cases} -2 \cdot \frac{(x+h_k-x_i)^3}{h_k^3} + 3 \cdot \frac{(x+h_k-x_i)^2}{h_k^2} & \text{für} \quad x_i - h_k \le x \le x_i \\ -2 \cdot \frac{(h_k+x_i-x)^3}{h_k^3} + 3 \cdot \frac{(h_k+x_i-x)^2}{h_k^2} & \text{für} \quad x_i \le x \le x_i + h_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{18}$$

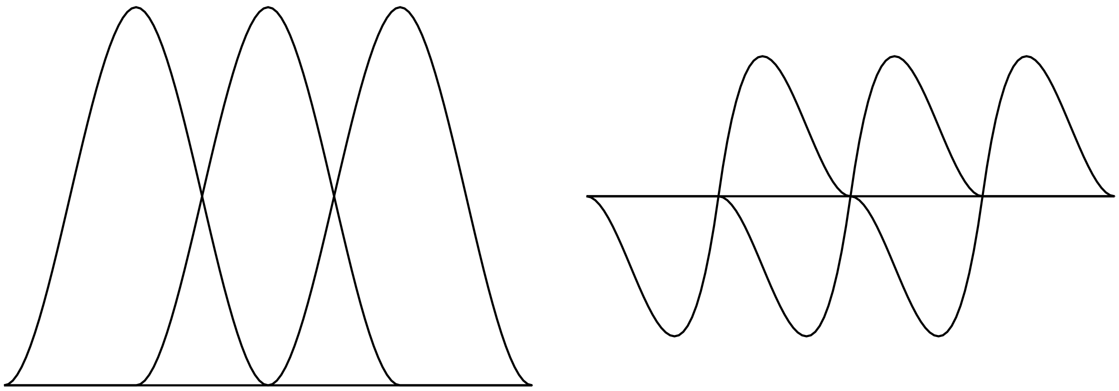


Abbildung 3: Die kubische Knotenbasis des Raumes B_2, $N = 4$.

und

$$\phi^1_{k,i} = \begin{cases} \frac{(x+h_k-x_i)^3}{h_k^2} - \frac{(x+h_k-x_i)^2}{h_k} & \text{für} \quad x_i - h_k \le x \le x_i \\ -\frac{(h_k+x_i-x)^3}{h_k^2} + \frac{(h_k+x_i-x)^2}{h_k} & \text{für} \quad x_i \le x \le x_i + h_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{19}$$

mit $h_k = 2^{-k}$. Die Basisfunktionen werden somit in Punkten $x_i \in (0,1)$ aufgesetzt. Die x_i definieren ein Gitter G_k. Sei also $I = [0,1]$ ein abgeschlossenes Intervall. Durch Verfeinerung des Intervalls I erhält man die Gitter $G_1, G_2, \ldots G_k \ldots$, $k = 1, 2 \ldots n$ mit den Gitterpunkten $x_i = i \cdot h_k$ und $h_k = \frac{1}{N_k}$, $i = 0 \ldots N_k$. Hierbei werden die Randpunkte des Intervalls mitberücksichtigt. $N_k = 2^k$ bezeichnet die Anzahl der Intervalle des Gitters G_k. Zu jeder Verfeinerungsstufe korrespondiert also ein eindimensionales äquidistantes Gitter G_k mit zugehöriger Maschenweite h_k und einem Satz von Basisfunktionen, die auf den inneren Gitterpunkten x_i mit $i = 1 \ldots N_k - 1$ aufgesetzt werden und die den endlich dimensionalen Raum B_k aufspannen. Da die Funktionen $\phi^\alpha_{k,i}$ einen stetigen Anschluß von Funktionswert und Ableitungswert in den Knotenpunkten x_i gewährleisten, sind die Räume B_k ineinander geschachtelt und es gilt

$$B_1 \subset B_2 \ldots \subset B_n \subset H^2_{0(I)} \tag{20}$$

Im Sinne von [29] sind die Basisfunktionen also uniform bis zum Grade 2, d.h. B_k ist im Funktionenraum $C^1_{0(I)}$ und im Sobolev Raum $H^2_{0(I)}$ enthalten.

Man erhält die in Abb.3 dargestellte kubische Knotenbasis. Jeder innere Gitterpunkt des Gitters G_k repräsentiert also zwei Freiheitsgrade. Eine Funktion $u \in B_k$ ist eindeutig festgelegt durch die Entwicklung nach den Basisfunktionen

$$u = \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{N_k-1} c_{k,i}^{\alpha} \cdot \phi_{k,i}^{\alpha} \quad \text{mit} \quad \phi_{k,i}^{\alpha} \in B_k, N_k = 2^k. \tag{21}$$

Den Koeffizienten $c_{k,i}^0$ entspricht der Funktionswert und den Koeffizienten $c_{k,i}^1$ der Wert der Ableitung an der Stelle x_i. Man erhält somit eine diskrete Darstellung der Funktion u durch die Koeffizienten $c_{k,i}^{\alpha}$.

Interpolationeigenschaft der kubischen Basis

Mit Hilfe der vorgestellten kubischen Knotenbasis kann eine Funktion f interpoliert werden. Es handelt sich hierbei um die Hermite-Interpolation [25, 27], denn in den zweifachen Stützstellen $x_i = i \cdot h_k$ des Gitters G_k werden die Funktionswerte $f(x_i) = f_i$ und die Werte der Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}|_{x_i} = f_i^x$ vorgegeben. Im folgenden werde ich eine Funktion als *genügend glatt* bezeichnen, wenn $f \in C^4_{([0,1])}$ und die Seminorm

$$|f| = \|\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\|_{\infty} \tag{22}$$

existiert und beschränkt ist. Für solch glatte Funktionen liefert die Standardfehleranalyse dann eine obere Schranke für den Interpolationsfehler in der Maximumnorm [25]

$$\|f - f_I\|_{\infty} \leq \frac{1}{16 \cdot 4!} \cdot h^4 \cdot |f|. \tag{23}$$

f_I bezeichnet hier den stückweise kubischen Interpolanten. Der Fehler von f^x kann ebenfalls abgeschätzt werden durch

$$\|f^x - f_I^x\|_{\infty} \leq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4!} \cdot h^3 \cdot |f|. \tag{24}$$

Ich untersuche nun den Interpolationsfehler für ein Polynom 4. Grades z.B. $f(x) = x^4$ auf dem Intervall $I = [0, h]$. Als Fehlerfunktion bei hermitescher kubischer Interpolation ergibt sich das Polynom $x^2 \cdot (x-h)^2$ und als maximale Fehler

$$\|f - f_I\|_{\infty} \leq x^2 \cdot (x-h)^2|_{\frac{h}{2}} = \frac{h^4}{16}$$

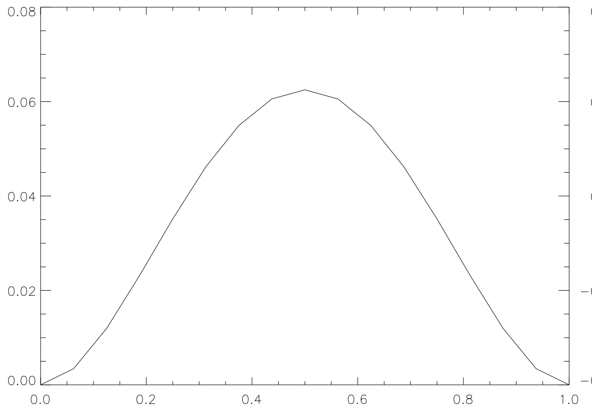


Abbildung 4: Die Fehlerfunktionen δf bei hermitesch kubischer Interpolation der Funktion f.

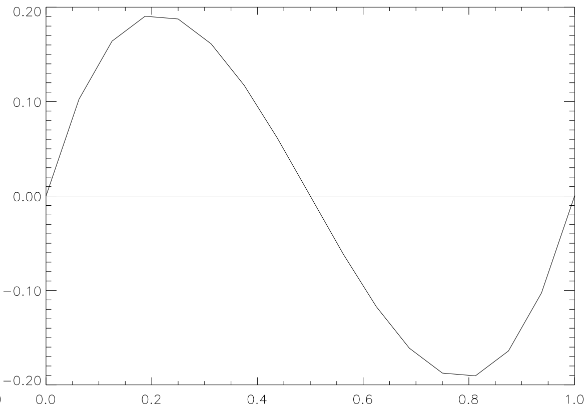


Abbildung 5: Die Fehlerfunktionen δf^x bei hermitesch kubischer Interpolation der Funktion f^x

bzw.

$$\|f^x - f_I^x\|_\infty \leq 2 \cdot x \cdot (x-h) \cdot (2x-h)|_{\frac{h}{2}\cdot(1\pm\frac{1}{\sqrt{3}})} \approx 0.192 \cdot h^3.$$

Die Fehlerfunktionen $\delta f = f - f_I$ und $\delta f^x = f^x - f_I^x$ sind für diesen Fall in den Abb.4 und Abb.5 mit $h = 1.0$ dargestellt. δf ist symmetrisch zur Achse $x = 0.5$ und hat dort sein Maximum. δf^x besitzt somit bei $x = 0.5$ eine Nullstelle, d.h. der Ableitungswert an dieser Stelle wird exakt interpoliert. Der Wert der Ableitung für Funktionen aus der Menge der Polynome vierten Grades $\mathcal{P}_4$ wird also im Mittelpunkt eines jeden Intervalles eines Gitters G_k exakt interpoliert. Diese Interpolationseigenschaft der hermiteschen kubischen Basis wird bei der hierarchischen Basis, die im nächsten Abschnitt eingeführt wird, von großem Nutzen sein.

3.1.2 Die hierarchische kubische Basis

Das hierarchische Konzept führe ich in Anlehnung an [31] ein. Hierzu gehe ich aus von den in Abschnitt 3.1.1 eingeführten Gittern G_k über dem Einheitsintervall $I_0 = [0, 1]$ und den zugehörigen Basisfunktionen, die die hermitesche kubische Knotenbasis bilden und die Räume B_k aufspannen. Die hierarchische kubische Basis definiere ich nach [31] rekursiv:

- Die hierarchische Basis von B_1 ist mit der Knotenbasis identisch. Es gilt also
$$\psi^{\alpha}_{1,i} = \phi^{\alpha}_{1,i}, \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1 = M_1.$$
- Die hierarchische Basis von B_k besteht aus den hierarchischen Basisfunktionen von B_{k-1} und allen Basisfunktionen aus S_k, d.h den nodalen Basisfunktionen an jedem zweiten Gitterpunkt $i = 2 \cdot j - 1, j = 1, \ldots, N_{k-1} = M_k$ des Gitters G_k,
$$\psi^{\alpha}_{k,i} = \phi^{\alpha}_{k,i}.$$

Der Unterraum S_k enthält somit all diejenigen Funktionen, die in allen Knoten sämtlicher Gitter G_l mit $1 \leq l < k$ verschwinden. Forthin bezeichne ich die Gitter G_k als Level-k-Gitter. Weiter bezeichne ich alle Basisfunktionen aus S_{k-1} gegenüber allen Basisfunktionen aus S_k als hierarchisch höher liegend. Für den Raum B_n existieren jetzt zwei Basen: die Knotenbasis mit den Basisfunktionen $\phi^{\alpha}_{n,i}, i = 1 \ldots N_n - 1, N_n = 2^n$ (N_n Anzahl der Intervalle des Gitters G_n) und die hierarchische Basis mit den Basisfunktionen $\psi^{\alpha}_{k,i}, i = 1 \ldots M_k$ und $k = 1 \ldots n$. Der Index α kennzeichnet wieder wie in 3.1.1 die beiden Typen von Basisfunktionen und $M_k = 2^{k-1}$ ist die Anzahl der Funktionen eines Typs des k-ten Levels. Die Dimension des Unterraumes S_k (siehe auch [8]) ist damit gegeben durch
$$dim(S_k) = 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k, \tag{25}$$
da ja zwei Typen von Basisfunktionen pro Gitterpunkt benötigt werden. In Abb.6 sind die Basisfunktionen der Unterräume S_1, S_2 und S_3 dargestellt.
Setzt man homogene Randbedingungen voraus, erhält man folgende Zerlegung des Raumes B_n in die direkte Summe der Unterräume
$$B_n = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n. \tag{26}$$
Die Dimension des Raumes B_n berechnet sich somit zu
$$dim(B_n) = \sum_{k=1}^{n} dim(S_k) = \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2 = 2 \cdot (N_n - 1). \tag{27}$$
Jede Funktion $u \in B_n$ kann wieder eindeutig dargestellt werden als Linearkombination der hierarchischen Basisfunktionen $\psi^{\alpha}_{k,i}$
$$u = \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{M_k} c^{\alpha}_{k,i} \cdot \psi^{\alpha}_{k,i}, \tag{28}$$

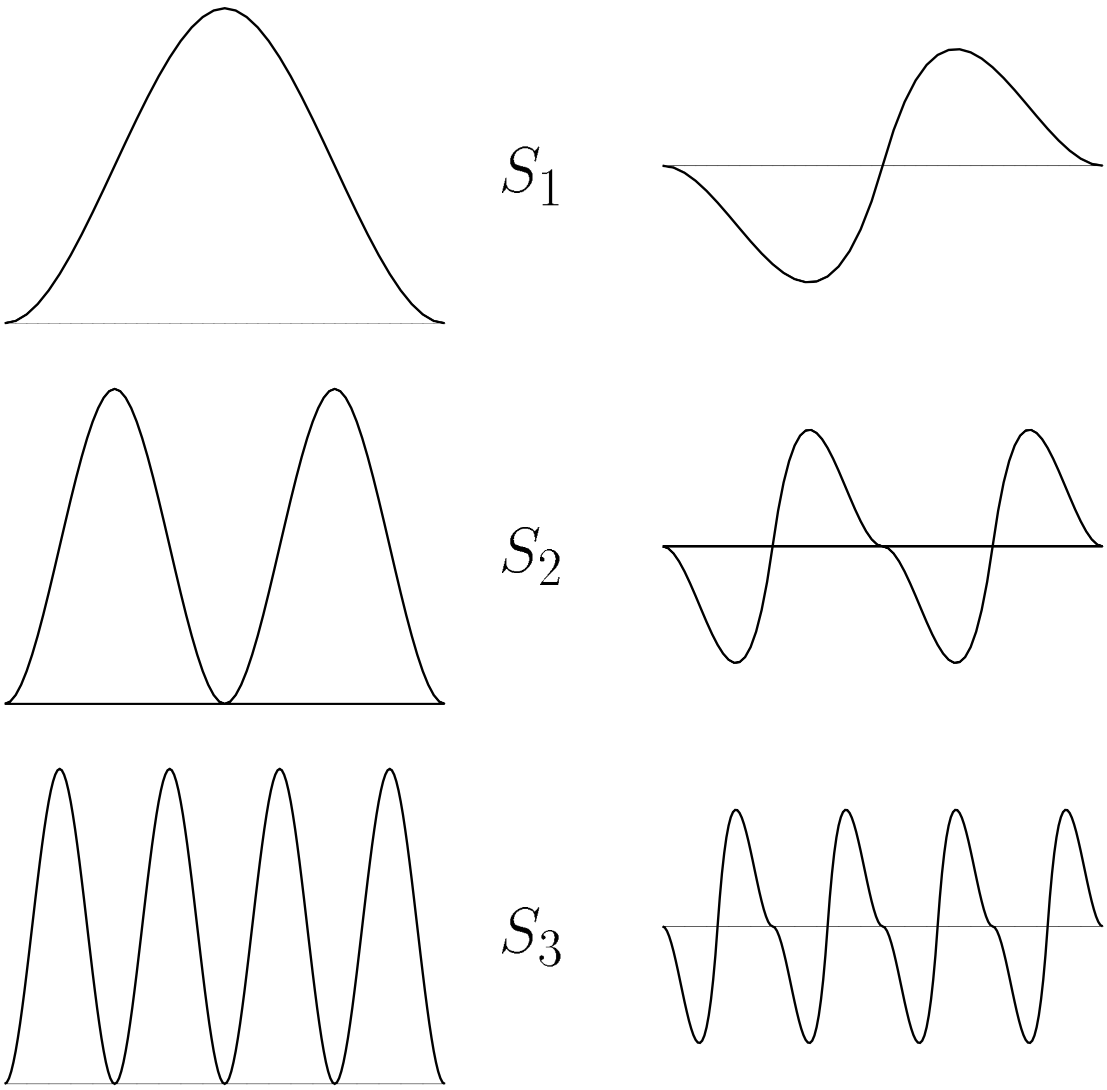


Abbildung 6: Die Basisfunktionen der Unterräume S_1, S_2 und S_3.

wobei $M_k = 2^{k-1}$ wieder die Anzahl der Basisfunktionen eines Typs aus S_k bezeichnet. Die Koeffizienten $c^{\alpha}_{k,i}$ der Entwicklung (28) entsprechen jetzt nicht mehr den Funktionswerten an den Stellen x_i. Nach Abb.6 bilden nämlich z.B. die Basisfunktionen des Unterraumes S_1 einen kubischen Interpolanten u_I auf den Trägern der Funktionen des Unterraumes S_2. In den Knotenpunkten $x_i \in G_2 \setminus G_1$ muß nur noch der Abstand zwischen dem Interpolanten und der darzustellenden Funktion u gespeichert werden. Eben diesem Abstand $u_I(x_i) - u(x_i)$ entspricht der Koeffizient $c^0_{2,i}$ und wird deshalb hierarchischer Überschuß genannt. Die Koeffizienten der Entwicklung $c^{\alpha}_{k,i}$ repräsentieren also jetzt hierarchische Überschüsse, die Koeffizienten $c^0_{k,i}$ bzgl. der Funktionswerte u und die Koeffizienten $c^1_{k,i}$ bzgl. der Ableitungswerte u^x.
Nun will ich die $c^{\alpha}_{k,i}$ betragsmäßig abschätzen. Dazu betrachte ich die Darstellung einer genügend glatten Funktion f, für die die Seminorm (22) existiert, in der hierarchischen Basis. Berücksichtige ich gemäß (26) alle Unterräume bis einschließlich S_{n-1}, so erhalten ich das Gitter G_{n-1} und als Interpolationsfehler die Abschätzungen (23) und (24) mit $h_{n-1} = 2^{-(n-1)}$. Damit sind aber die Koeffizienten der Basisfunktionen $\psi^{\alpha}_{n,i} \in S_n$ mit Träger der Länge $2 \cdot h_n = h_{n-1}$ nach oben beschränkt durch

$$c^0_{n,i} \leq a_1 \cdot h^4_n \tag{29}$$

und

$$c^1_{n,i} \leq a_2 \cdot h^3_n, \tag{30}$$

wobei die a_i hier und im weiteren von h_n unabhängige Konstanten sind. Die hierarchischen Überschüsse stellen ja nicht anderes dar als den Abstand des interpolierten Wertes der Funktion an einer Stützstelle x_i vom wirklichen Funktionswert an dieser Stelle. Dieser Abstand kann aber nicht größer sein als der maximale Interpolationsfehler. Daher gelten mit diesen ersten groben Vorüberlegungen dieselben Abschätzungen (23) und (24) auch für die hierarchischen Überschüsse. Jedoch läßt sich die Abschätzung (30) noch verbessern. Hierzu betrachten wir wieder die kubische Interpolation auf dem Einheitsintervall wie in Abschnitt 3.1.1. Die Funktionswerte und die Werte der Ableitung werden in den Randpunkten vorgegeben. Bei einer ersten Verfeinerung werden die Basisfunktionen $\psi^0_{1,m}$ und $\psi^1_{1,m}$ im Mittelpunkt m des Intervalles aufgesetzt (siehe Abb. 7). Für Polynome 4. Grades liegt aber der Wert der Ableitung im Punkt m durch Interpolation bereits exakt vor,

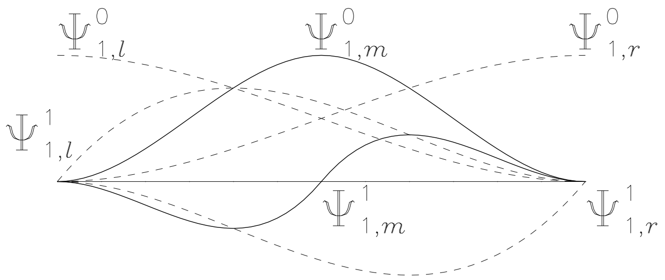


Abbildung 7: Die erste Verfeinerung des Einheitsintervalles.

so daß für den Koeffizienten $c^1_{1,m} = 0$ gilt. Auch alle $c^1_{k,m}, k = 2 \ldots n$ verschwinden für die weiteren Verfeinerungen des Intervalles, da immer wieder die Ausgangssituation des Einheitsintervalles vorliegt. Erst für Polynome 5. Grades treten Koeffizienten $c^1_{k,m} \neq 0$ auf. Somit erhalten wir für die $c^1_{n,i}$ die obere Schranke

$$c^1_{n,i} \leq a_3 \cdot h^4_n \tag{31}$$

Die hier mehr anschaulichen Ableitungen für die Abschätzungen (29) und (31) werden im Kapitel 4 durch Beweise abgesichert werden.

3.2 Die d-kubische hierarchische Dünn-Gitter Basis

Ich will nun daran gehen, die hierarchische eindimensionale Basis auf den d-dimensionalen Fall zu erweitern. Durch geeignete Wahl von Unterräumen werde ich dann eine d-kubische Dünn-Gitter Basis wie in [8, 32] ableiten.

3.2.1 Die d-kubische hierarchische Basis

Für jede Raumrichtung $x_l, l = 1, \ldots, d$ werden die eindimensionalen hierarchischen Basisfunktionen

$$\psi^0_{k_l,i_l} = \begin{cases} -2 \cdot \frac{(x_l+h_{k_l}-x_{i_l})^3}{h^3_{k_l}} + 3 \cdot \frac{(x_l+h_{k_l}-x_{i_l})^2}{h^2_{k_l}} & \text{für} \quad x_{i_l} - h_{k_l} \le x_l \le x_{i_l} \\ -2 \cdot \frac{(h_{k_l}+x_{i_l}-x_l)^3}{h^3_{k_l}} + 3 \cdot \frac{(h_{k_l}+x_{i_l}-x_l)^2}{h^2_{k_l}} & \text{für} \quad x_{i_l} \le x_l \le x_{i_l} + h_{k_l} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{32}$$

und

$$\psi^1_{k_l,i_l} = \begin{cases} \frac{(x_l+h_{k_l}-x_{i_l})^3}{h^2_{k_l}} - \frac{(x_l+h_{k_l}-x_{i_l})^2}{h_{k_l}} & \text{für} \quad x_{i_l} - h_{k_l} \le x_l \le x_{i_l} \\ -\frac{(h_{k_l}+x_{i_l}-x_l)^3}{h^2_{k_l}} + \frac{(h_{k_l}+x_{i_l}-x_l)^2}{h_{k_l}} & \text{für} \quad x_{i_l} \le x_l \le x_{i_l} + h_{k_l} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{33}$$

eingeführt. Das kartesische Produkt dieser Basisfunktionen liefert Ansatzfunktionen, die in den Variablen x_l separiert sind

$$\psi^\alpha_{k,i} = \psi^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)} = \prod_{l=1}^{d} \psi^{\alpha_l}_{k_l,i_l}(x_l). \tag{34}$$

Die k_l indizieren dabei den hierarchische Level auf dem die zugehörigen eindimensionalen Funktionen leben. Entsprechend bezeichnet h_{k_l} die Maschenweite auf diesem Level. Die α_l kennzeichenen den Typ der Basisfunktion. Im d-dimensionalen Fall erhält man 2^d Typen von Basisfunktionen. So existieren z.B. im zweidimensionalen Fall vier Kombinationsmöglichkeiten $(\alpha_1, \alpha_2) \in \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$ und daher vier verschiedene Typen von Basisfunktionen wie sie in Abb.8 gezeigt sind. Mit diesen vier Basisfunktionen läßt sich ein Rechteckselement mit 16 Freiheitsgraden konstruieren. Dieses Element ist das aus der Finiten-Element Theorie bekannte Bogner-Fox-Schmit (BFS) Element. Ich benötige also drei Multiindizes, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ für die Kennzeichnung des Typs der Funktion, $k = (k_1, \ldots, k_d)$ für den Hierarchielevel und $i = (i_1, \ldots, i_d)$ für den Ort des Mittelpunktes des Trägers der Funktion.
Durch den Produktansatz induziert die Hierarchie der eindimensionalen Funktionen $\psi^{\alpha_l}_{k_l,i_l}$ eine Hierarchie in den d-dimensionalen Funktionen $\psi^\alpha_{k,i}$. Diese

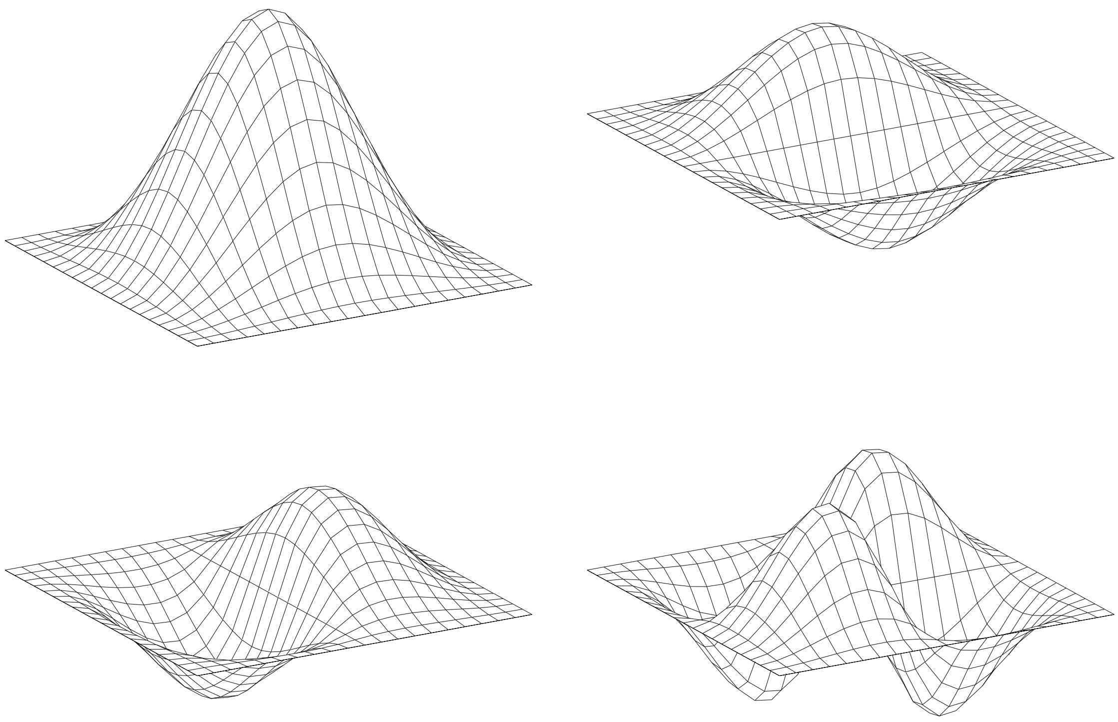


Abbildung 8: Die vier Typen der bikubischen Basisfunktionen.

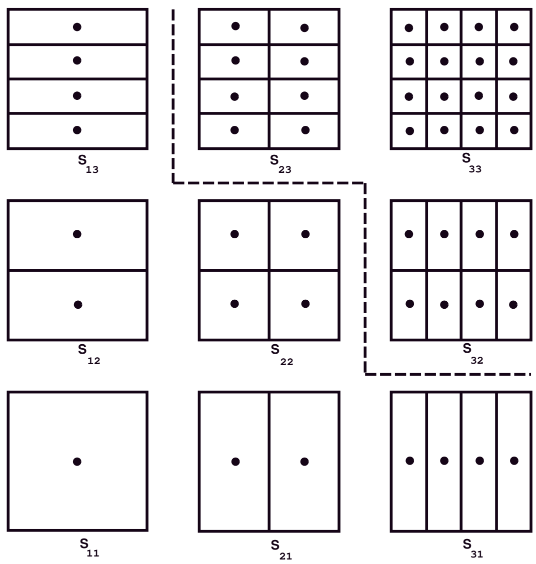


Abbildung 9: Teilräume des Voll-Gitter Raumes $B_3^{(2)}$

Funktionen bilden eine Basis für die Unterräume $S_{k_1,\ldots,k_d} = S_k$. Die Basisfunktionen $\psi^{\alpha}_{k,i} \in S_k$ besitzen Träger $\Omega_{(i_1,\ldots,i_d)}$ mit Zentrum $(x_{i_1},\ldots,x_{i_d})$ und den Abmessungen $2h_1 \cdot 2h_2 \cdot \ldots 2h_d$. Die Maschenweiten sind $h_l = 2^{-k_l}$. Für den zweidimensionalen Fall sind in Abb.9 die Basisfunktionen durch ihre Träger, deren Mittelpunkte die Koordinaten (x_{i_1}, x_{i_2}) besitzen, veranschaulicht. Zu beachten ist, daß jeder Träger vier Basisfunktionen repräsentiert. Die Dimension der Unterräume $S_{k_1,\ldots,k_d}$ ist mit (25) gegeben durch

$$dim(S_k) = dim(S_{k_1,\ldots,k_d}) = 2^{k_1} \cdot \ldots \cdot 2^{k_d}. \tag{35}$$

Der Voll-Gitter Raum $B_{n_1,\ldots,n_d}$ kann wieder als direkte Summe der Teilräume $S_{k_1,\ldots,k_d}$ dargestellt werden

$$B_{n_1,\ldots,n_d} = \bigoplus_{k_1=1}^{n_1} \bigoplus_{k_2=1}^{n_2} \ldots \bigoplus_{k_d=1}^{n_d} S_{k_1,\ldots k_d}. \tag{36}$$

Das zugrundeliegende Gitter $G_{n_1,\ldots,n_d}$ ist ein reguläres, volles Gitter im d-dimensionalen Raum. Es besitzt die i.a. unterschiedlichen Maschenweiten $h_l = 2^{-n_l}$ in den Raumrichtungen x_l. Im Falle $n_1 = \ldots = n_d = n$ erhält man das äquidistante Gitter $G_{n_1,\ldots,n_d} = G_n^{(d)}$ und den Voll-Gitter Raum $B_n^{(d)}$. Mit dem in Abb.9 gezeigten Satz von Basisfunktionen wird z.B. der Raum $B_3^{(2)}$ aufgespannt. Die Dimension von $B_n^{(d)}$ berechnet sich zu

$$
\begin{aligned}
dim(B_n^{(d)}) &= \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_d=1}^{n} dim(S_{k_1,\dots,k_d}) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_d=1}^{n} 2^{k_1} \cdot \ldots \cdot 2^{k_d} \\
&= 2^d \cdot (2^n - 1)^d
\end{aligned}
\tag{37}
$$

und entspricht damit der Anzahl der inneren Gitterpunkte $(2^n - 1)^d$ des Gitters $G_n^{(d)}$ multipliziert mit der Anzahl 2^d der auftretenden Typen von Basisfunktionen, d.h. der Anzahl der Freiheitsgrade pro Gitterpunkt. Auf Grund der Stetigkeit der ersten Ableitung der eindimensionalen Basisfunktionen induziert man durch den Produktansatz d-dimensionale Funktionen mit globaler Stetigkeit auch der ersten Ableitung. Damit sind die Räume $B_n^{(d)}$ ineinander geschachtelt

$$
B_1^{(d)} \subset B_2^{(d)} \subset \dots B_n^{(d)} \subset \dots \subset H^2_{0(\Omega^{(d)})}. \tag{38}
$$

Eine Funktion $u^{(d)} \in B_n^{(d)}$ ist gegeben durch

$$
u^{(d)} = \sum_{k_1=1}^{n} \dots \sum_{k_d=1}^{n} \sum_{\alpha} \sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \dots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} c^{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)}_{(k_1,\dots,k_d),(i_1,\dots,i_d)} \cdot \psi^{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)}_{(k_1,\dots,k_d),(i_1,\dots,i_d)} \tag{39}
$$

mit $M_{k_l} = 2^{k_l - 1} - 1$ und kann somit durch die Koeffizienten $c^{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)}_{(k_1,\dots,k_d),(i_1,\dots,i_d)}$ der Linearkombination, die jetzt d-dimensionale hierarchische Überschüsse darstellen, in eindeutiger Weise repräsentiert werden. Die $c^{(\alpha_1=0,\dots,\alpha_d=0)}_{(k_1,\dots,k_d),(i_1,\dots,i_d)}$ bezeichnen so den hierarchischen Überschuß bzgl. des Funktionswertes an der Stelle $(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$, $c^{(\alpha_1=1,\dots,\alpha_d=0)}_{(k_1,\dots,k_d),(i_1,\dots,i_d)}$ den hierarchischen Überschuß bzgl. der Ableitung der Funktion in x_1-Richtung usw..

3.2.2 Die d-kubische Dünn-Gitter Basis

Kurz möchte ich die Einführung des dünnen Gitters motivieren. Bisher habe ich für den Finite-Element Raum $B_n^{(d)}$ ja nur zwei verschiedene Basen eingeführt, die kubische Knotenbasis und die hierarchische Basis. Im zweidimensionalen Fall erhält man im hierarchischen Ansatz die Unterräume S_{k_1,k_2}

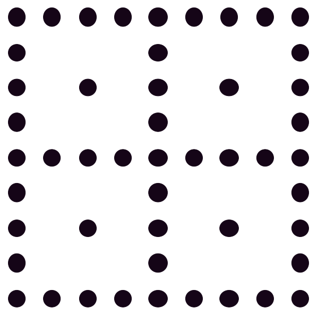


Abbildung 10: Das reguläre dünne Gitter $\tilde{G}_3^{(2)}$.

wie dies in Abb.9 dargestellt ist. Die Unterräume S_{k_1,k_2} sind jetzt klassifizierbar nach ihrer Dimension und ihrem Gewicht bei der Darstellung einer Funktion. Ihr Gewicht ergibt sich aus dem Beitrag, den sie zur Interpolation einer Funktion in einer bestimmten Norm beisteuern. Dieser Beitrag ist z.B. im zweidimensionalen Fall für alle Unterräume S_{k_1,k_2} mit $k_1 + k_2 - 1 = n$ von derselben Größenordnung von $O((\frac{1}{16})^{k_1+k_2})$ in der L_2-Norm bei kubischer Interpolation (dies wird im folgenden Kapitel noch bewiesen). Gleichzeitig ist die Dimension all dieser Unterräume von der Ordnung $O(2^{k_1+k_2})$. Bei vollen Gittern werden jedoch die Unterräume S_{k_1,k_2} mit $k_1, k_2 \leq n$ verwendet. So enthält z.B. der Voll-Gitter Raum $B_3^{(2)}$ den Unterraum S_{33} mit $dim(S_{33}) = 64$, der einen kleineren Beitrag der Ordnung $(\frac{1}{16})^6$ zur Darstellung einer Funktion liefert als etwa der Raum S_{14} mit $dim(S_{14}) = 32$ und einem Beitrag der Größenordnung $(\frac{1}{16})^5$. Zur Approximation einer Funktion ist es somit günstiger den Funktionenraum durch Unterräume S_{k_1,k_2} auf den „Diagonalen" mit $k_1+k_2 = konst.$ sukzessive zu erweitern und nicht, wie dies im Falle der vollen Gitter geschieht, durch Hinzunahme von Unterräumen, die in Abb.9 innerhalb eines Quadrates mit $k_1, k_2 \leq n$ liegen.
Wie in [8] führe ich deshalb den Dünn-Gitter Raum $\tilde{B}_n^{(d)}$ mit Hilfe der in Abschnitt 3.2.1 eingeführten Unterräume $S_{k_1,\ldots,k_d}$ ein

$$\tilde{B}_n^{(d)} = \bigoplus_{k_1+k_2\ldots+k_d \leq n+d-1} S_{k_1,\ldots,k_d}. \tag{40}$$

Der Raum $\tilde{B}_3^{(2)}$ wird z.B. durch die Teilräume, die unterhalb der gestrichelten „Diagonale" in Abb.9 liegen, aufgespannt. Das zugehörige dünne Gitter $\tilde{G}_3^{(2)}$ ist in Abb.10 gezeigt (hier wurden die Randpunkte mitberücksichtigt). Dieses

Gitter wird als regulär bezeichnet in Abgrenzung zu einem adaptiv verfeinerten dünnen Gitter [8]. Jeder Gitterpunkt repräsentiert vier Freiheitsgrade entsprechend den vier Typen von Basisfunktionen.
Eine Funktion $u^{(d)} \in \tilde{B}_n^{(d)}$ ist eindeutig festgelegt durch die Linearkombination der Basisfunktionen

$$u^{(d)} = \sum_{k_1+k_2 \ldots +k_d \leq n+d-1} \sum_{\alpha} \sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \cdots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} c^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)} \cdot \psi^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)}. \quad (41)$$

Die Summe über den Multiindex α läuft in (41) über alle 2^d Kombinationsmöglichkeiten $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. Demnach ergibt sich die Dimension des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n^{(d)}$ mit [8] zu

$$dim(\tilde{B}_n^{(d)}) = 2^d \cdot O(2^n \cdot n^{d-1}). \quad (42)$$

Das bedeutet im Vergleich zu den Voll-Gitter Räumen eine erhebliche Reduktion der Freiheitsgrade. Da sich der Interpolationsfehler des Dünn-Gitter Raumes zusätzlich nur geringfügig verschlechtert, erweist sich die Dünn-Gitter Technik als sehr effiziente Methode zur Darstellung von Funktionen und zur Lösung elliptischer Randwertaufgaben [8]. Der Interpolationsfehler und die Approximationseigenschaften des d-kubischen Dünn-Gitter Raumes werden daher Thema der folgenden zwei Kapitel sein.

4 Der Interpolationsfehler des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n^{(d)}$

In diesem Kapitel werde ich die in [8, 32] eingeführten Beweistechniken verwenden, um den Interpolationsfehler des Voll-Gitter Raumes $B_n^{(d)}$ und des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n^{(d)}$ in der L_2-Norm und Maximumnorm abzuschätzen. Zwar liefern diese Abschätzungen noch keine oberen Schranken für den Approximationsfehler einer diskreten Lösung einer partiellen Differentialgleichung, die mit einem Finite-Element Verfahren berechnet wurde. Jedoch geben sie erste Hinweise auf mögliche Fehlerschranken.
Wichtig in diesem Zusammenhang ist, daß die Räume als direkte Summe gewisser Unterräume dargestellt werden. Der Interpolationsfehler ergibt sich dann als Summe der Beiträge der Unterräume, die bei der Interpolation vernachlässigt werden. Bilden diese Beiträge eine monoton fallende Folge, so kann der Fehler nach oben hin abgeschätzt werden. Die Beweisführung und Notation lehnt sich sehr an [8] an.

4.1 Die Regularitätsvoraussetzungen

Zunächst möchte ich angeben, welche Glattheitseigenschaften an die gesuchte Lösung u zu stellen sind. Dabei ist klar, daß zum einen die Lösungen im Sobolev-Raum $H^2_{0(\Omega^{(d)})}$ zu suchen sind, da ich partielle Differentialgleichungen 4. Ordnung betrachte wie z.B. die biharmonische Gleichung. Zum anderen muß ich jedoch höhere Regularitätsforderungen an u stellen, damit alle auftretenden Ableitungen von u in den nachfolgend dargestellten Beweisen existieren und beschränkt sind. Für die Abschätzung des Interpolationsfehlers in der Maximumnorm gebe ich folgende

Definition 1 *Die Menge X_0^{max} aller d-dimensionalen Funktionen, die auf dem Rand Γ von Ω verschwinden, sei durch*

$$X^{max}_{0(\Omega^{(d)})} := \left\{ u^{(d)} \in C^5_{0(\Omega^{(d)})} : \| \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_d} u}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_d^{j_d}} \|_\infty < \infty \quad mit \quad 0 \leq j_l \leq 5 \right\}$$

definiert. Dann existieren insbesondere auch die Seminormen

$$|u^{(d)}|^m_\infty := \| \frac{\partial^{4d+m} u^{(d)}}{\partial x_1^5 \ldots \partial x_m^5 \partial x_{m+1}^4 \ldots \partial x_d^4} \|_\infty < \infty.$$

Andererseits wähle ich im Hinblick auf die Abschätzung des Fehlers in der L_2-Norm Funktionen, deren Ableitungen im schwachen Sinne existieren.

Definition 2 *Die Menge $X_0^{L_2}$ aller d-dimensionalen Funktionen, die auf dem Rand Γ von Ω verschwinden, sei durch*

$$X_{0(\Omega^{(d)})}^{L_2} := \left\{ u^{(d)} \in H^5_{0(\Omega^{(d)})} : \| \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_d} u}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_d^{j_d}} \|_{L_2} < \infty \quad mit \quad 0 \leq j_l \leq 5 \right\}$$

definiert. Dann existieren insbesondere auch die Seminormen

$$|u^{(d)}|_{L_2}^m := \| \frac{\partial^{4d+m} u^{(d)}}{\partial x_1^5 \ldots \partial x_m^5 \partial x_{m+1}^4 \ldots \partial x_d^4} \|_{L_{2(\Omega^{(d)})}}^m < \infty.$$

Für die Abschätzung des Interpolationsfehlers gebe ich noch die L_2-Norm der eindimensionalen Funktionen (32) und (33) und ihrer Ableitungen an

$$\begin{array}{lclcl}
\|\psi^0_{k_l,i_l}\|^2_{L_2} & = & \int\limits_{x_l-h_{k_l}}^{x_l+h_{k_l}} \left(\psi^0_{k_l,i_l}\right)^2 dx_l & = & \frac{26}{35} \cdot h_{k_l} \\
\|\psi^1_{k_l,i_l}\|^2_{L_2} & = & \int\limits_{x_l-h_{k_l}}^{x_l+h_{k_l}} \left(\psi^1_{k_l,i_l}\right)^2 dx_l & = & \frac{2}{105} \cdot h^3_{k_l} \\
\|\frac{\partial \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l}\|^2_{L_2} & = & \int\limits_{x_l-h_{k_l}}^{x_l+h_{k_l}} \left(\frac{\partial \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l}\right)^2 dx_l & = & \frac{12}{5h_{k_l}} \\
\|\frac{\partial \psi^1_{k_l,i_l}}{\partial x_l}\|^2_{L_2} & = & \int\limits_{x_l-h_{k_l}}^{x_l+h_{k_l}} \left(\frac{\partial \psi^1_{k_l,i_l}}{\partial x_l}\right)^2 dx_l & = & \frac{4}{15} \cdot h_{k_l} \\
\|\frac{\partial^2 \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l^2}\|^2_{L_2} & = & \int\limits_{x_l-h_{k_l}}^{x_l+h_{k_l}} \left(\frac{\partial^2 \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l^2}\right)^2 dx_l & = & \frac{24}{h^3_{k_l}} \\
\|\frac{\partial^2 \psi^1_{k_l,i_l}}{\partial x_l^2}\|^2_{L_2} & = & \int\limits_{x_l-h_{k_l}}^{x_l+h_{k_l}} \left(\frac{\partial^2 \psi^1_{k_l,i_l}}{\partial x_l^2}\right)^2 dx_l & = & \frac{8}{h_{k_l}}.
\end{array} \tag{43}$$

4.2 Die Beweisstruktur

Mit (36) und (40) habe ich in Abschnitt 3.2 die d-kubischen hierarchischen Räume $B_n^{(d)}$ und $\tilde{B}_n^{(d)}$ definiert durch die direkte Summe der Unterräume $S_{k_1,\ldots,k_d} = S_k$. Diese Unterräume lassen sich selbst wieder als direkte Summe der Unterräume $S_{k_1,\ldots,k_d}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_d} = S_k^\alpha$ darstellen,

$$S_k = S_{k_1,\ldots,k_d} = \bigoplus_\alpha S^\alpha_{k_1,\ldots,k_d} = \bigoplus_\alpha S^\alpha_k, \tag{44}$$

wobei der Multiindex alle 2^d Werte gemäß der Anzahl der verschiedenen Basisfunktionen annehmen kann. Diese Aufspaltung der Räume in Unterräume S_k und weiter in S_k^α legt folgende Beweisführung nahe:

Beweisstruktur

Schätze

(1) die d-dimensionalen Überschüsse $c_{k,i}^\alpha$ betragsmäßig mit Hilfe einer geeigneten Norm ab.

(2) den Beitrag der Unterräume S_k^α für alle auftretenden α ab.

(3) den Beitrag der Unterräume S_k ab.

(4) die Interpolationsfehler $\|u - u_I\|$ bzw. $\|u - \tilde{u}_I\|$ ab. Dabei ist der Voll-Gitter Interpolant $u_I \in B_{\underset{\sim}{n}}^{(d)}$ gegeben durch (39) und der Dünn-Gitter Interpolant $\tilde{u}_I \in \tilde{B}_n^{(d)}$ durch (41).

In Schritt (1) kommt die in [32] gezeigte Technik zum Tragen. Die Beweise aus [8] sind dann für die Schritte (2) bis (4) übertragbar. Die einzelnen Schritte werde ich für die Abschätzungen in der Maximumnorm einmal ausführlich besprechen. Bei der Beweisführung in den anderen Normen werde ich die Herleitung des Interpolationsfehlers in sehr gestraffter Form wiedergeben.

4.3 Die Abschätzung der hierarchischen Überschüsse

Zunächst schätze ich die hierarchischen Überschüsse in der Maximumnorm und L_2-Norm für den eindimensionalen Fall ab. Die Verallgemeinerung auf den d-dimensionalen Fall ist dann leicht zu bewältigen.
Da der hierarchische Überschuß den Abstand des interpolierten Wertes vom wirklichen Wert der Funktion darstellt, sind die eindimensionalen hierarchischen Überschüsse bzgl. der Interpolation in x_l Richtung an der Stelle x_{i_l} gegeben durch

$$\begin{aligned} c^0_{k_l,i_l} &= u(x_{i_l}) - \tfrac{1}{2} \cdot (u(x_{i_l} - h_{k_l}) + u(x_{i_l} + h_{k_l})) \\ &\quad - \tfrac{h_{k_l}}{8} \cdot (u^{x_l}(x_{i_l} - h_{k_l}) - u^{x_l}(x_{i_l} + h_{k_l})) \\ &= \mathcal{I}^0_{k_l,i_l} u(x_{i_l}) \end{aligned} \tag{45}$$

und

$$
\begin{aligned}
c^1_{k_l,i_l} &= u^{x_l}(x_{i_l}) - \tfrac{3}{2h_{k_l}} \cdot (-u(x_{i_l}-h_{k_l}) + u(x_{i_l}+h_{k_l})) \\
&\quad + \tfrac{1}{4} \cdot (u^{x_l}(x_{i_l}-h_{k_l}) + u^{x_l}(x_{i_l}+h_{k_l})) \\
&= \mathcal{I}^1_{k_l,i_l} u(x_{i_l}).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Hierbei bezeichnet der obere Index x_l die nach x_l abgeleiteten Größen. Die Ausdrücke (45) und (46) schreibe ich kurz in Operatorschreibweise

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^0_{k_l,i_l} u_{(x_{i_l})} = \quad & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_{(x_{i_l})} \quad + \\
& \tfrac{h_{k_l}}{8} \cdot [-1 \quad 0 \quad 1]\, u^{x_l}_{(x_{i_l})}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^1_{k_l,i_l} u_{(x_{i_l})} = \quad & \tfrac{3}{2h_{k_l}} \cdot [1 \quad 0 \quad -1]\, u_{(x_{i_l})} \quad + \\
& \tfrac{1}{4} \cdot [1 \quad 4 \quad 1]\, u^{x_l}_{(x_{i_l})}.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Die hierarchischen Überschüsse $c^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)}$ lassen sich dann in folgender Kurznotation angeben

$$
c^\alpha_{k,i} = c^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)} = \prod_{l=1}^{d} \mathcal{I}^{\alpha_l}_{k_l,i_l} u^{(d)}_{(x_{i_1},\ldots,x_{i_d})}. \tag{49}
$$

Für den zweidimensionalen Fall schreibe ich als ein Beispiel $c^{(0,0)}_{(k_1,k_2),(i_1,i_2)}$ explizit an

$$
\begin{aligned}
& c^{(0,0)}_{(k_1,k_2),(i_1,i_2)} = \mathcal{I}^0_{k_2,i_2} \cdot \mathcal{I}^0_{k_1,i_1} u_{(x_{i_1},x_{i_2})} = \\
& = \Big(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_{(x_{i_1},x_{i_2})} + \frac{h_{k_1}}{8} [-1 \quad 0 \quad 1]\, u^{x_1}_{(x_{i_1},x_{i_2})} \Big) \cdot \\
& \quad \cdot \Big(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u_{(x_{i_1},x_{i_2})} + \frac{h_{k_2}}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u^{x_2}_{(x_{i_1},x_{i_2})} \Big) \\
& = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} u_{(x_{i_1},x_{i_2})} + \frac{h_{k_1}}{8} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u^{x_1}_{(x_{i_1},x_{i_2})} \\
& + \frac{h_{k_2}}{8} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} u^{x_2}_{(x_{i_1},x_{i_2})} + \frac{h_{k_1} h_{k_2}}{64} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} u^{x_2 x_1}_{(x_{i_1},x_{i_2})}.
\end{aligned}
$$

Nach diesen Vorbereitungen werde ich nun die hierarchischen Überschüsse betragsmäßig abschätzen.

4.3.1 Die Abschätzung in der Maximumnorm

Als erstes habe ich Schritt (1) des Beweises mit Hilfe der Maximumnorm zu erledigen. Hierzu berechne ich mit $u \in X^{max}_{0(\Omega^{(1)})}$ zur Basisfunktion $\psi^0_{k_l,i_l}$ nach [32] folgendes Integral

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \psi^0_{k_l,i_l} \frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4} dx_l = \\
&= \left[\psi^0_{k_l,i_l} \frac{\partial^3 u}{\partial x_l^3}\right]_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}} + \left[\psi^0_{k_l,i_l} \frac{\partial^3 u}{\partial x_l^3}\right]_{x_{i_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} - \int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l} \frac{\partial^3 u}{\partial x_l^3} dx_l \\
&= \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_l^3}|_{x_{i_l}} - 0\right) + \left(0 - \frac{\partial^3 u}{\partial x_l^3}|_{x_{i_l}}\right) - \int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l} \frac{\partial^3 u}{\partial x_l^3} dx_l \qquad (50) \\
&= -\left[\frac{\partial \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}\right]_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}} - \left[\frac{\partial \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2}\right]_{x_{i_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} + \int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial^2 \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_l^2} dx_l \\
&= \left[\frac{\partial^2 \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l^2} \frac{\partial u}{\partial x_l}\right]_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}} - \left[\frac{\partial^2 \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l^2} \frac{\partial u}{\partial x_l}\right]_{x_{i_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} - \int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial^3 \psi^0_{k_l,i_l}}{\partial x_l^3} \frac{\partial u}{\partial x_l} dx_l \\
&= \frac{6}{h^2_{k_l}} \cdot (u^{x_l}_{(x_{i_l}+h_{k_l})} - u^{x_l}_{(x_{i_l}-h_{k_l})}) + \frac{12}{h^3_{k_l}} \cdot (-u_{(x_{i_l}+h_{k_l})} + 2 \cdot u(0) - u_{(x_{i_l}-h_{k_l})}) \\
&= \frac{24}{h^3_{k_l}} \mathcal{I}^0_{k_l,i_l} u_{(x_{i_l})} = \frac{24}{h^3_{k_l}} \cdot c^0_{k_l,i_l}.
\end{aligned}
$$

Bei der dreimaligen partiellen Integration werden die Eigenschaften (17) der Funktion $\psi^0_{k_l,i_l}$ an den Integrationsgrenzen ausgiebig genutzt. Obiges Integral läßt sich aber auch abschätzen durch

$$
|\int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4} \psi^0_{k_l,i_l} dx_l| \leq \|\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4}\|_\infty \cdot \int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} |\psi^0_{k_l,i_l}| dx_l = |u|^0_\infty \cdot h_{k_l}.
$$

Dies ergibt zusammen mit (50)

$$
|c^0_{k_l,i_l}| \leq \frac{h^4_{k_l}}{24} \cdot |u|^0_\infty \qquad (51)
$$

und damit ist Abschätzung (29) mit $a_1 = \frac{|u|^0_\infty}{24}$ bewiesen.
Mit einem analogen Vorgehen für den zweiten Typ von Basisfunktion $\psi^1_{k_l,i_l}$ erhält man für das Integral

$$\int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \psi^1_{k_l,i_l} \frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4} dx_l = \frac{8}{h_{k_l}} \cdot c^1_{k_l,i_l}$$

und als obere Schranke

$$|\int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4} \psi^1_{k_l,i_l} dx_l| \leq |u|^0_\infty \cdot \frac{h^2_{k_l}}{6}.$$

Damit ergibt sich als vorläufiges Ergebnis wie auch in 3.1.2

$$|c^1_{k_l,i_l}| \leq |u|^0_\infty \cdot \frac{h^3_{k_l}}{48}.$$

Zur Verbesserung dieser Abschätzung kann jedoch folgendes Integral

$$\int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \chi^1_{k_l,i_l} \frac{\partial^5 u}{\partial x_l^5} dx_l$$

mit

$$\chi^1_{k_l,i_l} = \begin{cases} -\frac{(x_l+h_{k_l}-x_{i_l})^4}{4h^2_{k_l}} + \frac{(x_l+h_{k_l}-x_{i_l})^3}{3h_{k_l}} & \text{für} \quad x_{i_l} - h_{k_l} \leq x_l \leq x_{i_l} \\ -\frac{(h_{k_l}+x_{i_l}-x_l)^4}{4h^2_{k_l}} + \frac{(h_{k_l}+x_{i_l}-x_l)^3}{3h_{k_l}} & \text{für} \quad x_{i_l} \leq x_l \leq x_{i_l} + h_{k_l} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{52}$$

berechnet werden. Es gilt

$$\frac{\partial \chi^1_{k_l,i_l}}{\partial x_l} = -\psi^1_{k_l,i_l}.$$

Mit vierfacher partieller Integration ergibt das

$$\int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \chi^1_{k_l,i_l} \frac{\partial^5 u}{\partial x_l^5} dx_l =$$

$$= \left[\chi^1_{k_l,i_l}\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4}\right]^{x_{i_l}}_{x_{i_l}-h_{k_l}} + \left[\chi^1_{k_l,i_l}\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4}\right]^{x_{i_l}+h_{k_l}}_{x_{i_l}} - \int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial \chi^1_{k_l,i_l}}{\partial x_l}\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4} dx_l \tag{53}$$

$$= \left(\frac{h^2_{k_l}}{4} - \frac{h^2_{k_l}}{3}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4}|_{x_{i_l}} - \left(\frac{h^2_{k_l}}{4} - \frac{h^2_{k_l}}{3}\right)\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4}|_{x_{i_l}} + \int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \psi^1_{k_l,i_l}\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4} dx_l$$

... partielle Intergration

$$= \frac{8}{h_{k_l}} \cdot \left(u^{x_1}_{(x_{i_l})} + \frac{1}{4}\cdot(u^{x_l}_{(x_{i_l}-h_{k_l})} + u^{x_l}_{(x_{i_l}+h_{k_l})}) + \frac{3}{4h_{k_l}}\cdot(u_{(x_{i_l}-h_{k_l})} - u_{(x_{i_l}+h_{k_l})})\right)$$

$$= \frac{8}{h_{k_l}}\mathcal{I}^1_{k_l,i_l}u_{(x_{i_l})} = \frac{8}{h_{k_l}}\cdot c^1_{k_l,i_l}.$$

Diesmal erhalte ich als obere Schranke

$$|\int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial^5 u}{\partial x_l^5}\chi^1_{k_l,i_l} dx_l| \leq$$

$$\leq \|\frac{\partial^5 u}{\partial x_l^5}\|_\infty \cdot \int\limits_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} |\chi^1_{k_l,i_l}| dx_l = |u|^1_\infty \cdot \frac{h^3_{k_l}}{15}$$

und mit (53)

$$|c^1_{k_l,i_l}| \leq \frac{h^4_{k_l}}{120}\cdot |u|^1_\infty. \tag{54}$$

Somit ist (31) mit $a_3 = \frac{|u|^1_\infty}{120}$ bewiesen. Die $c^0_{k_l,i_l}$ als auch die $c^1_{k_l,i_l}$ sind also betragsmäßig von der Ordnung $O(h^4_{k_l})$. Jedoch muß in diesem Fall eine höhere Glattheitsanforderung an die gesuchte Funktion gestellt werden. Nun müssen noch die Abschätzungen (51) und (54) auf den d-dimensionalen Fall verallgemeinert werden.

Der d-dimensionale Fall

Im d-dimensionalen Fall hat man alle möglichen 2^d Koeffizienten $c^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)}$ zu behandeln. Zunächst werde ich die obere Schranke für $c^{\alpha=0}$ exemplarisch herleiten. Alle anderen Abschätzungen werden anhand dieses Beispieles einsichtig werden und eine allgemeine obere Schranke für die hierarchischen

Überschüsse läßt sich dann auf einfache Weise angeben. Zu berechnen ist

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{x_{i_d}-h_{k_d}}^{x_{i_d}+h_{k_d}} \cdots \int\limits_{x_{i_1}-h_{k_1}}^{x_{i_1}+h_{k_1}} \psi^{(\alpha_1=0,\ldots,\alpha_d=0)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)} \cdot \frac{\partial^{4d} u^{(d)}}{\partial x_1^4 \ldots \partial x_d^4} dx_1 \ldots dx_d = \\
= &\int\limits_{x_{i_d}-h_{k_d}}^{x_{i_d}+h_{k_d}} \cdots \int\limits_{x_{i_1}-h_{k_1}}^{x_{i_1}+h_{k_1}} \prod_{l=1}^{d} \psi^0_{k_l,i_l} \cdot \frac{\partial^{4d} u^{(d)}}{\partial x_1^4 \ldots \partial x_d^4} dx_1 \ldots dx_d \\
= &\int\limits_{x_{i_d}-h_{k_d}}^{x_{i_d}+h_{k_d}} \cdots \int\limits_{x_{i_2}-h_{k_2}}^{x_{i_2}+h_{k_2}} \prod_{l=2}^{d} \psi^0_{k_l,i_l} (\int\limits_{x_{i_1}-h_{k_1}}^{x_{i_1}+h_{k_1}} \psi^0_{k_1,i_1} \cdot \frac{\partial^{4d} u^{(d)}}{\partial x_1^4 \ldots \partial x_d^4} dx_1) dx_2 \ldots dx_d \\
= &\ \ldots \text{partielle Integration wie im eindimensionalen Fall} \\
= &\int\limits_{x_{i_d}-h_{k_d}}^{x_{i_d}+h_{k_d}} \cdots \int\limits_{x_{i_2}-h_{k_2}}^{x_{i_2}+h_{k_2}} \prod_{l=2}^{d} \psi^0_{k_l,i_l} \frac{24}{h_{k_1}^3} \mathcal{I}^0_{k_1,i_1} \frac{\partial^{4(d-1)} u^{(d)}}{\partial x_2^4 \ldots \partial x_d^4} dx_2 \ldots dx_d \\
= &\ \ldots \text{partielle Integration} \\
= &\ \frac{24}{h_{k_1}^3} \cdot \ldots \cdot \frac{24}{h_{k_d}^3} \cdot \prod_{l=1}^{d} \mathcal{I}^0_{k_l,i_l} u^{(d)}_{(x_{i_1},\ldots,x_{i_d})} \\
= &\ \frac{24}{h_{k_1}^3} \cdot \ldots \cdot \frac{24}{h_{k_d}^3} \cdot c^{(0,\ldots,0)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)}.
\end{aligned}$$

Als obere Schranke erhält man

$$\begin{aligned}
&|\int\limits_{x_{i_d}-h_{k_d}}^{x_{i_d}+h_{k_d}} \cdots \int\limits_{x_{i_1}-h_{k_1}}^{x_{i_1}+h_{k_1}} \psi^{(\alpha_1,\ldots\alpha_d)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)} \cdot \frac{\partial^{4d} u^{(d)}}{\partial x_1^4 \ldots \partial x_d^4} dx_1 \ldots dx_d| \leq \\
\leq &\ \|\frac{\partial^{4d} u^{(d)}}{\partial x_1^4 \ldots \partial x_d^4}\|_\infty \cdot \int\limits_{x_{i_d}-h_{k_d}}^{x_{i_d}+h_{k_d}} \cdots \int\limits_{x_{i_1}-h_{k_1}}^{x_{i_1}+h_{k_1}} \prod_{l=1}^{d} |\psi^0_{k_l,i_l}| dx_1 \ldots dx_d \\
= &\ |u^{(d)}|^0_\infty \cdot h_{k_1} \cdot \ldots \cdot h_{k_d}
\end{aligned}$$

und damit die Abschätzung

$$|c^{(0,\ldots,0)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)}| \leq |u^{(d)}|^0_\infty \cdot \frac{h_{k_1}^4}{24} \cdot \ldots \cdot \frac{h_{k_d}^4}{24}.$$

Um alle weiteren hierarchischen Überschüsse berechnen zu können, müssen immer dann, wenn Basisfunktionen des Typs II ($\alpha_l = 1$) ins Spiel kommen, Intergrale der Form (53) mit den Funktionen $\chi^1_{k_l,i_l}$ betrachtet werden. Diese Integrale liefern in der Abschätzung Faktoren $\frac{h^4_{k_l}}{120}$ und führen zu höheren Glattheitsanforderungen an $u^{(d)}$ (siehe (54)). Seien $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 1$ gegeben und die übrigen $\alpha_l = 0$. Dann erhalte ich

$$
\begin{aligned}
|c^{\alpha}_{k,i}| &= |c^{(\alpha_1=1,\ldots,\alpha_m=1,\alpha_{m+1}=0,\ldots,\alpha_d=0)}_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)}| \leq \\
&\leq \quad |u^{(d)}|^m_\infty \cdot \frac{h^4_{k_1}}{120} \cdot \ldots \cdot \frac{h^4_{k_m}}{120} \cdot \frac{h^4_{k_{m+1}}}{24} \cdot \ldots \cdot \frac{h^4_{k_d}}{24}
\end{aligned}
\tag{55}
$$

mit $u^{(d)} \in X^{max}_{0(\Omega)}$. Die Festlegung auf $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 1$ stellt keine Einschränkung des allgemeinen Falles dar, wo $\alpha_l = 1$ für beliebige $0 \leq l \leq d$ auftreten kann (der Produnktansatz erlaubt die Permutation der Koordinatenrichtungen).

4.3.2 Die Abschätzung in der L_2-Norm

Die Ergebnisse aus (50) und (53) kann ich sofort übernehmen, schätze aber nun mit Hilfe der Cauchy-Schwarz Ungleichung die auftretenden Integrale ab, wobei ich jetzt $u^{(d)} \in X^{L_2}_{0(\Omega)}$ voraussetze. Ich erhalte mit (43) und (52)

$$
\begin{aligned}
|\int_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4} \cdot \psi^0_{k_l,i_l} dx_l|^2 &\leq \|\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4}\|^2_{L_2(\Omega_{i_l})} \cdot \frac{26}{35} \cdot h_{k_l} \\
|\int_{x_{i_l}-h_{k_l}}^{x_{i_l}+h_{k_l}} \frac{\partial^5 u}{\partial x_l^5} \cdot \chi^1_{k_l,i_l} dx_l|^2 &\leq \|\frac{\partial^5 u}{\partial x_l^5}\|^2_{L_2(\Omega_{i_l})} \cdot \frac{h^5_{k_l}}{252},
\end{aligned}
$$

wobei die Norm nur über dem Träger Ω_{i_l} der Funktionen $\psi^0_{k_l,i_l}$ bzw. $\chi^1_{k_l,i_l}$ zu bilden ist. Damit ergibt sich für den eindimensionalen Fall

$$
|c^0_{k_l,i_l}| \leq \left(\frac{13}{35 \cdot 24 \cdot 12}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\frac{\partial^4 u}{\partial x_l^4}\|_{L_2(\Omega_{i_l})} \cdot h^{\frac{7}{2}}_{k_l} \tag{56}
$$

$$
|c^1_{k_l,i_l}| \leq \left(\frac{1}{64 \cdot 252}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\frac{\partial^5 u}{\partial x_l^5}\|_{L_2(\Omega_{i_l})} \cdot h^{\frac{7}{2}}_{k_l}. \tag{57}
$$

Weiter gilt nun mit denselben Überlegungen wie in 4.3.1 die folgende Abschätzung für die d-dimensionalen hierarchischen Überschüsse

$$\begin{aligned} |c_{k,i}^{\alpha}| &= |c_{(k_1,\ldots,k_d),(i_1,\ldots,i_d)}^{(\alpha_1=1,\ldots,\alpha_m=1,\alpha_{m+1}=0,\ldots,\alpha_d=0)}| \\ &\leq \left(\frac{13}{35\cdot 24\cdot 12}\right)^{\frac{d-m}{2}} \cdot \left(\frac{1}{64\cdot 252}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot |u^{(d)}|_{L_2(\Omega_{(i_1,\ldots,i_d)})}^{m} \cdot h_{k_1}^{\frac{7}{2}} \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^{\frac{7}{2}}. \end{aligned} \tag{58}$$

Schritt (1) des Beweises ist hiermit in der Maximum- und L_2-Norm abgeschlossen.
Die Abschätzungen (55) und (58) stellen eine sehr wichtige Eigenschaft der *hierarchischen* kubischen Ansatzfunktionen dar, die dazu führt, daß Funktionen des Typs $\alpha = 0$ asymptotisch einen größeren Beitrag zur Interpolation bzw. zur Approximation beisteuern als alle anderen Typen von Basisfunktionen. Dies möchte ich an dieser Stelle bereits kurz erläutern. Der Beitrag einer Funktion $\psi_{k,i}^{\alpha}$ zum Interpolanten ist gemäß (39) bzw. (41) durch $|c_{k,i}^{\alpha}| \cdot \|\psi_{k,i}^{\alpha}\|$ in einer bestimmten Norm gegeben. Ich betrachte hier einmal die L_2-Norm. Dann sind die Beträge $|c_{k,i}^{\alpha}|$ alle von der Ordnung $O(h_{k_1}^{\frac{7}{2}} \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^{\frac{7}{2}})$ nach (58). Hingegen gilt für $\alpha = (\alpha_1 = 1, \ldots, \alpha_m = 1, \alpha_{m+1} = 0, \ldots, \alpha_d = 0)$ mit (43)

$$\|\psi_{k,i}^{\alpha}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \left(\frac{2}{105}\right)^m \cdot \left(\frac{26}{35}\right)^{d-m} h_{k_1}^3 \cdot \ldots \cdot h_{k_m}^3 \cdot h_{k_{m+1}} \cdot \ldots \cdot h_{k_d},$$

so daß der Gesamtbeitrag von der Ordnung $O(h_{k_1}^5 \cdot \ldots \cdot h_{k_m}^5 \cdot h_{k_{m+1}}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4)$ ist. Funktionen des Typs $\alpha = 0$ liefern demnach den größten Beitrag ($h_{k_l} < 1$ nehme ich hier und im weiteren an). Da die Basisfunktionen $\psi_{k,i}^{\alpha}$ mit festem α die Unterräume S_k^{α} aufspannen, tragen die S_k^{α} also unterschiedlich zur Approximation einer Funktion bei. Diese Tatsache wird in den folgenden Beweisen genutzt und wird in Kapitel 5 Anlaß zu einem adaptiven Verfahren geben, das die zu verwendenden Freiheitsgrade eines Gitterpunktes nach einem energieorientierten Kriterium auswählt.

4.4 Der Interpolationsfehler in der Maximumnorm

Die Schritte (2) bis (4) müssen noch abgearbeitet werden. Für die Abschätzung der Beiträge der Unterräume S_k^{α} greife ich einen Repräsentanten $u_k^{\alpha} \in S_k^{\alpha}$

$$u_k^{\alpha} = \sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \cdots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} c_{k,(i_1,\ldots,i_d)}^{\alpha} \cdot \psi_{k,(i_1,\ldots,i_d)}^{\alpha}$$

heraus und schätze ihn durch

$$\|u_k^\alpha\|_\infty \leq \max_{(i_1,\dots,i_d)} |c_{k,i}^\alpha| \cdot \|\psi_{k,i}^\alpha\|_\infty .$$

ab. Da

$$\|\psi^0_{k_l,i_l}\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \|\psi^1_{k_l,i_l}\|_\infty = \frac{4}{27} \cdot h_{k_l},$$

folgt mit (55) als obere Schranke für den Beitrag von u_k^α zum Interpolanten $(\alpha = (\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_m = 1, \alpha_{m+1} = 0, \dots, \alpha_d = 0))$

$$\begin{aligned} &\|u_k^\alpha\|_\infty \leq \\ &\leq \quad |u^{(d)}|_\infty^m \cdot \left(\frac{4}{27 \cdot 120}\right)^m \cdot \left(\frac{1}{24}\right)^{d-m} \cdot h_{k_1}^5 \cdot \ldots \cdot h_{k_m}^5 \cdot h_{k_{m+1}}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4 . \end{aligned}$$

Die Beiträge der Unterräume S_k^α sind also von unterschiedlicher Größenordnung, wie ich dies bereits erläutert habe. Die $S_k^{\alpha=0}$ liefern dabei die größten Beiträge. Weiter ist mit (44) $u_k = \sum\limits_\alpha u_k^\alpha$ und ich erhalte die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u_k\|_\infty &\leq \sum_\alpha \|u_k^\alpha\|_\infty \leq \\ &\leq \quad 2^d \cdot \max_\alpha \|u_k^\alpha\|_\infty = \left(\frac{1}{12}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_\infty^0 \cdot h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4 . \end{aligned}$$

Damit ist Schritt (2) und (3) des Beweises für die Maximumnorm gezeigt.

Der Interpolationsfehler des Voll-Gitter Raumes $B_n^{(d)}$

Nachdem der Beitrag der Unterräume S_k zum Interpolanten in der Maximumnorm abgeschätzt ist, kann der Interpolationsfehler auf dem vollen Gitter völlig analog zu [8] berechnet werden

$$\begin{aligned} &\|u^{(d)} - u_I^{(d)}\|_\infty = \\ &= \quad \| \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=1}^{\infty} u_{k_1,\dots,k_d} - \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_d=1}^{n} u_{k_1,\dots,k_d} \|_\infty \\ &\leq \quad \sum_{\substack{k_1,\dots,k_d \\ mindestens\ ein\ k_l > n}} \|u_{k_1,\dots,k_d}\|_\infty \\ &\leq \quad \left(\frac{1}{12}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_\infty^0 \cdot \left(\sum_{\substack{k_1,\dots,k_d \\ mindestens\ ein\ k_l > n}} h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4 \right) \end{aligned} \tag{59}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{12}\right)^d \cdot |u^{(d)}|^0_\infty \cdot \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^{k_1+\ldots+k_d} - \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_d=1}^{n} \left(\frac{1}{16}\right)^{k_1+\ldots+k_d}\right) \\
&= \left(\frac{1}{180}\right)^d \cdot |u^{(d)}|^0_\infty \cdot \left(1 - \left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right)^d\right) \\
&\leq \left(\frac{1}{180}\right)^d \cdot |u^{(d)}|^0_\infty \cdot d \cdot h_n^4.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Fehler von der Ordnung $O(h_n^4)$, wie dies für kubische Elemente zu erwarten ist.

Der Interpolationsfehler des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n^{(d)}$

Im Falle des dünnen Gitters läßt sich der Interpolationsfehler abschätzen durch

$$
\begin{aligned}
&\|u^{(d)} - \tilde{u}_I^{(d)}\|_\infty = \\
&= \|\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=1}^{\infty} u_{k_1,\ldots,k_d} - \sum_{k_1+\ldots+k_d \leq n+d-1} u_{k_1,\ldots,k_d}\|_\infty \\
&\leq \sum_{k_1+\ldots+k_d > n+d-1} \|u_{k_1,\ldots,k_d}\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{1}{12}\right)^d \cdot |u^{(d)}|^0_\infty \cdot \sum_{k_1+\ldots+k_d > n+d-1} h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4 \\
&= \left(\frac{1}{12}\right)^d \cdot |u^{(d)}|^0_\infty \cdot \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_1=d}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^{k_1+\ldots+k_d} - \sum_{k_1+\ldots+k_d \leq n+d-1} \left(\frac{1}{16}\right)^{k_1+\ldots+k_d}\right).
\end{aligned}
$$

Für die zweite Summe der letzten Zeile gebe ich mit [8] das Ergebnis ohne Beweis an

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_1+\ldots+k_d \leq n+d-1} \left(\frac{1}{16}\right)^{k_1+\ldots+k_d} \\
&\quad = \left(\frac{1}{15}\right)^d \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n - \sum_{j=1}^{d-1} \left(\frac{15}{16}\right)^j \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^n \binom{n+j-1}{j}\right],
\end{aligned}
$$

und damit ergibt sich als Interpolationsfehler

$$
\|u^{(d)} - \tilde{u}_I^{(d)}\|_\infty =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{180}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_\infty^0 \cdot \left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n - \left(\frac{1}{16}\right)^n \sum_{j=1}^{d-1} \left(\frac{15}{16}\right)^j \cdot \binom{n+j-1}{j}\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{180}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_\infty^0 \cdot h_n^4 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} \left(\frac{15}{16}\right)^j \cdot \binom{n+j-1}{j}\right). \qquad (60)
\end{aligned}
$$

Der Binomialkoeffizient $\binom{n+j-1}{j}$ ist von der Größenordnung n^j und die Summe über den Koeffizienten ist dann von der Größenordnung $O(n^{d-1}) = O((\mathrm{ld}(h_n^{-1}))^{d-1})$. Der Interpolationfehler ist also für das dünne Gitter von der Ordnung $O(h_n^4 \cdot (\mathrm{ld}(h_n^{-1}))^{d-1})$.

4.5 Die Abschätzung in der L_2-Norm

Schritt (2): Wieder ist der Beitrag einer Funktion $u_k^\alpha \in S_k^\alpha$ abzuschätzen:

$$
\begin{aligned}
\|u_k^\alpha\|_{L_2}^2 &= \| \sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \cdots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} c_{k,i}^\alpha \cdot \psi_{k,i}^\alpha \|_{L_2}^2 \\
&= \sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \cdots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} |c_{k,i}^\alpha|^2 \cdot \|\psi_{k,i}^\alpha\|_{L_2}^2,
\end{aligned}
$$

da die Träger $\Omega_{(i_1,\ldots,i_d)}$ disjunkt sind. Das ergibt mit (43) und (58) für $\alpha = (\alpha_1 = 1, \ldots, \alpha_m = 1, \alpha_{m+1} = 0, \ldots, \alpha_d = 0)$

$$
\begin{aligned}
\|u_k^\alpha\|_{L_2}^2 \leq &\left(\frac{1}{48 \cdot 7}\right)^{2m} \cdot \left(\frac{2}{15}\right)^m \cdot \left(\frac{13}{420}\right)^{2(d-m)} \cdot \\
&\cdot \left(|u^{(d)}|_{L_2(\Omega)}^m\right)^2 \cdot h_{k_1}^{10} \cdot \ldots \cdot h_{k_m}^{10} \cdot h_{k_{m+1}}^8 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^8.
\end{aligned}
$$

Diesmal ist $u \in X_{0(\Omega^{(d)})}^{L_2}$.

Schritt (3): Da $\|u_k\|_{L_2} \leq 2^d \cdot \max_\alpha \|u_k^\alpha\|_{L_2}$ wie in Abschnitt 4.4 abgeschätzt wird und das Maximum der $\|u_k^\alpha\|_{L_2}$ für $\alpha = 0$ angenommen wird, gilt

$$
\|u_k\|_{L_2} \leq \left(\frac{13}{210}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_{L_2}^0 \cdot h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4.
$$

Somit sind die Beiträge der Unterräume S_k, gemessen in der L_2-Norm, wieder von der Ordnung $O(h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4)$ wie im Falle der Maximumnorm. Schritt

(4) der Berechnung des Interpolationsfehlers führt deshalb für das volle und dünne Gitter zu denselben Fehlerordnungen wie in Abschnitt 4.4. Für das volle Gitter beträgt der Fehler

$$\|u^{(d)} - u_I^{(d)}\|_{L_2} \leq \left(\frac{13}{3150}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_{L_2}^0 \cdot d \cdot h_n^4 \tag{61}$$

und für das dünne Gitter

$$\begin{aligned} \|u^{(d)} - \tilde{u}_I^{(d)}\|_{L_2} \leq& \\ \leq \quad& \left(\frac{13}{3150}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_{L_2}^0 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^j \cdot \binom{n+j-1}{j}\right) \cdot h_n^4. \end{aligned} \tag{62}$$

Die bisherigen Ergebnisse möchte ich zusammenfassend in einem Satz festhalten.

Satz 1 *Sei $u \in X_{0(\Omega^{(d)})}^{max}$ gegeben. Weiter sei $\tilde{u}_I \in \tilde{B}_n^{(d)}$ der stückweise d-kubische Interpolant in der hierarchischen Darstellung (41) auf dem regulären dünnen Gitter $\tilde{G}_n^{(d)}$. Dann gilt für den Interpolationsfehler in der Maximumnorm*

$$\begin{aligned} \|u^{(d)} - \tilde{u}_I^{(d)}\|_\infty =& \\ = \quad& \left(\frac{1}{180}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_\infty^0 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} \left(\frac{15}{16}\right)^j \binom{n+j-1}{j}\right) \cdot h_n^4. \end{aligned}$$

Sei hingegen $u \in X_{0(\Omega^{(d)})}^{L_2}$, dann gilt für den Interpolationsfehler in der L_2-Norm

$$\|u^{(d)} - \tilde{u}_I^{(d)}\|_{L_2} \leq \left(\frac{13}{3150}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_{L_2}^0 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{d-1} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^j \cdot \binom{n+j-1}{j}\right) \cdot h_n^4.$$

Der Interpolationsfehler ist somit in beiden Normen von der Ordnung $O(h_n^4 \cdot (ld(h_n^{-1}))^{d-1})$.

Die Resultate aus Satz 1 geben nur erste Hinweise auf den Approximationsfehler in der L_2-Norm und Maximumnorm der diskreten Lösung einer partiellen Differentialgleichung, die mittels der Finite-Element Methode ermittelt wird. Ein streng mathematischer Beweis für den Approximationsfehler ist hiermit jedoch nicht geführt. Ein solcher Beweis ist aber in der Energienorm möglich und wird im nächsten Kapitel erläutert.

5 Die Approximation im Dünn-Gitter Raum $\tilde{B}_n^{(d)}$

Mit diesem Kapitel werden die Approximationseigenschaften des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n^{(d)}$ als Ansatz- und Testraum für ein Galerkin Verfahren zur Berechnung der Lösung einer partiellen elliptischen Differentialgleichung untersucht. Im vorausgegangenen Kapitel habe ich den Interpolationsfehler bei der Darstellung von Funktionen auf dünnen Gittern in der Maximumsnorm und der L_2-Norm eingehend untersucht. Jedoch liefern die dort bewiesenen Abschätzungen keine Aussagen über die *Approximation* einer Funktion, die Lösung einer partiellen Differentialgleichung ist und mit Hilfe der Finite-Element Methode berechnet werden soll. Hingegen ergeben Abschätzungen des Interpolationsfehlers in der Energienorm, die durch die variationelle Formulierung der Differentialgleichung induziert wird, auch obere Schranken für den Approximationsfehler (Lemma von Céa). Deshalb werde ich Fehlerabschätzungen in den Energienormen, die der biharmonischen Gleichung und der Poisson Gleichung zugeordnet sind, für den Dünn-Gitter Raum $\tilde{B}_n^{(d)}$ herleiten. Anschließend bin ich in der Lage, die Approximationseigenschaften des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n^{(d)}$ und des Voll-Gitter Raumes $B_n^{(d)}$ miteinander zu vergleichen. Das Kapitel möchte ich abschließen mit der Diskussion adaptiver Techniken. Kurz werde ich dabei auch auf die verwendete Datenstruktur und die Gittererzeugung eingehen.

5.1 Der Interpolationsfehler in der H^2-Norm

In der Finite-Element Theorie wird eine gegebene Differentialgleichung als Variationsproblem formuliert. Ist die zugehörige Bilinearform elliptisch, so induziert sie eine sogenannte Energienorm. Die zur biharmonischen Gleichung assoziierte Energie ist durch

$$\|u^{(2)}\|_{E_B} = \left(\int_\Omega (\Delta u)^2 d\Omega \right) \tag{63}$$

gegeben. Die Verallgemeinerung der biharmonischen Gleichung auf den d-dimensionalen Fall führt zu folgender Differentialgleichungen 4. Ordnung

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{m=1}^{d} \frac{\partial^4 u^{(d)}}{\partial x_j^2 \partial x_m^2} = f. \tag{64}$$

Ich definiere deshalb allgemeiner die Seminorm

$$|u^{(d)}|_2 = \tag{65}$$
$$= \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 u^{(d)}}{\partial x_j^2} \right)^2 + \sum_{\substack{j,m=1 \\ j\neq m}}^{d} \left(\frac{\partial^2 u^{(d)}}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 \right) dx_1 \dots x_d \right)^{\frac{1}{2}},$$

die bei homogenen Dirichlet Randbedingungen zur vollen H^2-Norm äquivalent ist. Die Berechnung der oberen Fehlerschranke in der Norm (65) erfolgt wieder nach dem in Abschnitt 4.2 genannten Beweisschema.
Schritt (1): Die $c_{k,i}^\alpha$ habe ich durch (58) bereits abgeschätzt.
Schritt (2): Die Beiträge der Unterräume S_k^α sind (die Träger $\Omega_{(i_1,\dots,i_d)}$ sind disjunkt):

$$|u_k^\alpha|_2^2 = |\sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \dots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} c_{k,i}^\alpha \cdot \psi_{k,i}^\alpha|_2^2 = \sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \dots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} |c_{k,i}^\alpha|^2 \cdot |\psi_{k,i}^\alpha|_2^2$$
$$= \sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \dots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} |c_{k,i}^\alpha|^2 \cdot \int_{x_1-h_{k_1}}^{x_1+h_{k_1}} \dots \int_{x_d-h_{k_d}}^{x_d+h_{k_d}} \left[\sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 \psi_{k,i}^\alpha}{\partial x_j^2} \right)^2 + \right. \tag{66}$$
$$\left. + \sum_{\substack{j,m=1 \\ j\neq m}}^{d} \left(\frac{\partial^2 \psi_{k,i}^\alpha}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 \right] dx_1 \dots dx_d.$$

Obige Summen kann ich mit (43) ausrechnen und erhalte z.B. für den Multiindex $\alpha = 0$

$$\int_{x_1-h_{k_1}}^{x_1+h_{k_1}} \dots \int_{x_d-h_{k_d}}^{x_d+h_{k_d}} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2 \psi_{k,i}^\alpha}{\partial x_j^2} \right)^2 dx_1 \dots dx_d =$$
$$= \left(\frac{26}{35} \right)^{d-1} \cdot 24 \cdot \sum_{j=1}^{d} \frac{h_{k_1} \cdot \dots \cdot h_{k_d}}{h_{k_j}^4}$$

und

$$\int_{x_1-h_{k_1}}^{x_1+h_{k_1}} \dots \int_{x_d-h_{k_d}}^{x_d+h_{k_d}} \sum_{\substack{j,m=1 \\ j\neq m}}^{d} \left(\frac{\partial^2 \psi_{k,i}^\alpha}{\partial x_j \partial x_m} \right)^2 dx_1 \dots dx_d =$$

$$= \left(\frac{26}{35}\right)^{d-2} \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^2 \sum_{\substack{j,m=1\\ j\neq m}}^{d} \frac{h_{k_1} \cdot \ldots \cdot h_{k_d}}{h_{k_j}^2 h_{k_m}^2}. \tag{67}$$

Für $\alpha = 0$ ist also mit (58)

$$\begin{aligned} |u_k^{\alpha=0}|_2^2 &\leq \\ &\leq \left(\frac{13}{35 \cdot 12}\right)^{2d} \cdot (|u^{(d)}|^0_{L_2(\Omega)})^2 \cdot h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4 \\ &\quad \cdot \left(\frac{35 \cdot 12}{13} \cdot \sum_{j=1}^{d} \frac{h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4}{h_{k_j}^4} + \left(\frac{42}{13}\right)^2 \cdot \sum_{\substack{j,m=1\\ j\neq m}}^{d} \frac{h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4}{h_{k_j}^2 h_{k_m}^2} \right). \end{aligned} \tag{68}$$

Für $\alpha = 1$ erhält man analog

$$\begin{aligned} |u_k^{\alpha=1}|_2^2 &\leq \\ &\leq \left(\frac{1}{32 \cdot 105 \cdot 252}\right)^{d} \cdot (|u^{(d)}|^d_{L_2(\Omega)})^2 \cdot h_{k_1}^6 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^6 \cdot \\ &\quad \cdot \left(105 \cdot 4 \cdot \sum_{j=1}^{d} \frac{h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4}{h_{k_j}^4} + 14^2 \cdot \sum_{\substack{j,m=1\\ j\neq m}}^{d} \frac{h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4}{h_{k_j}^2 h_{k_m}^2} \right). \end{aligned} \tag{69}$$

Der Beitrag von $|u_k^{\alpha=1}|_2$ ist somit von höherer Ordnung in den h_{k_l} ($h_{k_l} < 1$) als der von $|u_k^{\alpha=0}|_2$. Es ist leicht nachzurechnen, daß $|u_k^{\alpha\neq 0}|_2^2 < |u_k^{\alpha=0}|_2^2$ für $h_{k_l} < 1$ gilt.
Schritt (3):

$$\begin{aligned} |u_k|_2 &\leq 2^d \cdot \max_{\alpha} |u_k^\alpha|_2 = 2^d \cdot |u_k^0|_2 \\ &\leq \left(\frac{13}{35 \cdot 6}\right)^d \cdot |u^{(d)}|^0_{L_2(\Omega)} \cdot 2 \cdot d \cdot \gamma \cdot h_{k_1}^2 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^2, \end{aligned} \tag{70}$$

wobei

$$\gamma^2 = \max\left(\max_{1\leq j\leq d} \left(\frac{35 \cdot 12}{13} \cdot \frac{h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4}{h_{k_j}^4} \right), \max_{\substack{1\leq j,m\leq d\\ j\neq m}} \left(\left(\frac{42}{13}\right)^2 \cdot \frac{h_{k_1}^4 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^4}{h_{k_j}^2 h_{k_m}^2} \right) \right)$$

ist.
Schritt (4): Der Beitrag einer Funktion $u_k \in S_k$ ist von der Größenordnung

$O(h_{k_1}^2 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^2)$. Wie in Abschnitt 4.4 kann der Interpolationsfehler für das volle Gitter sofort zu

$$|u^{(d)} - u_I^{(d)}|_2 \leq \left(\frac{13}{35 \cdot 18}\right)^d \cdot |u^{(d)}|_{L_2(\Omega)}^0 \cdot 2 \cdot d^2 \cdot \gamma \cdot h_n^2 \tag{71}$$

berechnet werden und ist also von der Ordnung $O(h_n^2)$.

Den Interpolationsfehler für das dünne Gitter werde ich hier nur für den zweidimensionalen Fall herleiten und schreibe hierfür $|u_{k_1,k_2}|_2$ nochmals an

$$\begin{aligned} |u_{k_1,k_2}|_2^2 &\leq \\ &\leq \left(\frac{13}{35 \cdot 6}\right)^2 \cdot |u^{(2)}|_{L_2(\Omega)}^0 \cdot h_{k_1}^2 \cdot h_{k_2}^2 \cdot \left(\left(\frac{35 \cdot 24}{13} + \left(\frac{42}{13}\right)^2 \cdot 2\right) \cdot \max(h_{k_1}^4, h_{k_2}^4)\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

da $h_{k_1}^4 + h_{k_2}^4 \leq 2 \cdot \max(h_{k_1}^4, h_{k_2}^4)$ und $h_{k_1}^2 \cdot h_{k_2}^2 \leq \max(h_{k_1}^4, h_{k_2}^4)$. Der Interpolationsfehler ist dann

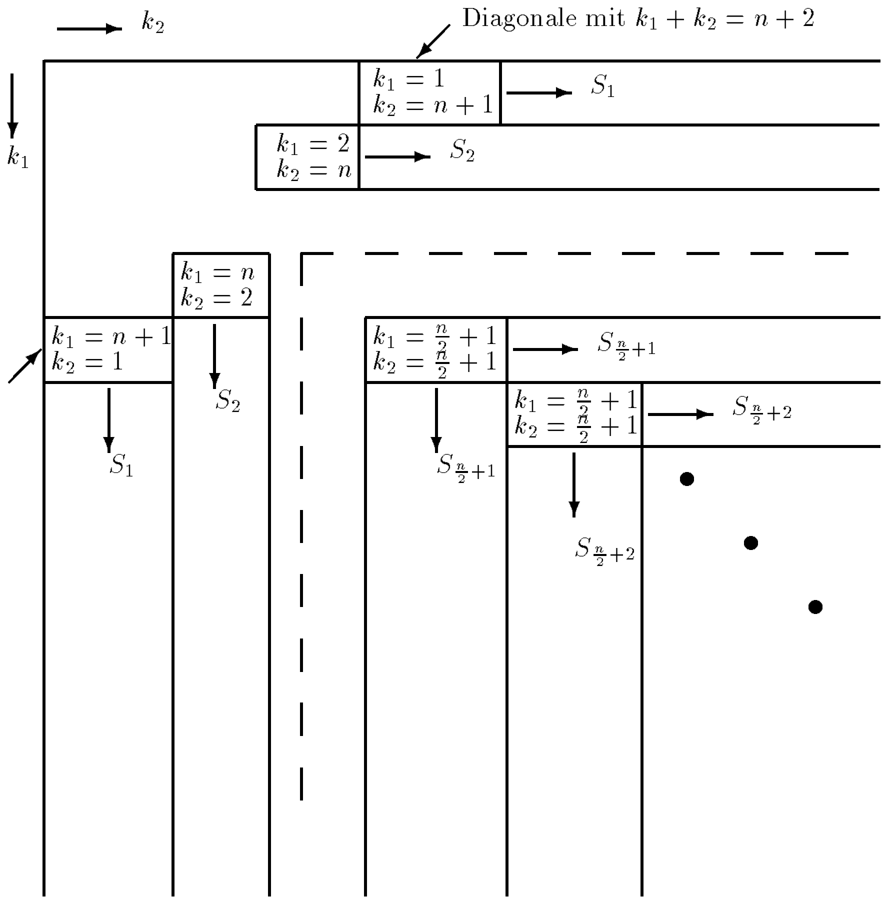
$$\begin{aligned} |u^{(2)} - \tilde{u}_I^{(2)}|_2 &\leq \sum_{k_1+k_2>n+1} |u_{k_1,k_2}|_2 \leq \\ &\leq \frac{2}{13} \cdot \left(\frac{13}{35 \cdot 6}\right)^2 \cdot \sqrt{3612} \cdot |u^{(2)}|_{L_2(\Omega)}^0 \cdot \sum_{k_1+k_2>n+1} h_{k_1}^2 \cdot h_{k_2}^2 \cdot \max(h_{k_1}^2, h_{k_2}^2). \end{aligned}$$

Der Abb.11 ist zu entnehmen, daß gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k_1+k_2>n+1} & h_{k_1}^2 \cdot h_{k_2}^2 \cdot \max(h_{k_1}^2, h_{k_2}^2) \leq \\ &\leq 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^s \cdot \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \ldots\right)\right] \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^s \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^t \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^s \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{18} \cdot h_n^2, \end{aligned}$$

und damit kann der Interpolationsfehler auf dem dünnen Gitter für zweidimensionale Probleme abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} |u^{(2)} - \tilde{u}_I^{(2)}|_2 &\leq \\ &\leq \frac{1}{13 \cdot 18} \cdot \left(\frac{13}{35 \cdot 3}\right)^2 \cdot \sqrt{903} \cdot |u^{(2)}|_{L_2(\Omega)}^0 \cdot h_n^2. \end{aligned} \tag{72}$$



$$S_1 = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^{n+1} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (\tfrac{1}{4})^s, \text{ da } max(h_{k_1}^2, h_{k_2}^2) = \tfrac{1}{4}$$

$$S_2 = (\tfrac{1}{4})^2 \cdot (\tfrac{1}{4})^{n+1} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (\tfrac{1}{4})^s, \text{ da } max(h_{k_1}^2, h_{k_2}^2) = \tfrac{1}{16}$$

$$S_{\frac{n}{2}+1} = (\tfrac{1}{4})^{\frac{n}{2}+1} \cdot (\tfrac{1}{4})^{n+1} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (\tfrac{1}{4})^s, \text{ da } max(h_{k_1}^2, h_{k_2}^2) = (\tfrac{1}{4})^{\frac{n}{2}+1}$$

$$S_{\frac{n}{2}+2} = (\tfrac{1}{4})^{\frac{n}{2}+2} \cdot (\tfrac{1}{4})^{n+1} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} (\tfrac{1}{4})^s, \text{ da } max(h_{k_1}^2, h_{k_2}^2) = (\tfrac{1}{4})^{\frac{n}{2}+2}$$

$$\sum_{k_1+k_2>n+1} h_{k_1}^2 \cdot h_{k_2}^2 \cdot \max(h_{k_1}^2, h_{k_2}^2) \leq 2 \cdot (S_1 + S_2 + \ldots + S_{\frac{n}{2}+1} + S_{\frac{n}{2}+2} \ldots)$$

Abbildung 11: Zur Summenberechnung im zeidimensionalen Fall.

Das Ergebnis für den dreidimensionalen Fall gebe ich ohne Beweis an, da der Interpolationsfehler analog zu obiger Herleitung für den zweidimensionalen Fall berechnet werden kann. Hier ist allerdings die Summe

$$\sum_{k_1+k_2+k_3>n+2} h_{k_1}^2 \cdot h_{k_2}^2 \cdot h_{k_3}^2 \cdot \max_{\substack{1\leq j,m\leq 3\\ j\neq m}} (h_{k_j}^2 \cdot h_{k_m}^2) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot h_n^2$$

zu berechnen und man erhält

$$\begin{aligned} &|u^{(3)} - \tilde{u}_I^{(3)}|_2 \leq \\ &\leq \left(\frac{13}{35 \cdot 6}\right)^3 \cdot \frac{2}{13} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \sqrt{749} \cdot |u^{(3)}|_{L_2(\Omega)}^0 \cdot h_n^2. \end{aligned} \tag{73}$$

5.2 Der Interpolationsfehler in der H^1-Norm

Die zur Poisson Gleichung assoziierte Energienorm ist mit

$$|u^{(d)}|_1 = \left(\int_\Omega \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u^{(d)}}{\partial x_j}\right)^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \tag{74}$$

gegeben und ist wiederum für homogene Randbedingungen äquivalent zur H^1-Norm.
Schritt (1): Die $c_{k,i}^\alpha$ sind bereits mit (58) abgeschätzt.
Schritt (2):

$$\begin{aligned} &|u_k^\alpha|_1^2 = \\ &= \sum_{i_1=1}^{M_{k_1}} \dots \sum_{i_d=1}^{M_{k_d}} |c_{k,i}^\alpha|^2 \int_{x_1-h_{k_1}}^{x_1+h_{k_1}} \dots \int_{x_d-h_{k_d}}^{x_d+h_{k_d}} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial \psi_{k,i}^\alpha}{\partial x_j}\right)^2 dx_1 \dots dx_d. \end{aligned}$$

Mit (43) sind alle auftretenden Integrale bekannt und für $\alpha = 0$ wird $|u_k^\alpha|_1^2$ wieder maximal. Daher berechne ich nur

$$\begin{aligned} &|u_k^0|_1^2 \leq \\ &\leq \left(\frac{13}{35 \cdot 12}\right)^{2d} \cdot \left(|u^{(d)}|_{L_{2(\Omega)}}^0\right)^2 \cdot \frac{42}{13} \cdot h_{k_1}^6 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^6 \cdot \left(\sum_{j=1}^d \frac{h_{k_1}^2 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^2}{h_{k_j}^2}\right). \end{aligned}$$

Dies liefert in Schritt (3) des Beweises

$$
\begin{aligned}
|u_k|_1 &\le 2^d \cdot \max_\alpha |u_k^\alpha|_1 \\
&\le \left(\frac{13}{35\cdot 6}\right)^d \cdot \left(\frac{42}{13}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |u^{(d)}|^0_{L_2(\Omega)} \cdot h_{k_1}^3 \cdot \ldots \cdot h_{k_d}^3 \cdot \sqrt{d} \cdot \max_{1\le j\le d}\left(\frac{h_{k_1}\cdot \ldots \cdot h_{k_d}}{h_{k_j}}\right).
\end{aligned}
$$

Schritt (4): Für das volle Gitter gilt dann

$$
\begin{aligned}
&|u^{(d)} - u_I^{(d)}|_1 \le \qquad (75)\\
&\le \left(\frac{13}{35\cdot 42}\right)^d \cdot \left(\frac{42}{13}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |u^{(d)}|^0_{L_2(\Omega)} \cdot d^{\frac{3}{2}} \cdot \gamma \cdot h_n^3,
\end{aligned}
$$

wobei jetzt

$$
\gamma = \max_{1\le j\le d}\left(\frac{h_{k_1}\cdot \ldots \cdot h_{k_d}}{h_{k_j}}\right).
$$

Für das dünne Gitter betrachte ich wieder zuerst den zweidimensionalen Fall. Nach demselben Schema wie zuvor (Abb. 11) wird die auftretende Summe berechnet. Das ergibt

$$
\begin{aligned}
&|u^{(2)} - \tilde{u}_I^{(2)}|_1 \le \qquad (76)\\
&\le \left(\frac{13}{35\cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{84}{13}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot |u^{(2)}|^0_{L_2(\Omega)} \cdot \sum_{k_1+k_2>n+1} h_{k_1}^3 \cdot h_{k_2}^3 \cdot \max(h_{k_1}, h_{k_2}) \\
&\le \left(\frac{13}{35\cdot 12}\right)^2 \cdot \left(\frac{21}{13}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{7} \cdot |u^{(2)}|^0_{L_2(\Omega)} \cdot h_n^3.
\end{aligned}
$$

Die entsprechende Rechnung für den dreidimensionalen Fall liefert das Ergebnis (siehe hierzu [8])

$$
\begin{aligned}
&|u^{(3)} - \tilde{u}_I^{(3)}|_1 \le \qquad (77)\\
&\le \left(\frac{13}{35\cdot 6}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{14}{13}} \cdot \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2 \cdot |u^{(3)}|^0_{L_2(\Omega)} \cdot h_n^3. \qquad (78)
\end{aligned}
$$

Die Seminormen sind nun im Falle homogener Dirichlet Randbedingungen äquivalent zu den entsprechenden vollen Normen. Da Probleme mit inhomogenen Dirichlet Randbedingungen auf solche mit homogenen Randbedingungen zurückgeführt werden können [6], bleiben die Abschätzungen auch für diese Fälle gültig. Die Ergebnisse für die regulären dünnen Gitter fasse ich im folgenden Satz zusammen.

Satz 2 *Sei $u \in X^{L_2}_{0(\Omega^{(d)})}$ gegeben. Weiter sei $\tilde{u}_I \in \tilde{B}^{(d)}_n$ der stückweise d-kubische Interpolant in der hierarchischen Darstellung (41) auf dem regulären dünnen Gitter $\tilde{G}^{(d)}_n$. Dann gilt mit $d = 2$ bzw. $d = 3$ für den Interpolationsfehler in der Energienorm (65)*

$$\begin{aligned}
|u^{(2)} - \tilde{u}^{(2)}_I|_2 &\leq \frac{1}{13 \cdot 18} \cdot \left(\frac{13}{35 \cdot 3}\right)^2 \cdot \sqrt{903} \cdot |u^{(2)}|^0_{L_2(\Omega)} \cdot h^2_n, \\
|u^{(3)} - \tilde{u}^{(3)}_I|_2 &\leq \left(\frac{13}{35 \cdot 6}\right)^3 \cdot \frac{2}{13} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \sqrt{749} \cdot |u^{(3)}|^0_{L_2(\Omega)} \cdot h^2_n
\end{aligned}$$

und in der Energienorm (74)

$$\begin{aligned}
|u^{(2)} - \tilde{u}^{(2)}_I|_1 &\leq \left(\frac{13}{35 \cdot 12}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{21}{13}} \cdot \frac{1}{7} \cdot |u^{(2)}|^0_{L_{2(\Omega)}} \cdot h^3_n, \\
|u^{(3)} - \tilde{u}^{(3)}_I|_1 &\leq \left(\frac{13}{35 \cdot 6}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{14}{13}} \cdot \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2 \cdot |u^{(3)}|^0_{L_{2(\Omega)}} \cdot h^3_n.
\end{aligned}$$

5.3 Approximation höherer Ordnung

An dieser Stelle möchte ich den wesentlichen Vorteil der dünnen Gitter gegenüber vollen Gittern bei der Approximation einer Funktion nochmals herausstellen. Dazu sind die im Satz 2 gegebenen Resultate auf regulären dünnen Gittern als obere Schranken auch für den *Approximationsfehler* zu interpretieren. Nach dem Lemma von Céa gilt ja

$$\|u - u_h\|_E \leq C \cdot \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_E.$$

Hierbei bezeichnet $u \in H$ die gesuchte Lösung aus einem Hilbertraum H, $u_h \in V_h$ die in einem Variationsansatz gewonnene Lösung aus dem Finite-Element Raum $V_h \subset H$ und $\|\cdot\|_E$ die assoziierte Energienorm. Die diskrete Finite-Element Lösung u_h wird also als Bestapproximierende im Raum V_h ausgewiesen. Setzt man nun speziell den Interpolanten $u_I \in V_h$ für v_h ein, so liefern die Interpolationsabschätzungen aus Satz 2 eine obere Schranke für den Approximationsfehler. Mit $H = H^2_{0(\Omega^{(d)})}$, $V_h = \tilde{B}^{(d)}_n$ und der Dünn-Gitter Lösung $\tilde{u}^{(d)}_h$, die mittels eines noch zu besprechenden Finite-Element Verfahrens gewonnen wird, gilt dann für den Fehler $|e^{(d)}| = |u^{(d)} - \tilde{u}^{(d)}_h|$ ($d = 2$

bzw. $d = 3$)

$$|e^{(2)}|_2 \leq C_1 \cdot h_n^2$$
$$|e^{(3)}|_2 \leq C_2 \cdot h_n^2 \tag{79}$$

und

$$|e^{(2)}|_1 \leq C_3 \cdot h_n^3$$
$$|e^{(3)}|_1 \leq C_4 \cdot h_n^3. \tag{80}$$

mit den von der Maschenweite h_n unabhängigen Konstanten C_i aus Satz 2. Die Approximationsfehler (79) und (80) ermöglichen nun einen Vergleich der Approximationsordnung zwischen dem Dünn-Gitter Verfahren und dem Voll-Gitter Verfahren. Dazu muß die erreichte Genauigkeit in Relation zu der benötigten Anzahl der Gitterpunkte (Freiheitsgrade) gesetzt werden. Den Fehler gebe ich deshalb in Bezug auf die Zahl der Gitterpunkte N durch

$$|e^{(d)}| \sim N^{-\beta} \tag{81}$$

an und nicht wie üblich mit Hilfe der Maschenweite h_n des zugrundeliegenden Gitters. Den Exponenten β bezeichne ich nun als Ordnungsgrad der Approximation. In den Energienormen (65) und (74) ist der Fehler dann mit

$$|e|_1 \sim N^{-\beta_1} \quad \text{bzw.} \quad |e|_2 \sim N^{-\beta_2} \tag{82}$$

gegeben. Die Approximationsordnungen β_1 und β_2 sind in den Tab. 1 bis 4 für die Raumdimensionen d über dem Ordnungsgrad p der verwendeten finiten Elemente aufgetragen, jeweils für das dünne und das volle Gitter. Die Beweise für d-lineare Elemente sind [8] zu entnehmen, die Ergebnisse für $p \neq 3$ sind hier ohne Beweis aufgeführt. Zunächst gehe ich von der biharmonischen Gleichung aus und betrachte den Approximationsfehler in der $|\cdot|_2$ Norm (65). Im zweidimensionalen Fall ist so z.B. $|e^{(2)}|_2 \sim h_n^2 \approx N^{-2}$ für das dünne Gitter und $|e^{(2)}|_2 \sim h_n^2 = N^{-1}$ für das volle Gitter, wobei ich die stückweise kubische Hermite-Interpolation ($p = 3$) voraussetze. $\beta_2 = 2$ und $\beta_2 = 1$ ist in den Tab.3 und 4 entsprechend für das jeweilige Gitter eingetragen. Hierbei vernachlässige ich logarithmische Faktoren, denn die Zahl N der Gitterpunkte eines dünnen Gitters ist ja genau genommen von der Ordnung

$d \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,2,3	1	2	**3**	4	5	6	7	8	9

Tabelle 1: Die Approximationsordnung β_1 auf dem regulären dünnen Gitter, Norm $|\cdot|_1$.

$d \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	**3**	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$	**3**

Tabelle 2: Die Approximationsordnung β_1 auf dem vollen Gitter, Norm $|\cdot|_1$.

$d \setminus p$	3	4	5	6	7	8
1,2,3	**2**	3	4	5	6	7

Tabelle 3: Die Approximationsordnung β_2 auf dem regulären dünnen Gitter, Norm $|\cdot|_2$.

$d \setminus p$	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
2	1	$\frac{3}{2}$	**2**	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
3	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	**2**	$\frac{7}{3}$

Tabelle 4: Die Approximationsordnung β auf dem vollen Gitter, Norm $|\cdot|_2$.

$d \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,2,3	2	3	**4**	5	6	7	8	9	10	11	12

Table 5: Die Approximationsordnung β auf dem regulären dünnen Gitter gemessen in der L_2-Norm.

$d \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	**4**	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	6
3	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	$\frac{11}{3}$	**4**

Table 6: Die Approximationsordnung β auf dem vollen Gitter gemessen in der L_2-Norm.

$O(h_n(\mathrm{ld}(h_n^{-1}))^{d-1})$ [8]. Für dünne Gitter ändert sich damit der Ordnungsgrad nicht mit der Dimension des Problems. Der Vergleich der beiden Gitter zeigt also für $p = 3$ im zweidimensionalen Fall, daß das Voll-Gitter Verfahren erst bei Verwendung quintischer Elemente von derselben Ordnung ist wie das Verfahren auf dünnen Gittern. Im dreidimensionalen Fall müssen auf einem vollen Gitter sogar Elemente der Ordnung 7 verwendet werden.
Ausgehend von der Poisson Gleichung stellt sich der Vergleich in der Norm $|\cdot|_1$ wie folgt dar: Im zweidimensionalen Fall erhält man für kubische Elemente auf dem dünnen Gitter den Ordnungsgrad $\beta_1 = 3$, auf dem vollen Gitter hingegen nur $\beta_1 = \frac{3}{2}$. Erst bei Verwendung von Elementen vom Grade $p = 6$ erreicht das Voll-Gitter Verfahren dieselbe Approximationsgüte wie die Dünn-Gitter Technik, im dreidimensionalen Fall sogar erst bei Elementen des Ordnungsgrades $p = 9$.
Schließlich habe ich noch die Approximationsordnungen in Bezug auf die L_2-Norm in den Tab.5 und 6 zusammengefaßt. Hierbei nehme ich an, daß sich die Abschätzungen aus Abschnitt 4.5 für die Interpolationsfehler in der L_2-Norm auf die Approximationsfehler übertragen lassen. Wieder vernachlässige ich logarithmische Terme. Aus den Tab.5 und 6 geht hervor, daß im dreidimensionalen Fall auf vollen Gittern Elemente der Ordnung $p = 11$ verwendet werden müssen, um die Approximationgüte des dünnen Gitters mit Elementen von Grade $p = 3$ zu erreichen.
Verfahren auf dünnen Gittern führen somit bei Verwendung von Elementen derselben Ordnung zu einer höheren Approximationsordnung als Verfahren auf vollen Gittern. Auf diesen Sachverhalt wurde bereits in [8] für den Fall d-linearer Elemente hingewiesen.
Bisher bezogen sich alle Fehlerabschätzungen und Überlegungen zur Approximationsordnung auf reguläre dünne Gitter, also auf nicht adaptiv verfeinerte, in ihrer Struktur regelmäßige dünne Gitter (siehe [8]). Auch der Ordnungsgrad p der Elemente wurde fest gewählt und nicht, wie dies z.B. bei p-Versionen der Finite-Element Methode geschieht, adaptiv varriiert [2]. Da adaptive Techniken zu Funktionenräumen mit einer höherer Approximationsgüte führen, möchte ich im folgenden Abschnitt adaptive Methoden besprechen.

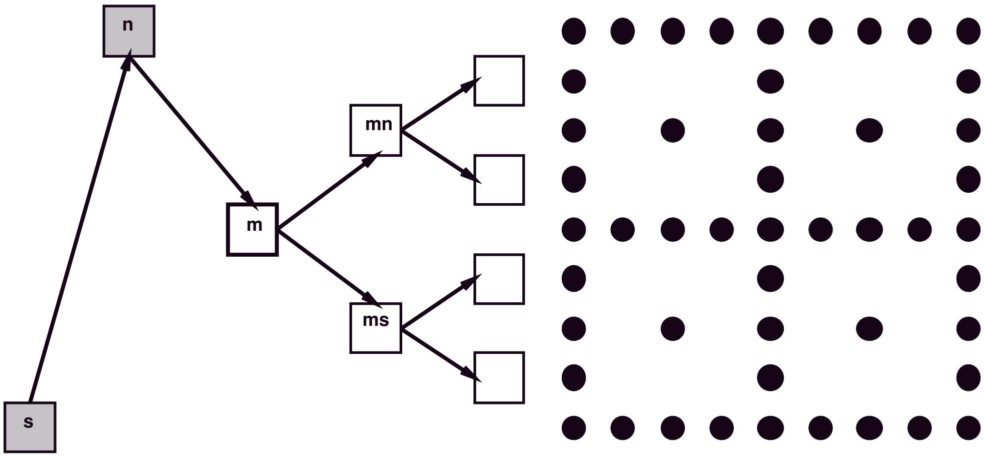


Abbildung 12: Der Zeilenbaum für das dünne Gitter $\tilde{G}_3^{(2)}$.

5.4 Adaptivität

Adaptive Techniken werden bei der numerischen Berechnung der Lösung partieller Differentialgleichungen eingesetzt, um die gesuchte Funktion mit minimalem Aufwand möglichst gut zu approximieren. Bei auftretenden Singularitäten ist eine adaptive Technik unumgänglich, um eine akzeptable Konvergenz zu erhalten [12, 13]. Vielen adaptiven Techniken ist gemein, daß sie dynamisch bei Ablauf des Programms diejenigen Freiheitsgrade auswählen, die wesentlich zur Verbesserung der Lösung beitragen. Daher werden bei der algorithmischen Realisierung solcher Verfahren dynamische Datenstrukturen benötigt. Zunächst werde ich deshalb die zugrundeliegende Datenstruktur und das sich daraus ergebende Verfahren zur Gittererzeugung erläutern.

5.4.1 Die Datenstruktur

Als Datenstruktur wurden wie in [8] Binärbäume verwendet. Ein konkretes Beispiel will ich kurz für den zweidimensionalen Fall anhand der Abb.12 und Abb.13 geben. In Abb.12 ist das reguläre dünne Gitter $\tilde{G}_3^{(2)}$ mit dem zugehörigen Zeilenbaum gezeigt. Jede Zeile des Gitters ist genau einem Knoten des Zeilenbaumes zugordnet. Jeder Knoten enthält nun einen Verweis auf einen weiteren Binärbaum, in dem die Daten der einzelnen Gitterpunkte der jeweiligen Zeile gehalten werden. Dieser ,,Punkte"-Baum ist in Abb.13 für die

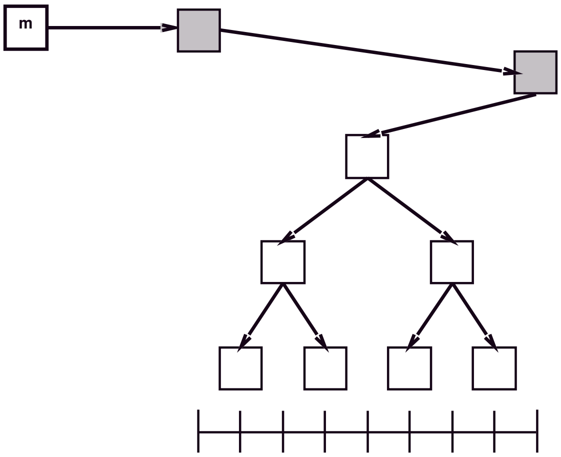


Abbildung 13: Der Binärbaum für die Gitterpunkte der Mittelzeile m.

Mittelzeile m des Gitters dargestellt. In den obersten beiden Knoten (grau unterlegt) sind die Daten für den westlichen bzw. östlichen Randpunkt der aktuellen Zeile gespeichert. Entsprechend sind die ersten zwei Knoten des Zeilenbaumes der nördlichen bzw. der südlichen Randzeile zugeordnet. Mit den Binärbäumen als dynamische Datenstruktur gewinnt man für die Darstellung von Funktionen wichtige Vorteile. Zuerst einmal spiegelt ein Binärbaum die Hierarchie der Basisfunktionen wider. Die Tiefe t des Baumes dient als Parameter für den Aufbau eines regulären dünnen Gitters. Nach Abb.9 wird z.B. das Gitter $\tilde{G}_{t-1}^{(2)}$ durch Unterräume S_{k_1,k_2} mit $k_1+k_2=t+1$ erweitert, um das dünne Gitter $\tilde{G}_t^{(2)}$ zu erhalten. D.h. sowohl Zeilenbaum als auch der Punktebaum des Gitters $\tilde{G}_{t-1}^{(2)}$ muß um eine Stufe vertieft werden. Zur Beschreibung eines regulären dünnen Gitters ist damit der Parameter t ausreichend. Desweiteren kann die Datenstruktur rekursiv auf den d-dimensionalen Fall erweitert werden. Auch können innere Punkte wie Randpunkte dynamisch erzeugt werden. Die Erzeugung eines Gitterpunktes ist nämlich nichts anderes als das Einhängen eines neuen Blattes in den Datenbaum.
Kurz sei noch das Verfahren zur Erzeugung des dünnen Gitters für das Einheitsquadrat geschildert. Zuerst werden die Eckpunkte erzeugt, d.h. die ersten zwei Knoten des Zeilenbaumes und jeweils zwei der Punktebäume werden generiert. Im zweiten Schritt kommen die Mittelpunkte der Seiten und des Quadrates hinzu. Dies entspricht der Hinzunahme des Raumes S_{11} (siehe Abb.9). Wie oben erläutert, werden nun in jedem weiteren Schritt Git-

terpunkte erzeugt, die mit den Unterräumen S_{k_1,k_2} mit $k_1 + k_2 = konst.$ korrespondieren. Die entsprechenden Punkte auf dem Rand werden dabei mitgeneriert. Es ist aber auch möglich, die Randwerte vorzubesetzen. Dazu wird der Datenbaum generiert, der nur Knoten enthält, die Randpunkten entsprechen. Der Zeilenbaum wird dann bis zu einer vorgegebenen Tiefe t aufgebaut, der Punktebaum enthält jedoch nur die oberen zwei Knoten. Diese Vorgehensweise empfiehlt sich bei Randwertproblemen vom Dirichlet'schen Typ.

5.4.2 Adaptive Techniken

Wie ich bereits erwähnt habe, ist es bei der numerischen Berechnung von Lösungen partieller Differentialgleichungen mittels der Finite-Element Methode wichtig, Funktionenräume zu verwenden, in denen die gesuchte Funktion mit möglichst geringem Aufwand, d.h. aber mit einer möglichst geringen Zahl von Freiheitsgraden, möglichst gut approximiert wird. Eine bessere Approximation ist jedoch andererseits mit einer Erhöhung der Dimension des Finite-Element Ansatzraumes verbunden. Ein effizientes Finite-Element Verfahren muß also folgende Aufgabe lösen:

> Bei einer vorgegebenen Zahl von Freiheitsgraden ist die bestmögliche Approximation bzgl. einer bestimmten Norm zu realisieren.

Adaptive Techniken wie die h-, p- und h-p-Versionen der Finite-Element Methode versuchen dieses Ziel dadurch zu erreichen, daß dynamisch bei Ablauf des Programms nach gewissen Kriterien Freiheitsgrade ausgewählt werden, die eine gute Approximation gewährleisten. Die h-Version hält dabei den Ordnungsgrad der Elemente fest und verfeinert das Gitter selbst adaptiv. Die p-Version hingegen variiert den Ordnungsgrad p der Elemente (gewöhnlich ist $1 \leq p \leq 8$) auf einem fest vorgegebenen Gitter. Die h-p-Version koppelt diese beiden Versionen. Sie erlaubt eine Approximation durch Polynome höheren Grades auf einem groben Gitter dort, wo die Funktion glatt ist. Gleichzeitig wird eine Gitterverfeinerung mit Ansatzfunktionen niedrigen Grades an singulären Stellen adaptiv gesteuert [2, 12]. Diese Methode erweist sich somit z.B. bei Randsingularitäten als sehr günstig. Daher möchte

ich diese Techniken auf den Dünn-Gitter Raum übertragen.
Die h-Adaptivivtät ist, wie im verhergehenden Abschnitt dargestellt, auf einfache Weise mit Binärbäumen als Datenstruktur realisierbar. Aber auch eine Variation der Freiheitsgrade auf einem Gitterpunkt ist möglich. Eine wichtige Eigenschaft des Dünn-Gitter Raumes ist ja, daß die Unterräume $S^{\alpha}_{k_1,k_2}$ mit $k_1 + k_2 = konst.$ nochmals hinsichtlich α bzgl. ihrer Approximationsgüte geordnet sind. So gilt für u^{α}_{k} und $\alpha_1 = 1, \ldots \alpha_m = 1, \alpha_{m+1} = 0 \ldots \alpha_d = 0$ (siehe (68) und (69)) in der Energienorm (65) die Abschätzung

$$|u^{\alpha}_{k}|_2 \leq |u^{(2)}|^{m}_{L_{2(\Omega)}} \cdot h^3_{k_1} \ldots h^3_{k_m} \cdot h^2_{k_{m+1}} \ldots h^2_{k_d}. \tag{83}$$

Die Beiträge der Unterräume S^{α}_{k} mit $\alpha = 0$ fallen also mit der kleinsten Potenz in den h_{k_i} ab. Es ist damit zu erwarten, daß bei genügend kleinen Maschenweiten Basisfunktionen mit zunehmendem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d$ nur noch wenig zur Approximation beitragen. Demnach führe ich folgendes Adaptivitätsprinzip ein:

> Sei eine d-kubische hierarchische Ansatzfunktion $\psi^{\alpha}_{k,i}$ in einem Gitterpunkt $(x_{i_1} \ldots x_{i_d})$ gegeben. Immer dann, wenn mit $\epsilon \in \Re, \epsilon > 0$
>
> $$|c^{\alpha}_{k,i}|^2 \cdot |\psi^{\alpha}_{k,i}|^2_E < \epsilon \tag{84}$$
>
> gilt, wird der hierarchische Überschuß $c^{\alpha}_{k,i}$ nicht abgespeichert, d.h. der Freiheitsgrad wird zur Approximation nicht herangezogen. Erfüllen alle $2d$ Ansatzfunktionen das Kriterium, so wird der Gitterpunkt nicht generiert. Auch alle hierarchisch tiefer liegenden Gitterpunkte werden dann nicht mehr erzeugt.

Mit (84) habe ich ein energieorientiertes Kriterium eingeführt, da $|\cdot|_E$ die in (65) bzw. (74) definierten Energienormen bezeichnet. Das formulierte Prinzip führt zu einem adaptiven dünnen Gitter in zweierlei Hinsicht. Erstens wird eine h-Adaptivität erreicht, da Gitterpunkte nur dann erzeugt werden, wenn wenigstens eine Basisfunktion einen Energiebeitrag größer ϵ liefert. Im Datenbaum wird somit ein weiterer Knoten erzeugt. Zweitens wird auch die Anzahl der Freiheitsgrade auf jedem Gitterpunkt variiert. Diese Art der Adaptivität stellt einen ersten Schritt in Richtung einer p-Version des Verfahrens dar. Bei genügend glatten Funktionen sollten mit dem gewählten Adaptivitätskriterium (84) für kleine Maschenweiten, also vornehmlich in den Blättern des Datenbaumes, mehr und mehr Gitterpunkte mit weniger als 2^d Freiheitsgraden erzeugt werden.

6 Das Lösungsverfahren

Mit diesem Kapitel beginne ich den zweiten Teil meiner Arbeit, der sich mit dem iterativen Verfahren zur numerischen Berechnung elliptischer partieller Differentialgleichungen 4. Ordnung auf dünnen Gittern in zwei Dimensionen beschäftigt. In den vorausgegangenen Kapiteln habe ich den Dünn-Gitter Raum $\tilde{B}_n^{(2)}$ konstruiert und seine Approximationseigenschaften untersucht. Als nächster Schritt wird jetzt die Diskretisierung einer verallgemeinerten biharmonischen Gleichung durchgeführt. Es entsteht ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten hierarchischen Überschüsse auf einem dünnen Gitter. Ein Kernstück des Verfahrens ist nun die rekursive Berechnung des Residuums mit konstantem Rechenaufwand pro Gitterpunkt. Als Relaxationsverfahren werde ich die Gauß-Seidel Iteration verwenden. Das gesamte Verfahren besteht demnach aus drei Teilen: der Gittergenerierung, wie sie in Abschnitt 5.4.1 erläutert wurde, der rekursiven Berechnung des Residuums und dem Relaxationsschritt. Gittererzeugung und Relaxation laufen dabei miteinander gekoppelt ab. Abschließend untersuche ich die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens und präsentiere hierzu numerisch berechnete Ergebnisse. Da ich mich im weiteren auf zweidimensionale Probleme beschränke, werde ich fortan den Index zur Kennzeichnung der Dimensionalität des Problems nicht mehr in der Notation mitführen, also z.B. anstatt $\tilde{B}_n^{(2)}$ nur noch $\tilde{B}_n$ schreiben.

6.1 Der Variationsansatz

Ich betrachte folgende elliptische partielle Differentialgleichung 4. Ordnung mit der reellen Konstanten γ in zwei Dimensionen

$$\begin{array}{rcll} \Delta^2 u - \gamma \Delta u &=& f & \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2 \\ u &=& g & \\ \frac{\partial u}{\partial n} &=& g_n & \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega. \end{array} \tag{85}$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ bezeichnet wie üblich die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen auf dem Rand Γ. Die biharmonische Gleichung ergibt sich aus (85) für $\gamma = 0$. Zudem wird der Laplace-Operator behandelt, so daß eine spätere Implementierung eines Poisson Lösers in einfacher Weise mit denselben Methoden, die in diesem Abschnitt behandelt werden, ermöglicht wird.

Das Variationsproblem für die Gleichung (85) mit den Dirichlet'schen Randbedingungen lautet:
Finde ein $u \in H^2_{(\Omega)}$, *so daß gilt*

$$a(u,v) = l(v) \quad \forall v \in H^2_{0(\Omega)}. \tag{86}$$

Hierbei ist die H^2_0-elliptische symmetrische Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ durch

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u \cdot \Delta v + \gamma \cdot \nabla u \cdot \nabla v)\, dx_1 dx_2, \tag{87}$$

und die beschränkte Linearform l durch

$$l(v) = \int\limits_{\Omega} f \cdot v dx_1 dx_2 \tag{88}$$

definiert. Der Funktionenraum $\tilde{B}_n$ wird nun um Randfunktionen, die ich weiter unten noch genauer beschreiben werde, erweitert. Ich erhalte den konformen Ansatzraum $\tilde{B}_{e,n} \subset H^2_{(\Omega)}$, dessen Funktionen die erzwungenen Dirichlet'schen Randbedingungen erfüllen. Aus (86) folgt somit die Variationsgleichung:
Finde ein $\tilde{u}_n \in \tilde{B}_{e,n}$, *so daß gilt*

$$a(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n) = l(\tilde{v}_n) \quad \forall \tilde{v}_n \in \tilde{B}_n. \tag{89}$$

$\tilde{u}_n$ ist mit der Darstellung (41) gegeben, wobei jetzt $M_{k_l} = 2^{k_l - 1} + 1$ gilt, da die Randfunktionen zu berücksichtigen sind. Aber auch die Funktion der rechten Seite f entwickle ich in derselben Weise nach den Basisfunktionen gemäß (41).

Bevor ich jedoch diese Entwicklungen in (89) einsetze, möchte ich eine Vereinfachung in der Notation der Basisfunktionen vornehmen. Hierzu führe ich eine zeilenorientierte Anordnung der inneren Gitterpunkte ein, wie sie in Abb.14 für das Gitter $\tilde{G}_3$ gezeigt ist. Dies ermöglicht mir, die bisher verwendeten Multiindizes k und i durch den Nummerierungsindex $j = 1, \ldots, N$ zu ersetzen. N bezeichnet die Anzahl der inneren Punkte, die ja von der Ordnung $O(2^n \cdot n)$ für zweidimensionale reguläre dünne Gitter $\tilde{G}_n$ ist. Die Anordnung der Gitterpunkte erfolgt so, daß in jedem Teilgebiet rekursiv zuerst die Mittelzeile, dann die zu ihr südliche Zeile und zuletzt die nördliche Zeile

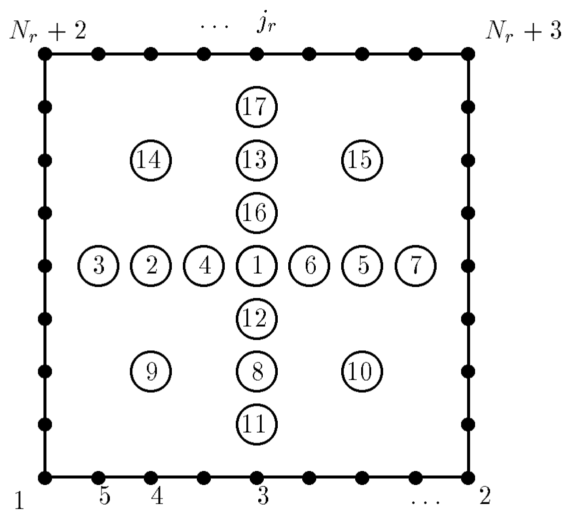


Abbildung 14: Die Anordnung der Gitterpunkte des Gitters $\tilde{G}_3$, Nummerierungsindex j und j_r.

aufgesucht wird. Innerhalb der Zeile wird ausgehend vom Mittelpunkt jeder Teilzeile rekursiv immer zuerst der westliche Teilbaum und dann der östliche Teilbaum abgearbeitet. Auf dem Rand werden die Randpunkte ebenfalls, wie in Abb.14 gezeigt, nach diesem Schema rekursiv mit dem Index $j_r = 1, \dots, N_r$ geordnet, wobei $N_r = 4 \cdot 2^{n_r}$ die Zahl der Randpunkte bei einer Tiefe n_r des Randdatenbaumes angibt. Somit läßt sich kürzer anschreiben

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_n &= \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{N} c_j^{\alpha} \cdot \psi_j^{\alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{j_r=1}^{N_r} c_{j_r}^{\alpha} \cdot \psi_{j_r}^{\alpha}, \\
\tilde{f}_n &= \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{N} f_j^{\alpha} \cdot \psi_j^{\alpha} + \sum_{\alpha} \sum_{j_r=1}^{N_r} f_{j_r}^{\alpha} \cdot \psi_{j_r}^{\alpha},
\end{aligned}
$$

wobei die $\psi_{j_r}^{\alpha}$ Funktionen mit dem Mittelpunkt ihres Trägers auf dem Rand Γ darstellen. Die Koeffizienten c_j^{α} und f_j^{α} bezeichnen die hierarchischen Überschüsse der gesuchten Funktion u bzw. der Funktion der rechten Seite f.

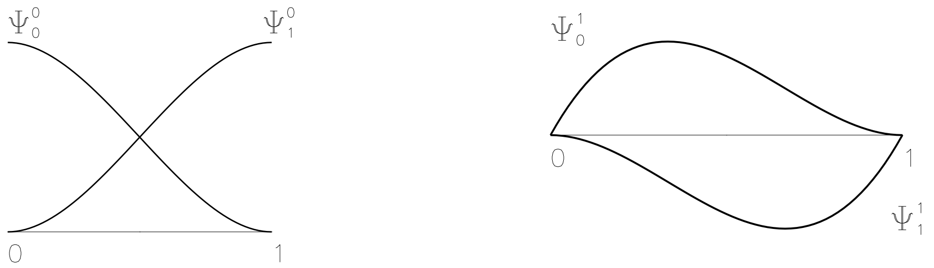


Abbildung 15: Die eindimensionalen Randfunktionen.

6.1.1 Der Einbau der Randbedingungen in den Funktionenraum

Die Randbedingungen aus (85)

$$u = g \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g_n \tag{90}$$

auf Γ sind zu erfüllen, wobei jetzt die Funktionen g und g_n einmal stetig differenzierbar seien. Als weitere vereinfachende Annahme sei $u|_\Gamma \in C^2_{(\Gamma)}$ gegeben. $\frac{\partial}{\partial n}$ bezeichne wieder die Ableitung in Richtung der äußeren Normalen und $\frac{\partial}{\partial s}$ die Tangentenableitung auf dem Rand Γ. Dann ist mit $u = g$ auch $\frac{\partial u}{\partial s} = g_s$ und mit $\frac{\partial u}{\partial n} = g_n$ auch $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} = g_{sn}$ auf Γ bekannt. Die entsprechenden Funktionen $g = g^{(0,0)}, g_s = g^{(1,0)}, g_n = g^{(0,1)}$ und $g_{sn} = g^{(1,1)}$ kennzeichne ich mit dem schon eingeführten Multiindex α. Bei konsistenter Vorgabe der Werte aller vier Randfunktionen auf Γ in der oben genannten Weise besitzt das Variationsproblem (89) weiterhin eine eindeutige Lösung. Sind hingegen nur diskrete Werte für u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf dem Rand bekannt, so kann man sich die Werte für $\frac{\partial u}{\partial s}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n}$ durch Interpolation verschaffen, so daß man auch in diesem Fall über alle notwendigen Werte auf dem Rand Γ verfügt. Naheliegend ist hier, die kubische Spline-Interpolation zu verwenden.

Die Funktionen g^α werden nun ebenfalls durch Basisfunktionen $\psi^\alpha_{j_r}$ des Randes dargestellt. Abb.15 zeigt die eindimensionalen Randfunktionen auf den Randpunkten des Einheitsintervalles. Durch Produktbildung erhält man wieder die d-dimensionalen Randfunktionen. Für den zweidimensionalen Fall ist in Abb.16 die Funktion $\psi^{(0,0)}_{N_r+3}$ für das Einheitsquadrat aus Abb.14 dargestellt. Durch die Erweiterung des Funktionenraumes $\tilde{B}_n$ aus Kapitel 3 um die Randfunktionen $\psi^\alpha_{j_r}$ erfüllt jetzt jede Funktion $\tilde{u}_n \in \tilde{B}_{e,n}$ punktweise die

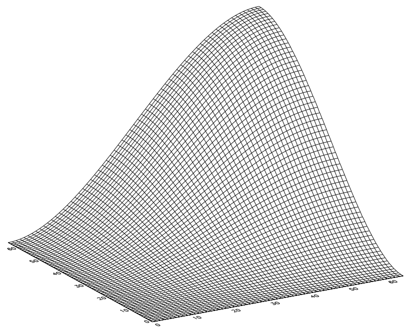


Abbildung 16: Die zweidimensionale Randfunktion $\psi^{(0,0)}_{N_r+3}$.

Randbedingungen aus (85) (und die zwei hinzugefügten Randbedingungen $\frac{\partial u}{\partial s} = g_s$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} = g_{sn}$).
Die durch (89) vermittelten Kopplungen der Randfunktionen $\psi^{\alpha}_{j_r}$ mit Funktionen im Innern des Gebietes Ω haben folgende Form

$$\sum_{\alpha} \sum_{j_r} g^{\alpha}_{j_r} \int_{\Omega} \left[\Delta\psi^{\alpha}_{j_r} \cdot \Delta\psi^{\beta}_{m} + \gamma \cdot \nabla\psi^{\alpha}_{j_r} \cdot \nabla\psi^{\beta}_{m} \right] dx_1 dx_2. \qquad (91)$$

Für die Summe der Integrale, die durch Randfunktionen hervorgerufen werden, führe ich

$$Rand(\psi^{\beta}_{m}) = -\sum_{\alpha} \sum_{j_r} g^{\alpha}_{j_r} \int_{\Omega} \left[\Delta\psi^{\alpha}_{j_r} \cdot \Delta\psi^{\beta}_{m} + \gamma \cdot \nabla\psi^{\alpha}_{j_r} \cdot \nabla\psi^{\beta}_{m} \right] dx_1 dx_2$$

als Abkürzung ein und analog bzgl. der Funktion der rechten Seite von (89)

$$Rand_f(\psi^{\beta}_{m}) = \sum_{\alpha} \sum_{j_r} f^{\alpha}_{j_r} \int_{\Omega} \psi^{\alpha}_{j_r} \cdot \psi^{\beta}_{m} dx_1 dx_2.$$

6.1.2 Das lineare Gleichungssystem

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich (89) explizit wie folgt anschreiben

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{N} c^{\alpha}_{j} \int_{\Omega} \left[\Delta\psi^{\alpha}_{j} \cdot \Delta\psi^{\beta}_{m} + \gamma \cdot \nabla\psi^{\alpha}_{j} \cdot \nabla\psi^{\beta}_{m} \right] dx_1 dx_2 \\ &= Rand(\psi^{\beta}_{m}) + Rand_f(\psi^{\beta}_{m}) \qquad (92) \end{aligned}$$

$$+\sum_{\alpha}\sum_{j=1}^{N} f_j^\alpha \int_\Omega \psi_j^\alpha \cdot \psi_m^\beta dx_1 dx_2.$$

Der Index m läuft wieder über alle inneren Punkte und β über alle Typen von Basisfunktionen. Die Randbedingungen erscheinen nunmehr als Term auf der rechten Seite der Gleichungen und führen zu dem Vektor f_R. Die f_j^α im letzten Term in (92) geben die hierarchischen Überschüsse des Lastvektors an und das Integral definiert die Massenmatrix M der rechten Seite der Differentialgleichung (85). Ich erhalte somit das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x = M \cdot f + f_R \tag{93}$$

für die unbekannten hierarchischen Überschüsse c_m^α, also für den Lösungsvektor

$$x = \left(c_1^{(0,0)}, c_1^{(1,0)}, c_1^{(0,1)}, c_1^{(1,1)}, \ldots c_N^{(0,1)}, c_N^{(1,1)}\right)^T. \tag{94}$$

Die Matrixelemente von A ergeben sich aus (92) zu

$$A_{jm}^{\alpha\beta} = \int_{x_{1m}-h_1}^{x_{1m}+h_1} \int_{x_{2m}-h_2}^{x_{2m}+h_2} \left(\Delta\psi_j^\alpha \Delta\psi_m^\beta + \gamma \cdot \nabla\psi_j^\alpha \cdot \nabla\psi_m^\beta\right) dx_1 dx_2 \tag{95}$$

bzw. von M zu

$$M_{jm}^{\alpha\beta} = \int_{x_{1m}-h_1}^{x_{1m}+h_1} \int_{x_{2m}-h_2}^{x_{2m}+h_2} \psi_j^\alpha \cdot \psi_m^\beta dx_1 dx_2. \tag{96}$$

Für jeden Gitterpunkt m sind vier Gleichungen für die vier hierarchischen Überschüsse zu lösen. Die Steifigkeitsmatrix A ist eine symmetrisch positiv definite $4N \times 4N$ Matrix. Sie ist dichter besetzt als die Steifigkeitsmatrix, die man bei Finite-Element Diskretisierung der Differentialgleichung mit der kubischen Standardbasis erhält.

6.2 Das iterative Lösungsverfahren

Das iterative Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems (93) besteht aus zwei Hauptkomponenten, dem rekursiven Verfahren zur Berechnung des Residuums und der Gauß-Seidel Iteration. Der Besprechung des rekursiven Verfahrens werde ich mich zuerst widmen. Hier stehen mehr algorithmische Aspekte im Vordergrund. Bei der Diskussion der Gauß-Seidel Iteration werde ich dann die algebraischen Eigenschaften des Verfahrens untersuchen.

6.2.1 Das rekursive Verfahren zur Berechnung des Residuums

Die Aufgabe besteht nach (92) darin, jede Komponente r_m^β des Residuenvektors $r = M \cdot f + f_R - A \cdot x$

$$\begin{aligned} r_m^\beta &= Rand(\psi_m^\beta) + Rand_f(\psi_m^\beta) \\ &+ \sum_\alpha \sum_{j=1}^N f_j^\alpha \int_\Omega \psi_j^\alpha \cdot \psi_m^\beta dx_1 dx_2 \\ &- \sum_\alpha \sum_{j=1}^N c_j^\alpha \int_\Omega \left[\Delta\psi_j^\alpha \cdot \Delta\psi_m^\beta + \gamma \cdot \nabla\psi_j^\alpha \cdot \nabla\psi_m^\beta\right] dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{97}$$

zu berechnen. Die Berechnung aller Komponenten r_m^β entspricht also den Matrix-Vektor Multiplikationen mit den Matrizen M und A, die mit einem rekursiven Verfahren, das den Rechenaufwand pro Freiheitsgrad konstant hält, ausgeführt werden. Auch werden die Matrizen M und A nicht explizit aufgebaut, da dies einen unnötigen Speicheraufwand bedeutet.
Ich befasse mich zuerst mit den letzten beiden Termen in (97), die die Kopplungen der Funktionen im Innern des Gebietes Ω beschreiben. Nach (34) zerfallen die zweidimensionalen Integrale in ein Produkt von eindimensionalen Integralen. Für den biharmonischen Teil in (97) sind so die Integralsummen

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha \sum_{j=1}^N c_j^\alpha \int_{x_{1m}-h_1}^{x_{1m}+h_1} \frac{\partial^2\psi_{j(x_1)}^{\alpha_1}}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2\psi_{m(x_1)}^{\beta_1}}{\partial x_1^2} dx_1 \cdot \int_{x_{2m}-h_2}^{x_{2m}+h_2} \psi_{j(x_2)}^{\alpha_2} \psi_{m(x_2)}^{\beta_2} dx_2 \\ &\sum_\alpha \sum_{j=1}^N c_j^\alpha \int_{x_{1m}-h_1}^{x_{1m}+h_1} \frac{\partial\psi_{j(x_1)}^{\alpha_1}}{\partial x_1} \frac{\partial\psi_{m(x_1)}^{\beta_1}}{\partial x_1} dx_1 \cdot \int_{x_{2m}-h_2}^{x_{2m}+h_2} \frac{\partial\psi_{j(x_2)}^{\alpha_2}}{\partial x_2} \frac{\partial\psi_{m(x_2)}^{\beta_2}}{\partial x_2} dx_2 \\ &\sum_\alpha \sum_{j=1}^N c_j^\alpha \int_{x_{1m}-h_1}^{x_{1m}+h_1} \psi_{j(x_1)}^{\alpha_1} \psi_{m(x_1)}^{\beta_1} dx_1 \cdot \int_{x_{2m}-h_2}^{x_{2m}+h_2} \frac{\partial^2\psi_{j(x_2)}^{\alpha_2}}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2\psi_{m(x_2)}^{\beta_2}}{\partial x_2^2} dx_2 \end{aligned} \tag{98}$$

zu ermitteln. Die zum Laplace Operator korrespondierenden Terme sind

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha \sum_{j=1}^N c_j^\alpha \int_{x_{1m}-h_1}^{x_{1m}+h_1} \frac{\partial\psi_{j(x_1)}^{\alpha_1}}{\partial x_1} \frac{\partial\psi_{m(x_1)}^{\beta_1}}{\partial x_1} dx_1 \cdot \int_{x_{2m}-h_2}^{x_{2m}+h_2} \psi_{j(x_2)}^{\alpha_2} \psi_{m(x_2)}^{\beta_2} dx_2 \\ &\sum_\alpha \sum_{j=1}^N c_j^\alpha \int_{x_{1m}-h_1}^{x_{1m}+h_1} \psi_{j(x_1)}^{\alpha_1} \psi_{m(x_1)}^{\beta_1} dx_1 \cdot \int_{x_{2m}-h_2}^{x_{2m}+h_2} \frac{\partial\psi_{j(x_2)}^{\alpha_2}}{\partial x_2} \frac{\partial\psi_{m(x_2)}^{\beta_2}}{\partial x_2} dx_2, \end{aligned} \tag{99}$$

und für die rechte Seite erhalte ich

$$\sum_\alpha \sum_{j=1}^N f_j^\alpha \int_{x_{1m}-h_1}^{x_{1m}+h_1} \psi_{j(x_1)}^{\alpha_1} \psi_{m(x_1)}^{\beta_1} dx_1 \cdot \int_{x_{2m}-h_2}^{x_{2m}+h_2} \psi_{j(x_2)}^{\alpha_2} \psi_{m(x_2)}^{\beta_2} dx_2. \tag{100}$$

Hierbei sind h_1 und h_2 die lokalen Abmessungen des Trägers der Funktion ψ_m^β in x_1- bzw. x_2-Richtung. Es zeigt sich also, daß nur die drei Typen von eindimensionalen Integralsummen

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{\alpha_i}\sum\limits_{j=1}^{N} v_j^{\alpha_i} \int\limits_{x_{i_m}-h_i}^{x_{i_m}+h_i} \psi_{j(x_i)}^{\alpha_i}\psi_{m(x_i)}^{\beta_i} dx_i \\ \sum\limits_{\alpha_i}\sum\limits_{j=1}^{N} v_j^{\alpha_i} \int\limits_{x_{i_m}-h_i}^{x_{i_m}+h_i} \frac{\partial\psi_{j(x_i)}^{\alpha_i}}{\partial x_i}\frac{\partial\psi_{m(x_i)}^{\beta_i}}{\partial x_i} dx_i \\ \sum\limits_{\alpha_i}\sum\limits_{j=1} v_j^{\alpha_i} \int\limits_{x_{i_m}-h_i}^{x_{i_m}+h_i} \frac{\partial^2\psi_{j(x_i)}^{\alpha_i}}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2\psi_{m(x_i)}^{\beta_i}}{\partial x_i^2} dx_i \end{array} \tag{101}$$

für jede Raumrichtung x_i berechnet werden müssen. Die Koeffizienten $v_j^{\alpha_i}$ stellen die hierarchischen Überschüsse $c_j^{\alpha_i}$ bzw. $f_j^{\alpha_i}$ dar, je nachdem ob man die gesuchte Funktion u oder die Funktion f der rechten Seite betrachtet. Die Diskretisierung der rechten Seite wird hier sofort mitbehandelt, da zur Diskretisierung von f nach (100) nur Summen des ersten Typs aus (101) auftreten. Diese können natürlich mit derselben Methode wie die Summen bzgl. der Funktion u berechnet werden. Anhand der Summe der eindimensionalen Integrale

$$\sum_{\alpha}\sum_{j=1}^{N} v_j^{\alpha} \int\limits_{x_m-h}^{x_m+h} \psi_{j(x)}^{\alpha}\cdot\psi_{m(x)}^{\beta} dx$$

möchte ich beispielhaft das rekursive Berechnungsverfahren erklären, wobei ich hier $x_i = x_1 = x$ gewählt und $x_{1_m} = x_m, \alpha_1 = \alpha$ usw. gesetzt habe.
Obige Summe kann aufgeteilt werden in

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha}\sum_{j=1}^{N} v_j^{\alpha} \int\limits_{x_m-h}^{x_m+h} \psi_{j(x)}^{\alpha}\psi_{m(x)}^{\beta} dx &= \\ = \quad v_m^{\beta} \int\limits_{x_m-h}^{x_m+h} \psi_{m(x)}^{\beta}\psi_{m(x)}^{\beta} dx &+ \sum_{\alpha}\sum_{j_t} v_{j_t}^{\alpha} \int\limits_{x_m-h}^{x_m+h} \psi_{j_t(x)}^{\alpha}\psi_{m(x)}^{\beta} dx \\ + \quad \sum_{\alpha}\sum_{j_h} v_{j_h}^{\alpha} \int\limits_{x_m-h}^{x_m+h} \psi_{j_h(x)}^{\alpha}\psi_{m(x)}^{\beta} dx, & \end{aligned} \tag{102}$$

wobei in der ersten Summe der Index j_t über alle Funktionen läuft, die hierarchisch tiefer als ψ_m^β liegen. Die zweite Summe umfaßt hingegen alle Funktionen, die hierarchisch höher liegen als ψ_m^β. Ich betrachte zunächst die Summe bzgl. der Funktion ψ_m^0

$$\sum_\alpha \sum_{j_t} v_{j_t}^\alpha \int\limits_{x_m-h}^{x_m+h} \psi_{j_t(x)}^\alpha \cdot \psi_{m(x)}^0 dx. \tag{103}$$

Der Grundgedanke zur Berechnung von (103) läßt sich mit Abb.17 erklären. Dort sind die Gitter $G_1, \ldots, G_3$ gezeigt. Auf jedem Gitter sind die hermitesch kubischen Funktionen der Standardbasis dargestellt. Dabei sind die Funktionen, die nicht zur hierarchischen Basis gehören durch gestrichelte Linien symbolisiert. Jede Standardbasisfunktion eines Gitters G_{k-1} (Grobgitterfunktion) läßt sich nun darstellen als Linearkombination von Standardbasisfunktionen des feineren Gitters G_k (Feingitterfunktionen), wie dies in Abb.18 gezeigt wird. Zur Darstellung der Funktion $(\psi_m^0)_2$ geht so z.B. die Funktion $(\psi_m^0)_3$ mit dem Gewicht 1 ein und $(\psi_m^0)_2$ wiederum geht nochmals mit dem Gewicht 1 in ψ_m^0 ein. Gemäß den Linearkombinationen aus Abb.18 kann auf diese Weise zuerst die Integralsumme (103) bzgl. der Gitterfunktion $(\psi_m^0)_2$ aus Integralsummen, die auf dem Gitter G_3 vorliegen, berechnet werden. Aus den dann vorliegenden Werten auf dem Gitter G_2 kann anschließend die Integralsumme bzgl. der Funktion ψ_m^0 ermittelt werden. Die hierarchische Basis enthält zwar gerade nicht die Standardbasisfunktionen $(\psi_m^0)_2$ und $(\psi_m^0)_3$, die zur eben dargestellten rekursiven Berechnung von (103) benötigt werden. Jedoch liegt der Gitterpunkt m mit der zugehörigen Funktion ψ_m^0 vor. Die Werte, die den Standardbasisfunktionen $(\psi_m^0)_2$ und $(\psi_m^0)_3$ zugeordnet sind, können damit im Knoten m gespeichert werden und fließen bei der Berechnung von (103) mit dem Gewicht 1 ein.

Einen rekursiven Berechnungsschritt erläutere ich jetzt im Detail. Hierzu sei ψ_m^0 eine Funktion des Gitters G_{n-1}. Ich beziehe weiter die Feingitterfunktionen $\hat\psi_{m-1}^0$, $\hat\psi_m^0$, $\hat\psi_{m+1}^0$, $\hat\psi_{m-1}^1$, $\hat\psi_m^1$ und $\hat\psi_{m+1}^1$ aus Abb.18 ein. Für den Augenblick verwende ich also wieder zwei Gitter G_{n-1} und G_n mit ihrer hermitesch kubischen Standardbasis. Wesentlich ist nun, daß eine Grobgitterfunktion durch eine Linearkombination von Feingitterfunktionen $\hat\psi_j^\alpha$ darstellbar ist. In Abb.18 wird dies veranschaulicht. Dort sind die Koeffizienten für die betreffenden Feingitterfunktionen in der Linearkombination zur Darstellung der Grobgitterfunktionen ψ_m^0 bzw. ψ_m^1 angegeben. So gilt für die Grobgitterfunktionen ψ_m^0 und ψ_m^1 mit der Maschenweite des Grobgitters $h = 2^{-(n-1)}$

$$\begin{aligned} \psi_m^0 &= \hat\psi_m^0 + \tfrac{1}{2} \cdot (\hat\psi_{m-1}^0 + \hat\psi_{m+1}^0) + \tfrac{3}{2h} \cdot (\hat\psi_{m-1}^1 - \hat\psi_{m+1}^1) \\ \psi_m^1 &= \hat\psi_m^1 - \tfrac{1}{4} \cdot (\hat\psi_{m-1}^1 + \hat\psi_{m+1}^1) + \tfrac{h}{8} \cdot (\hat\psi_{m+1}^0 - \hat\psi_{m-1}^0). \end{aligned} \tag{104}$$

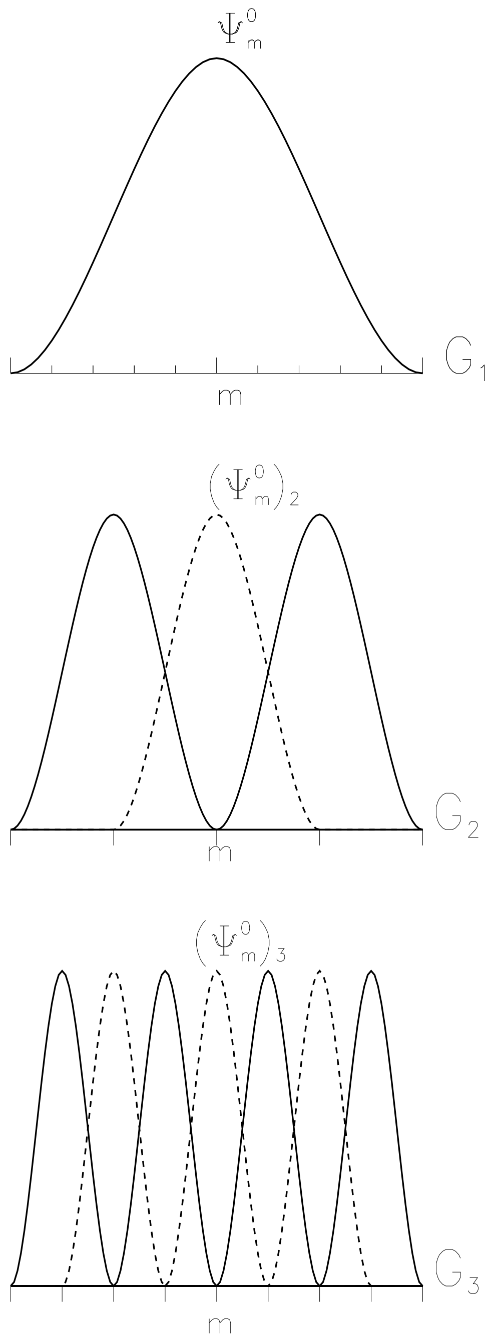


Abbildung 17: Die verschiedenen Basisfunktionen auf den Gittern $G_1, \ldots, G_3$.

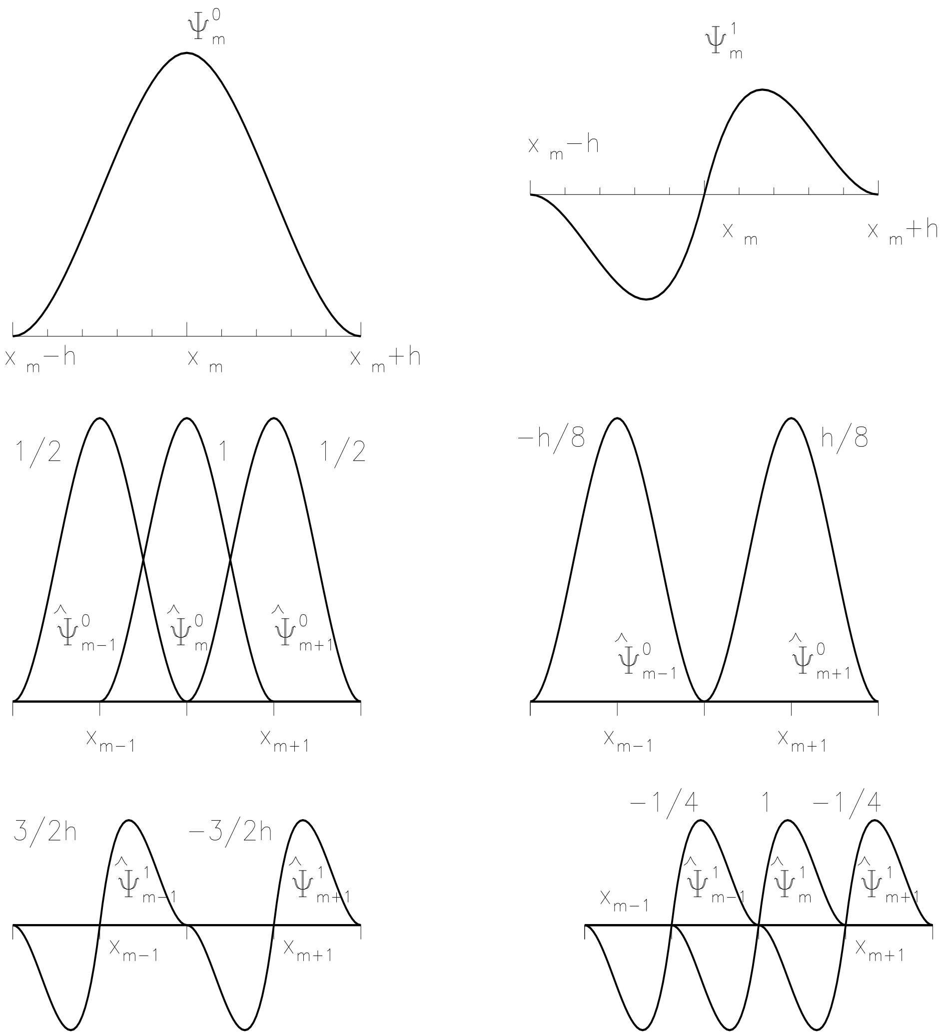


Abbildung 18: Die Darstellung der Funktionen ψ_m^0 und ψ_m^1 durch Linearkombination von Feingitterfunktionen $\hat{\psi}_j^\alpha$.

(104) entspricht einer rekursiven Definition der Grobgitterfunktionen ψ_m^0 und ψ_m^1. Denn durch Hinzunahme weiterer Grobgitter können die Funktionen des Gitter G_{n-2} durch die Funktionen des Gitters G_{n-1}, Funktionen des Gitter G_{n-3} durch die Funktionen des Gitters G_{n-2} usw. dargestellt werden bis man die Gitterfunktionen des gröbsten Gitters G_1 erhält.
Nun seien die Summen der Integrale $\sum\limits_{\alpha}\sum\limits_{jt}$ bzgl. der Funktionen $\hat{\psi}_{m-1}^0$, $\hat{\psi}_m^0$, $\hat{\psi}_{m+1}^0$, $\hat{\psi}_{m-1}^1$ und $\hat{\psi}_{m+1}^1$ bekannt und mit $\hat{I}_{m-1}^0, \hat{I}_m^0, \hat{I}_{m+1}^0, \hat{I}_{m-1}^1$ und $\hat{I}_{m+1}^1$ bezeichnet. Dann kann mit (104) auch die Summe der Integrale bzgl. ψ_m^0 berechnet werden, wenn man noch die Integralwerte

$$\int\limits_{x_m-h}^{x_m} \hat{\psi}_{m-1}^0 \cdot \psi_m^0 dx = \tfrac{h}{4} \qquad \int\limits_{x_m}^{x_m+h} \hat{\psi}_{m+1}^0 \cdot \psi_m^0 dx = \tfrac{h}{4}$$
$$\int\limits_{x_m-h}^{x_m} \hat{\psi}_{m-1}^1 \cdot \psi_m^0 dx = \tfrac{19}{1680} \cdot h^2 \qquad \int\limits_{x_m}^{x_m+h} \hat{\psi}_{m+1}^1 \cdot \psi_m^0 dx = -\tfrac{19}{1680} \cdot h^2$$

berücksichtigt. Das ergibt zusammen

$$\begin{aligned} I_m^0 &= \hat{I}_m^0 + \tfrac{1}{2} \cdot (\hat{I}_{m-1}^0 + \hat{I}_{m+1}^0) + \tfrac{3}{2h} \cdot (\hat{I}_{m-1}^1 - \hat{I}_{m+1}^1) \\ &+ \tfrac{h}{4} \cdot (v_{m-1}^0 + v_{m+1}^0) + \tfrac{19}{1680} \cdot h^2 \cdot (v_{m-1}^1 - v_{m+1}^1). \end{aligned} \tag{105}$$

Führe ich in x_{m-1} die Anweisung (Syntax der Programmiersprache C)

$$\hat{I}_e^0 += \frac{1}{2} \cdot \hat{I}_{m-1}^0 + \frac{3}{2h} \cdot \hat{I}_{m-1}^1 + \frac{h}{4} \cdot v_{m-1}^0 + \frac{19}{1680} \cdot h^2 \cdot v_{m-1}^1$$

und in x_{m+1} die Anweisung

$$\hat{I}_w^0 += \frac{1}{2} \cdot \hat{I}_{m+1}^0 - \frac{3}{2h} \cdot \hat{I}_{m+1}^1 + \frac{h}{4} \cdot v_{m+1}^0 - \frac{19}{1680} \cdot h^2 \cdot v_{m+1}^1$$

aus, so erhalte ich im Gitterpunkt x_m die Summe (105). Hier indizieren w und e den westlichen und östlichen Nachbarpunkt eines Gitterpunktes. Zur Berechnung der zu (103) analogen Summe bzgl. der Funktion ψ_m^1 müssen die Integralwerte

$$\int\limits_{x_m-h}^{x_m} \hat{\psi}_{m-1}^0 \cdot \psi_m^1 dx = -\tfrac{13}{240} \cdot h^2 \qquad \int\limits_{x_m}^{x_m+h} \hat{\psi}_{m+1}^0 \cdot \psi_m^1 dx = \tfrac{13}{240} \cdot h^2$$
$$\int\limits_{x_m-h}^{x_m} \hat{\psi}_{m-1}^1 \cdot \psi_m^1 dx = -\tfrac{1}{672} \cdot h^3 \qquad \int\limits_{x_m}^{x_m+h} \hat{\psi}_{m+1}^1 \cdot \psi_m^1 dx = -\tfrac{1}{672} \cdot h^3$$

beachtet werden. Das führt auf den Ausdruck (siehe auch Abb.18)

$$\begin{aligned} I_m^1 &= \hat{I}_m^1 + \tfrac{h}{8} \cdot (\hat{I}_{m+1}^0 - \hat{I}_{m-1}^0) - \tfrac{1}{4} \cdot (\hat{I}_{m-1}^1 + \hat{I}_{m+1}^1) \\ &+ \tfrac{13}{240} \cdot h^2 \cdot (v_{m+1}^0 - v_{m-1}^0) - \tfrac{1}{672} \cdot h^3 \cdot (v_{m-1}^1 + v_{m+1}^1). \end{aligned} \tag{106}$$

Zur Bildung dieser Summe sind deshalb in den Punkten x_{m-1} bzw. x_{m+1} die Anweisungen

$$\hat{I}_e^1 += \frac{h}{8} \cdot \hat{I}_{m-1}^0 - \frac{1}{4} \cdot \hat{I}_{m-1}^1 + \frac{13}{240} \cdot h^2 \cdot v_{m-1}^0 - \frac{1}{672} \cdot h^3 \cdot v_{m-1}^1$$

bzw.

$$\hat{I}_w^1 += -\frac{h}{8} \cdot \hat{I}_{m+1}^0 - \frac{1}{4} \cdot \hat{I}_{m+1}^1 - \frac{13}{240} \cdot h^2 \cdot v_{m+1}^0 - \frac{1}{672} \cdot h^3 \cdot v_{m+1}^1$$

auszuführen. Ich bin also in der Lage, die gewünschten Integralsummen bzgl. der Grobgitterfunktionen ψ_m^0 und ψ_m^1 des Gitters G_{n-1} mit Hilfe von Integralwerten bzgl. der Standardbasisfunktionen des feineren Gitters G_n zu berechnen.

Dieses Ergebnis übertrage ich jetzt auf den Fall der hierarchischen Basis mit folgenden Konsequenzen. Erstens existieren, wie bereits erwähnt, die Feingitterfunktionen $\hat{\psi}_m^0$ und $\hat{\psi}_m^1$ nicht mehr. Jedoch liegt der Gitterpunkt x_m mit den Funktionen ψ_m^0 und ψ_m^1 vor, die den Funktionen $\hat{\psi}_m^0$ und $\hat{\psi}_m^1$ hierarchisch übergeordnet sind, so daß die Integralsummen bzgl. der Funktionen $\hat{\psi}_m^0$ und $\hat{\psi}_m^1$ im Gitterpunkt m (Knoten im Binärbaum) gespeichert werden können. In (105) und (106) ersetze ich deshalb $\hat{I}_m^0$ und $\hat{I}_m^1$ durch I_m^0 und I_m^1. Zweitens bezeichnen die Indizes w und e jetzt den westlichen und östlichen *hierarchischen* Nachbarn. Die Definition des hierarchischen Nachbarn ist [3] zu entnehmen. Die Nachbarschaftsverhältnisse z.B. für die Funktion ψ_{m-1}^0 sind in Abb.19 gezeigt. Hier gehört die westliche Nachbarfunktion ψ_{m-2}^0 von ψ_{m-1}^0 dem Hierarchielevel $n-2$, die östliche Funktion ψ_m^0 dem Hierarchielevel $n-1$ an.

Die Integralsummen bzgl. der Grobgitterfunktionen ψ_m^0 und ψ_m^1 sind damit auch im Falle der hierarchischen Basis durch Werte, die auf dem Gitter G_n vorliegen, berechenbar. Somit kann ich folgendes Rekursionsschema für die

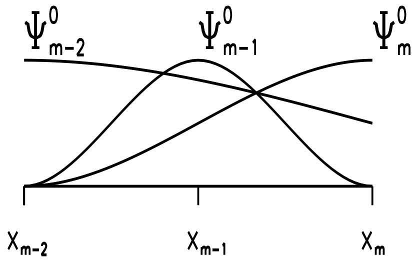


Abbildung 19: Die Nachbarschaftsbeziehungen bzgl. ψ^0_{m-1}.

Berechnung der Integralsumme angeben

$$\begin{array}{lll} I^0_w & += & \frac{1}{2}\cdot I^0_m - \frac{3}{2h}\cdot I^1_m + \frac{h}{4}\cdot v^0_m - \frac{19}{1680}\cdot h^2\cdot v^1_m \\ I^0_e & += & \frac{1}{2}\cdot I^0_m + \frac{3}{2h}\cdot I^1_m + \frac{h}{4}\cdot v^0_m + \frac{19}{1680}\cdot h^2\cdot v^1_m \\ I^1_w & += & \frac{h}{8}\cdot I^0_m - \frac{1}{4}\cdot I^1_m + \frac{13}{240}\cdot h^2\cdot v^0_m - \frac{1}{672}\cdot h^3\cdot v^1_m \\ I^1_e & += & -\frac{h}{8}\cdot I^0_m - \frac{1}{4}\cdot I^1_m - \frac{13}{240}\cdot h^2\cdot v^0_m - \frac{1}{672}\cdot h^3\cdot v^1_m \\ I^0_m & += & \frac{26}{35}\cdot\frac{h}{2}\cdot v^0_m \\ I^1_m & += & \frac{2}{105}\cdot(\frac{h}{2})^3\cdot v^1_m. \end{array} \quad (107)$$

Die letzten beiden Anweisungen in (107) berücksichtigen noch die Werte der Integrale $\int_0^1 \psi^\beta_m \cdot \psi^\beta_m dx, \beta \in \{0,1\}$ in (102), deren Werte aus (43) bekannt sind. Durch das Rekursionsschema werden hierarchische Überschüsse vom feineren Gitter auf das nächste gröbere Gitter transportiert. Die Maschenweite h ist wie in Abb.18 zu wählen. Mit dem beschriebenen Vorgehen gilt

$$I^0_m = \sum_\alpha \sum_{j_t} v^\alpha_{j_t} \int_{x_m-h}^{x_m+h} \psi^\alpha_{j_t}\cdot\psi^0_m dx + v^0_m \int_{x_m-h}^{x_m+h} \psi^0_m\cdot\psi^0_m dx$$

und

$$I^1_m = \sum_\alpha \sum_{j_t} v^\alpha_{j_t} \int_{x_m-h}^{x_m+h} \psi^\alpha_{j_t}\cdot\psi^1_m dx + v^1_m \int_{x_m-h}^{x_m+h} \psi^1_m\cdot\psi^1_m dx$$

für einen Gitterpunkt x_m. In (102) ist jetzt nur noch die zweite Summe über j_h zu berechnen. Über dem Träger von ψ^β_m ist aber der Interpolant $\sum\limits_\alpha \sum\limits_{j_h} v^\alpha_{j_h}\cdot$

$\psi^\alpha_{j_h}$ ein kubisches Polynom, so daß die Integralsummen aus den absoluten Funktionswerten und Ableitungen an den Randpunkten des Trägers von ψ^β_m berechnet werden können

$$\sum_\alpha \sum_{j_h} v^\alpha_{j_h} \int\limits_{x_m-h}^{x_m+h} \psi^\alpha_{j_h} \cdot \psi^0_m dx = \qquad \frac{h}{4} \cdot (u_w + u_e) + \frac{13}{240} \cdot h^2 \cdot (u^x_e - u^x_w) \tag{108}$$

$$\sum_\alpha \sum_{j_h} v^\alpha_{j_h} \int\limits_{x_m-h}^{x_m+h} \psi^\alpha_{j_h} \cdot \psi^1_m dx = \qquad \frac{19}{1680} \cdot h^2 \cdot (u_e - u_w) - \frac{1}{672} \cdot h^3 \cdot (u^x_e + u^x_w). \tag{109}$$

Die Randterme in (97) sind ebenfalls ähnlich (108) und (109) berechenbar. Hierzu sind die Funktionswerte in (108) durch Summen von Integralen mit Randfunktionen wie in (91) zu ersetzen.
Alle Terme in (102) sind jetzt erfaßt und die eindimensionale Integralsumme ist für jede Funktion ψ^β_m berechnet. Während die rekursive Berechnung der Summe $\sum\limits_{j_t}$ aus (102) das Durchlaufen des Datenbaumes beginnend in den Blättern zur Wurzel hin bedeutet (up-Prozeß), entspricht der Berechnung der Integralsumme $\sum\limits_{j_h}$ ein down-Prozeß. Denn zur Berechnung der absoluten Funktionswerte aus den hierarchischen Überschüssen bedarf es der Interpolation der Randwerte in das Innere des Gebietes. Dieser Prozeß verläuft umgekehrt zum Rekursionsprozeß (107), hier werden neu berechnete Korrekturen vom groben Gitter auf das Feingitter transportiert. Jedoch werde ich als weitere Variable die Funktionswerte selbst an jedem Gitterpunkt speichern und benötige deshalb zur Berechnung der Integralsumme $\sum\limits_{j_h}$ keinen expliziten down-Prozeß mehr. Vielmehr wird nach einem up-Prozess ein Gauß-Seidel Iterationsschritt als down-Prozess ausgeführt, wobei auf die Funktionswerte der hierarchischen Nachbarn in jedem Gitterpunkt ähnlich den Beziehungen (108) und (109) zugegriffen wird.
Analoge Überlegungen führen für den zweiten Typ von Integralsumme in (101) mit Produkten von einfach abgeleiteten Basisfunktionen als Integran-

den auf das Rekursionsschema

$$
\begin{array}{lll}
D_w^0 & += & \frac{1}{2} \cdot D_m^0 - \frac{3}{2h} \cdot D_m^1 - \frac{1}{10} \cdot v_m^1 \\
D_e^0 & += & \frac{1}{2} \cdot D_m^0 + \frac{3}{2h} \cdot D_m^1 + \frac{1}{10} \cdot v_m^1 \\
D_w^1 & += & \frac{h}{8} \cdot D_m^0 - \frac{1}{4} \cdot D_m^1 + \frac{1}{2} \cdot v_m^0 - \frac{h}{10} \cdot v_m^1 \\
D_e^1 & += & -D_m^0 \cdot \frac{h}{8} - \frac{1}{4} \cdot D_m^1 - \frac{1}{2} \cdot v_m^0 - \frac{h}{10} \cdot v_m^1 \\
D_m^0 & += & \frac{12}{5 \cdot h} \cdot v_m^0 \\
D_m^1 & += & \frac{4}{15} \cdot h \cdot v_m^1.
\end{array} \tag{110}
$$

Für die dritte Summe von (101) ergibt sich

$$
\begin{array}{lll}
B_m^0 & += & \frac{24}{h^3} \cdot v_m^0 \\
B_m^1 & += & \frac{8}{h} \cdot v_m^1,
\end{array} \tag{111}
$$

denn es gilt

$$
\int\limits_0^1 \frac{\partial^2 \psi_{j(x)}^{\alpha}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi_{m(x)}^{\beta}}{\partial x^2} dx = a \cdot \delta_{jm} \cdot \delta_{\alpha\beta},
$$

wobei der Faktor a die Werte $\frac{24}{h^3}$ für Typ I bzw. $\frac{8}{h}$ für Typ II der Basisfunktion annimmt. Die Diskretisierung der Differentialgleichung (15) mit dem Ansatzraum der eindimensionalen kubischen hierarchischen Basisfunktionen führt damit auf eine Diagonalmatrix und das Verfahren zur Berechnung dieses eindimensionalen Problems entartet zu einem direkten Löser (vgl. hierzu die lineare hierarchische Basis bei Berechnung des eindimensionalen Analogons zur Poisson Gleichung mittels Finite-Element Methode).
An dieser Stelle zeigt sich noch einmal der große Vorteil des Produktansatzes, denn die Rekursionen (107), (110) und (111) lassen sich für verschiedene Raumrichtungen unabhängig voneinander anwenden. Jeder Rekursion entspricht dabei ein Aufsammeln von hierarchischen Überschüssen in einer Raumrichtung. Man erhält die in (101) angegebenen Integralsummen unter Berücksichtigung von Randtermen wie in (108). Ein Verfahren für den zweidimensionalen Fall erhält man, wenn man die Aufsammelprozesse in x_2-Richtung nicht auf die hierarchischen Überschüsse selbst, sondern auf die Werte I, D und B anwendet, die durch einen Aufsammelprozeß in der x_1-Richtung ermittelt worden sind. Seien die durch die Rekursion (107) vermittelten Aufsammelprozesse in x_1-Richtung durch $\mathcal{I}_{x_1}$ symbolisiert. Die Rekursionen (110) und (111) sollen durch $\mathcal{D}$ und $\mathcal{B}$ angezeigt werden. Dann beschreibt z.B. $\mathcal{D}_{x_2}\mathcal{I}_{x_1}$ die Anwendung der Rekursion (110) in x_2-Richtung

auf die Größen, die durch Aufsammeln der hierarchischen Überschüsse in x_1-Richtung gemäß Schema (107) gebildet wurden. Für den zweidimensionalen Fall habe ich in Abb.20 alle möglichen Kombinationen von Aufsammelprozessen in dieser Kurzschreibweise symbolisiert. Dadurch werden zwar die algorithmischen Details verborgen, aber das Prinzip des Verfahrens wird durch diese Abstraktion deutlich. Da nach dem Finite-Element Ansatz den Differentialoperatoren aus (85) Integralsummen gemäß (97) zugeordnet sind, können diese nun durch die eingeführte Schreibweise mit einem Rekursionsschema zur Berechnung der Integralsumme verknüpft werden. Jede Kombination in Abb.20 entspricht dem angezeigten Differentialoperator. Auf jedem Gitterpunkt sind damit nur die Operationen konstanter Zahl gemäß den angegebenen Rekursionen auszuführen, um in *allen* Gitterpunkten die Integralsummen zu berechnen, die aus dem Variationsansatz der betrachteten Differentialgleichung entspringen. Damit kann das Residuum des zugehörigen linearen Gleichungssytems mit konstantem Aufwand pro Gitterpunkt (Freiheitsgrad) berechnet werden.
Zu bemerken bleibt, daß die Rekursionen auf einem vollen Gitter einfach hintereinander in die verschiedenen Raumrichtungen ausgeführt werden können. Dies ist auf dünnen Gittern nicht möglich. Hier muß eine gewisse Reihenfolge der Raumrichtungen beachtet werden, um zu gewährleisten, daß die in den Rekursionen angegebenen Gitterpunkte auch existieren [4].

6.2.2 Die Gauß-Seidel Iteration

Nachdem ich die Berechnung des Residuums durch ein rekursives Verfahren mit konstantem Aufwand pro Gitterpunkt sichergestellt habe, will ich das lineare Gleichungssystem (93) iterativ mit dem Gauß-Seidel Verfahren lösen. Jede Gleichung von (93) für den unbekannten hierarchischen Überschuß c_m^β wird also so relaxiert, daß das Residuum (97) verschwindet. Die Durchlaufreihenfolge der Punkte ist die in Abb.14 gezeigte. Sei mit ν die ν-te Iterierte gegeben, dann berechnet sich die $(\nu+1)$-te Iterierte nach folgender Iterationsvorschrift in komponentenweiser Darstellung [16]

$$\left(c_m^\beta\right)^{\nu+1} = \tag{112}$$

$$\frac{1}{A_{mm}^{\beta\beta}} \cdot \Bigg((f_R)_m^\beta + \sum_\alpha \sum_{j=1}^{N} M_{jm}^{\alpha\beta} f_j^\alpha - \sum_\alpha \sum_{j=1}^{m-1} A_{jm}^{\alpha\beta} \left(c_j^\alpha\right)^\nu$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{I}_{x_2}\mathcal{I}_{x_1} & \mathrm{u} \\
\mathcal{I}_{x_1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{D}_{x_2}\mathcal{I}_{x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \\
 & \mathcal{B}_{x_2}\mathcal{I}_{x_1} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{I}_{x_2}\mathcal{D}_{x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \\
\mathcal{D}_{x_1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{D}_{x_2}\mathcal{D}_{x_1} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 x_2^2} \\
 & \mathcal{B}_{x_2}\mathcal{D}_{x_1} & \dfrac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 x_2^4}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{I}_{x_2}\mathcal{B}_{x_1} & \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \\
\mathcal{B}_{x_1} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{D}_{x_2}\mathcal{B}_{x_1} & \dfrac{\partial^6 u}{\partial x_1^2 x_2^4} \\
 & \mathcal{B}_{x_2}\mathcal{B}_{x_1} & \dfrac{\partial^8 u}{\partial x_1^4 x_2^4}
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 20: Die Zuordnung der Rekursionsschemen zu den Differentialoperatoren für den zweidimensionalen Fall.

$$-\sum_{\alpha}\sum_{j=m+1}^{N} A_{jm}^{\alpha\beta}\left(c_j^{\alpha}\right)^{\nu+1}\Bigg)$$

mit den Matrixelementen $A_{jm}^{\alpha\beta}$ bzw. $M_{jm}^{\alpha\beta}$ aus (95) und (96) und der Komponente $(f_R)_m^\beta$ der Randterme aus (92). Die Berechnung der Summe $\sum\limits_{j=1}^{m-1}$ in (112) erfolgt in einem up-Prozeß rekursiv, wie ich dies bereits im vorhergehenden Abschnitt geschildert habe, und die Summe $\sum\limits_{j=m+1}^{N}$ wird durch Funktionswerte der hierarchischen Nachbarn des Gitterpunktes m ermittelt. Beginnend in der Wurzel des Datenbaumes werden durch (112) die hierarchischen Überschüsse c_m^β berechnet. Mit (112) erfolgt somit eine Zerlegung der Steifigkeitsmatrix A gemäß

$$A = D - L - U \tag{113}$$

mit strikter unterer bzw. oberer Dreiecksmatrix L bzw. U und der Diagonalmatrix D. Die Multiindizes sind weiterhin notwendig, um die verschiedenen Typen von Funktionen unterscheiden zu können. Mit der Einführung des Lösungsvektors x nach (94) (für die rechte Seite führe ich jetzt den Lastvektor $b = M \cdot f + f_R$ ein) kann man die Gauß-Seidel Iteration als lineares Verfahren auch in der ersten Normalform anschreiben [16]

$$x_{\nu+1} = W^{GS} \cdot x_\nu + N^{GS} \cdot b \tag{114}$$

mit der Iterationsmatrix

$$W^{GS} = (D - L)^{-1} U \tag{115}$$

und

$$N^{GS} = (D - L)^{-1}. \tag{116}$$

Zu beachten sind die Orthogonalitätseigenschaften der Basisfunktionen ein und desselben Gitterpunktes

$$\left.\begin{array}{lcl} \int\limits_\Omega \psi_m^\alpha \cdot \psi_m^\beta dx & = & 0 \\ \int\limits_\Omega \frac{\partial \psi_m^\alpha}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi_m^\beta}{\partial x_i} dx & = & 0 \\ \int\limits_\Omega \frac{\partial^2 \psi_m^\alpha}{\partial x_i^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi_m^\beta}{\partial x_i^2} dx & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta.$$

Für $\alpha = \beta$ gelten die in (43) angegebenen Gleichungen. Durch die Orthogonalitätsbeziehungen sind die 2^d Gleichungen eines Gitterpunktes voneinander entkoppelt, so daß ich ein blockartiges Relaxationsverfahren erhalte. Das iterative Verfahren hat folgenden Aufbau:

Der Aufbau des Iterationsverfahrens

while(Korrektur $> \delta$)

1. Relaxation der Gleichungen für die schon erzeugten Freiheitsgrade beginnend in der Wurzel des Datenbaumes
2. **if** (Verfeinerungskriterium) **then**

   Generierung neuer Freiheitsgrade (Verfeinerung des Gitters) und Relaxation der zugehörigen Gleichungen

3. Rekursive Berechnung des Residuums für den nächsten Iterationsschritt von den Blättern des Datenbaumes startend

end while

Die Verfeinerungsbedingung im Falle regulärer dünner Gitter besagt, daß alle Freiheitsgrade bis zu einer vorgegebenen Gittertiefe n erzeugt werden. Für adaptive dünne Gitter werde ich das Auswahlkriterium (84) im 2. Schritt des Verfahrens einführen und so ein energieorientierte adaptive Strategie anwenden. Die Schritte 1 bis 3 werden nun solange wiederholt bis weiteres Iterieren keine wesentlichen Verbesserungen der Lösung erbringt und der Quotient aus aktueller Korrektur zur Korrektur aus dem ersten Iterationsschritt unter eine vorgegebene Schranke δ fällt. Bei Verwendung der L_2-Norm muß so

$$\frac{\|\tilde{e}_n^{\mu}\|_{L_2}}{\|\tilde{e}_n^{1}\|_{L_2}} < \delta$$

gelten, damit die Iteration abgebrochen werden kann. Die Lösung bezeichne ich dann als ausiteriert. Die Relaxation aller Freiheitsgrade wird dabei als ein Gauß-Seidel Schritt bezeichnet und entspricht der einmaligen Ausführung

n	$\rho(W^{GS})$	$\kappa(A^{skal})$	σ
1	0	1.0	
			0.77
2	0.4155	5.1	
			2.69
3	0.9095	49.6	
			1.16
4	0.9595	131.3	
			1.62
5	0.9868	455.7	
			1.24
6	0.9944	1145	

Tabelle 7: Der Spektralradius ρ der Iterationsmatrix W^{GS} und die Konditionszahl κ der diagonalskalierten Steifigkeitsmatrix A^{skal}.

der Schritte 1 bis 3 des Iterationsverfahrens. Mit μ wird die Zahl dieser Iterationsschritte erfaßt. Bei allen folgenden Beispielen habe ich $\delta = 10^{-6}$ gewählt.

Die algebraische Konvergenz

Das Verfahren ist konvergent, wenn für den Spektralradius der Iterationsmatrix $\rho(W^{GS})$

$$\rho(W^{GS}) < 1 \tag{117}$$

gültig ist [16]. Den Spektralradius bestimme ich hier für die biharmonische Gleichung (also für $\gamma = 0$ in (85)) auf regulären dünnen Gittern für zunehmende Gittertiefen numerisch [1]. Dazu berechne ich explizit die Steifigkeitsmatrix A und daraus die Iterationsmatrix (115) des Gauß-Seidel Verfahrens bei der Anordung der Gitterpunkte nach Abb.14. Die Ergebnisse sind in Tab.7 festgehalten. Der Spektralradius $\rho(W^{GS})$ der Iterationsmatrix als auch die Kondition κ der Matrix A^{skal} sind dort gegen die Gittertiefe n angetragen. Durch die Skalierung $A^{skal} = D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}$ mit der Diagonalmatrix D aus (113) erreicht man eine Vorkonditionierung der Steifigkeitsmatrix A. Das Gauß-Seidel Verfahren verhält sich jedoch gegenüber dieser Skalierung invariant, d.h. das Spektrum der Iterationsmatrix bleibt erhalten. Wie erwartet, wächst die Konditionszahl von A^{skal} mit zunehmender Gittertiefe n an und der Spektralradius nähert sich dem Wert 1.0. Die Ordnung σ des Verfahrens

[1] Die Berechnung erfolgte mit CLAM

ist nach [16] durch

$$\sigma = \ln\left(\frac{1-\rho_n}{1-\rho_{n+1}}\right) / \ln(2)$$

gegeben und es kann $\rho(W^{GS}) = 1 - h_n^\sigma$ in erster Näherung angesetzt werden. Die Werte aus Tab.7 lassen jedoch keine eindeutige Bestimmung von σ zu, jedoch ist $1 < \sigma < 2$ anzunehmen. Die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens verschlechtert sich also deutlich mit zunehmender Zahl der Freiheitgrade. Man muß somit Mehrgittertechniken einsetzen, will man befriedigende Konvergenzgeschwindigkeiten erhalten. Ein Mehrgitteralgorithmus wurde in der vorliegenden Arbeit aber noch nicht realisiert.

6.3 Speicherplatzanforderungen

Bevor ich auf die numerischen Berechnungen zu sprechen komme, möchte ich noch kurz den Speicherplatzbedarf des vorgestellten Verfahrens diskutieren. Ich beschränke mich wieder auf den zweidimensionalen Fall und betrachte reguläre dünne Gitter $\tilde{G}_n$ auf dem Einheitsquadrat. Für den Aufbau des Gitters $\tilde{G}_n$ ist nach Abschnitt 5.4.1 ein Zeilenbaum der Tiefe n mit $2^n + 1$ Knoten notwendig. Weiter beträgt die Zahl der Gitterpunkte unter Berücksichtigung des Randes $2^n \cdot (n+3) + 1$ (siehe [8]). Somit werden insgesamt

$$Z_n = 2^n \cdot (n+4) + 1$$

Knoten benötigt, für das reguläre Gitter $\tilde{G}_9$ beispielsweise 6658 Knoten.
Der Speicherplatz pro Knoten ergibt sich aber nicht nur aus der Zahl der Freiheitsgrade pro Gitterpunkt (4 Freiheitsgrade im zweidimensionalen Fall), sondern auch aus der Zahl der Zwischengrößen, die gemäß den Rekursionsschemen (107), (110) und (111) gespeichert werden müssen. Hierbei ist auch die rechte Seite der Differentialgleichung mit einzubeziehen. Die Zahl der zu speichernden Zwischengrößen ist damit abhängig von der zu lösenden Differentialgleichung, wurde aber in der vorliegenden Implementierung des Verfahrens noch nicht minimiert.
Die in den folgenden Kapiteln genannten Beispiele wurden mit Gleitkommazahlen doppelter Genauigkeit auf einer Workstation HP 715/33 berechnet. Zur Lösung der verallgemeinerten biharmonischen Gleichung (85) und der Poisson Gleichung (123) in Abschnitt 7.2 werden so 600 Byte pro Knoten und damit 3.99 Mbyte für das Gitter $\tilde{G}_9$ benötigt.

Hingegen werden für die Berechnung der biharmonischen Gleichung (118) auf dem dünnen Gitter $\tilde{G}_9$ nur 328 Byte pro Knoten und somit 2.18 Mbyte verbraucht. Im Vergleich dazu führt z.B. die Diskretisierung der biharmonischen Gleichung mittels Finite Differenzen Approximation auf einem vollen Gitter G_9 auf einen Speicherplatzverbrauch von 2.1 Mbyte [5]. Hier müssen jedoch z.B. die Werte für u_x und u_y, die beim Stokes Problem ja die Geschwindigkeiten darstellen und deshalb von Interesse sind, erst gesondert berechnet werden. Der Vorteil der dünnen Gitter gegenüber vollen Gittern hinsichtlich Speicherplatzverbrauch und Rechenaufwand würde in diesem Fall also erst bei größeren Gittertiefen als $n = 9$ deutlich.
Ein wesentlicher Vorteil des Dünn-Gitter Verfahrens ist aber, daß die Realisierung einer adaptiven Variante keinen zusätzlichen Speicher- und Verwaltungsaufwand kostet.

7 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel widme ich mich einigen Testproblemen mit bekannter Lösung. An diesen Beispielen lassen sich die Eigenschaften des Verfahrens gut demonstrieren und die in Kapitel 5 bewiesenen Approximationsordnungen bestätigen. Hierzu betrachte ich die verallgemeinerte biharmonische Gleichung und die Poisson Gleichung. Die effizientere Approximation einer gesuchten Lösung durch das adaptiven Verfahren wird anhand eines Testbeispiels der biharmonischen Gleichung studiert.

7.1 Die verallgemeinerte biharmonische Gleichung

Zunächst werde ich die verallgemeinerte biharmonische Gleichung mit vorgegebener rechten Seite

$$\Delta^2 u - \gamma \Delta u = (4 \cdot \pi^4 + 2 \cdot \gamma \cdot \pi^2) \cdot \sin(\pi \cdot x) \cdot \sin(\pi \cdot y) \qquad (118)$$

in $\Omega = (0,1)^2$ lösen. Die exakte Lösungsfunktion

$$u_{ex} = \sin(\pi \cdot x) \cdot \sin(\pi \cdot y) \qquad (119)$$

erfüllt die Glattheitsanforderungen, wie ich sie in Kapitel 5 vorausgesetzt habe. Die Randbedingungen lauten

$$\left.\begin{array}{rcl} u & = & u_{ex}|_\Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & \frac{\partial u_{ex}}{\partial n}|_\Gamma \end{array}\right\} \quad \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega.$$

Auf dem Rand werden aber auch die Funktionswerte für $\frac{\partial u}{\partial s}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n}$ wie in Abschnitt 6.1.1 beschrieben vorgegeben. Die Berechnung der rechten Seite erfolgte auf demselben Gitter $\tilde{G}_n$ mit der Tiefe n wie die Berechnung der gesuchten Funktion u. Bei Erzeugung von neuen Gitterpunkten (Freiheitsgraden) werden diese sofort berücksichtigt und zur Verbesserung der Genauigkeit der rechten Seite verwendet, d.h. die Summen der Integrale für die rechte Seite werden während der Iteration mitberechnet. Auch beim adaptiven Prozeß wird diese Vorgehensweise gewählt und führt zu keiner Verschlechterung der Konvergenzordnung des Verfahrens. Ein Vorlaufschritt zur Berechnung der rechten Seite ist somit nicht wie in [8] notwendig, und ein zusätzlicher Datenbaum für die rechte Seite muß nicht aufgebaut werden. Ein weiterer Vorteil

n	$\Vert\tilde{e}_n\Vert_{L_2}$	η_{L_2}	$\Vert\tilde{e}_n^x\Vert_{L_2}$	$\Vert\tilde{e}_n^{xy}\Vert_{L_2}$	$\Vert\tilde{e}_n\Vert_\infty$	η_∞	$\sqrt{\triangle E_n^{ges}}$	η_E	μ
1	$3.45 \cdot 10^{-4}$		$--$	$--$	$3.45 \cdot 10^{-4}$		$4.93 \cdot 10^{-1}$		1
		5.68				5.09		4.11	
2	$6.08 \cdot 10^{-5}$		$7.31 \cdot 10^{-5}$	$--$	$6.79 \cdot 10^{-5}$		$1.20 \cdot 10^{-1}$		6
		14.74				13.94		3.94	
3	$4.12 \cdot 10^{-6}$		$1.71 \cdot 10^{-5}$	$2.09 \cdot 10^{-6}$	$4.87 \cdot 10^{-6}$		$3.04 \cdot 10^{-2}$		20
		16.14				7.73		4.02	
4	$2.56 \cdot 10^{-7}$		$1.91 \cdot 10^{-6}$	$4.44 \cdot 10^{-6}$	$6.30 \cdot 10^{-7}$		$7.57 \cdot 10^{-3}$		27
		16.06				10.34		4.01	
5	$1.59 \cdot 10^{-8}$		$2.15 \cdot 10^{-7}$	$8.27 \cdot 10^{-7}$	$6.09 \cdot 10^{-8}$		$1.89 \cdot 10^{-3}$		86
		15.62				11.81		4.00	
6	$1.02 \cdot 10^{-9}$		$2.45 \cdot 10^{-8}$	$1.60 \cdot 10^{-7}$	$5.16 \cdot 10^{-9}$		$4.71 \cdot 10^{-4}$		189
		15.21				12.68		4.00	
7	$6.70 \cdot 10^{-11}$		$2.81 \cdot 10^{-9}$	$2.50 \cdot 10^{-8}$	$4.07 \cdot 10^{-10}$		$1.18 \cdot 10^{-4}$		471
		14.71				12.99		4.00	
8	$4.56 \cdot 10^{-12}$		$3.26 \cdot 10^{-10}$	$3.38 \cdot 10^{-9}$	$3.14 \cdot 10^{-11}$		$2.94 \cdot 10^{-5}$		938
		9.60				11.00		3.92	
9	$4.75 \cdot 10^{-13}$		$3.81 \cdot 10^{-11}$	$4.51 \cdot 10^{-10}$	$2.85 \cdot 10^{-12}$		$7.35 \cdot 10^{-6}$		1995

Tabelle 8: Numerische Ergebnisse für die verallgemeinerte biharmonische Gleichung (118), $\gamma = 1.0$.

ist, daß auch eine rechte Seite, die von der gesuchten Funktion u abhängt, nach jedem Iterationsschritt für die Funktion u neu berechnet werden kann. Allerdings ist mit diesem Verfahren ein höherer Rechenaufwand als in [8] verbunden, da die in Abschnitt 6.2 eingeführten Rekursionen bei jeder Verfeinerung des Gitters wieder neu ausgeführt werden müssen.

Das Beispiel (118) wurde bei einer Randbaumtiefe $n_r = 9$ berechnet. Die Ergebnisse sind in den Tab.8 bis 10 zusammengefaßt. Dort sind zum einen die Fehler $\Vert\tilde{e}_n\Vert = \Vert u_{ex} - \tilde{u}_n\Vert$ in der L_2-Norm und der Maximumsnorm für zunehmende Gittertiefen n eingetragen. Die Fehler in der L_2-Norm sind für die Funktion u als auch für ihre Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ angegeben und sind durch $\Vert\tilde{e}_n\Vert_{L_2}, \Vert\tilde{e}_n^x\Vert_{L_2}$ bzw. $\Vert\tilde{e}_n^{xy}\Vert_{L_2}$ gekennzeichnet. Für das Beispiel (118) sind die Werte für den Fehler $\Vert\tilde{e}_n^y\Vert_{L_2}$ mit den Werten für $\Vert\tilde{e}_n^x\Vert_{L_2}$ praktisch identisch.

Zum anderen sind aus den Tabellen die Fehlerquotienten η und die bis zur vollständigen Konvergenz benötigten Iterationszahlen μ (siehe Abschnitt 6.2.2) ersichtlich. Die Quotienten η sind definiert durch

$$\eta = \frac{\Vert\tilde{e}_n\Vert}{\Vert\tilde{e}_{n+1}\Vert}. \tag{120}$$

n	$\|\tilde{e}_n\|_{L_2}$	η_{L_2}	$\|\tilde{e}_n^x\|_{L_2}$	$\|\tilde{e}_n^{xy}\|_{L_2}$	$\|\tilde{e}_n\|_\infty$	η_∞	$\sqrt{\triangle E_n^{ges}}$	η_E	μ
1	$1.81 \cdot 10^{-4}$		$--$	$--$	$1.81 \cdot 10^{-4}$		$5.09 \cdot 10^{-1}$		1
		3.38				3.03		4.19	
2	$5.36 \cdot 10^{-5}$		$6.07 \cdot 10^{-5}$	$--$	$5.98 \cdot 10^{-5}$		$1.21 \cdot 10^{-1}$		6
		14.35				10.45		3.96	
3	$3.73 \cdot 10^{-6}$		$1.71 \cdot 10^{-5}$	$2.03 \cdot 10^{-6}$	$5.72 \cdot 10^{-6}$		$3.06 \cdot 10^{-1}$		20
		15.78				8.07		4.04	
4	$2.37 \cdot 10^{-7}$		$1.93 \cdot 10^{-6}$	$4.61 \cdot 10^{-6}$	$7.09 \cdot 10^{-7}$		$7.58 \cdot 10^{-3}$		28
		15.48				10.56		4.02	
5	$1.53 \cdot 10^{-8}$		$2.16 \cdot 10^{-7}$	$8.36 \cdot 10^{-7}$	$6.72 \cdot 10^{-8}$		$1.89 \cdot 10^{-3}$		86
		14.94				11.92		4.00	
6	$1.02 \cdot 10^{-9}$		$2.46 \cdot 10^{-8}$	$1.60 \cdot 10^{-7}$	$5.63 \cdot 10^{-9}$		$4.71 \cdot 10^{-4}$		189
		14.54				12.75		4.00	
7	$7.04 \cdot 10^{-11}$		$2.82 \cdot 10^{-9}$	$2.50 \cdot 10^{-8}$	$4.42 \cdot 10^{-10}$		$1.18 \cdot 10^{-4}$		469
		14.05				13.08		4.00	
8	$5.01 \cdot 10^{-12}$		$3.26 \cdot 10^{-10}$	$3.39 \cdot 10^{-9}$	$3.38 \cdot 10^{-11}$		$2.94 \cdot 10^{-5}$		934
		9.67				11.43		4.00	
9	$5.18 \cdot 10^{-13}$		$3.81 \cdot 10^{-11}$	$4.51 \cdot 10^{-10}$	$2.96 \cdot 10^{-12}$		$7.35 \cdot 10^{-6}$		2006

Tabelle 9: Numerische Ergebnisse für die verallgemeinerte biharmonische Gleichung (118), $\gamma = 10.0$.

n	$\|\tilde{e}_n\|_{L_2}$	η_{L_2}	$\|\tilde{e}_n^x\|_{L_2}$	$\|\tilde{e}_n^{xy}\|_{L_2}$	$\|\tilde{e}_n\|_\infty$	η_∞	$\sqrt{\triangle E_n^{ges}}$	η_E	μ
1	$3.97 \cdot 10^{-4}$		$--$	$--$	$3.97 \cdot 10^{-4}$		$7.70 \cdot 10^{-1}$		1
		12.57				8.19		5.58	
2	$3.16 \cdot 10^{-5}$		$6.82 \cdot 10^{-5}$	$--$	$4.85 \cdot 10^{-5}$		$1.38 \cdot 10^{-1}$		7
		10.89				5.40		4.27	
3	$2.90 \cdot 10^{-6}$		$1.71 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-5}$	$8.98 \cdot 10^{-6}$		$3.23 \cdot 10^{-2}$		22
		12.38				9.18		4.19	
4	$2.35 \cdot 10^{-7}$		$2.00 \cdot 10^{-6}$	$5.18 \cdot 10^{-6}$	$9.78 \cdot 10^{-7}$		$7.71 \cdot 10^{-3}$		30
		12.54				11.07		4.07	
5	$1.87 \cdot 10^{-8}$		$2.22 \cdot 10^{-7}$	$8.80 \cdot 10^{-7}$	$8.84 \cdot 10^{-8}$		$1.90 \cdot 10^{-3}$		91
		12.87				12.20		4.02	
6	$1.45 \cdot 10^{-9}$		$2.49 \cdot 10^{-8}$	$1.62 \cdot 10^{-7}$	$7.25 \cdot 10^{-9}$		$4.71 \cdot 10^{-4}$		197
		13.25				12.92		4.00	
7	$1.10 \cdot 10^{-10}$		$2.83 \cdot 10^{-9}$	$2.51 \cdot 10^{-8}$	$5.61 \cdot 10^{-10}$		$1.18 \cdot 10^{-4}$		293
		13.42				13.32		4.00	
8	$8.18 \cdot 10^{-12}$		$3.27 \cdot 10^{-10}$	$3.39 \cdot 10^{-9}$	$4.21 \cdot 10^{-11}$		$2.94 \cdot 10^{-5}$		972
		11.78				12.71		4.80	
9	$6.95 \cdot 10^{-13}$		$3.81 \cdot 10^{-11}$	$4.51 \cdot 10^{-10}$	$3.32 \cdot 10^{-12}$		$6.13 \cdot 10^{-6}$		2102

Tabelle 10: Numerische Ergebnisse für die verallgemeinerte biharmonische Gleichung (118), $\gamma = 100.0$.

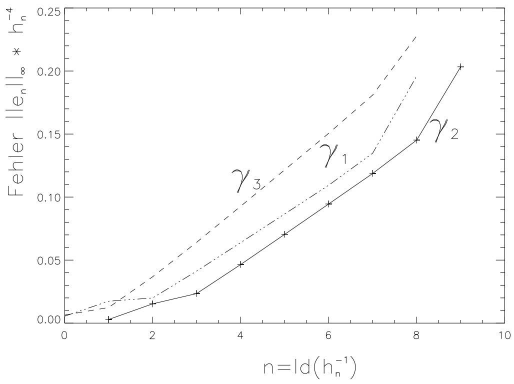


Abbildung 21: Der mit h_n^{-4} multiplizierten Fehler $\|\tilde{e}_n\|_\infty$ der Dünn-Gitter Lösung $\tilde{u}_n$ von (118) für $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 10$ und $\gamma_3 = 100$.

Der Fehler wird dabei in den verschiedenen Normen gemessen. Die korrespondierenden Größen sind η_{L_2} und η_∞. Die Fehlerquotienten geben somit Aufschluß über die Ordnung des Diskretisierungsfehlers.
Die Abschätzungen des Approximationsfehlers in der L_2-Norm werden aus den Daten der Tab.8 bis 10 ersichtlich. Wie zu erwarten werden die Fehler $\|\tilde{e}_n^x\|_{L_2}$ und $\|\tilde{e}_n^{xy}\|_{L_2}$ für die Ableitungsfunktionen u_x und u_{xy} schwächer reduziert als der Fehler für die Funktion selbst. Die Daten aus den Tab. 8 bis 10 legen die Vermutung nahe, daß sowohl der Fehler in der Maximumsnorm als auch in der L_2-Norm von der Ordnung $O(h_n^4 \cdot \mathrm{ld}(h_n^{-1})$ ist. In Abb.21 habe ich hierzu den mit h_n^{-4} multiplizierten Fehler $\|\tilde{e}_n\|_\infty$ einmal über der Gittertiefe $n = \mathrm{ld}(h_n^{-1})$ aufgetragen. Der fast lineare Verlauf der Fehler für die angegebenen Werte von γ bestätigt die oben angegebene Konvergenzordnung. Bei Gittertiefe 9 machen sich bereits Rundungsfehler und die für diese Gittertiefe zu ungenaue Darstellung der Randfunktionen bemerkbar.
Weiter wurde die Korrektur $\triangle E_n = |\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n|_2$ in der Energienorm (65) berechnet, wenn das Gitter $\tilde{G}_{n-1}$ auf das Gitter $\tilde{G}_n$ erweitert wird. Diese Größe gibt nämlich auch Aufschluß über die Konvergenzordnung des Verfahrens. Die $\tilde{u}_n$ bilden eine konvergente Folge, so daß mit $\tilde{u}_n \in \tilde{B}_{e,n} \subset H^2_{(\Omega)}$ und der Energienorm (65) gilt

$$\lim_{n\to\infty} |u_{ex} - \tilde{u}_n|_2 = 0.$$

Aus den Tab.8 bis 10 ist nun zu entnehmen, daß der Energieabstand zwischen den diskreten Lösungen $\tilde{u}_n$ und $\tilde{u}_{n+1}$ von der Ordnung $O(h_n^2)$ sein muß, da der Quotient η_E

$$\eta_E = \frac{\sqrt{\triangle E_n}}{\sqrt{\triangle E_{n+1}}} \longrightarrow (\frac{h_n}{h_{n+1}})^2 = 4 \qquad (121)$$

gegen den Wert 4 strebt. Mit (121) folgt

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_n|_2 = |u_{ex} - \tilde{u}_n|_2 &\leq C \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} |\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}| \\ &\leq C \cdot |\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n|_2 \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-(n+1)} \\ &= C \cdot \frac{4}{3} \cdot |\tilde{u}_{n+1} - \tilde{u}_n|_2 \leq c \cdot h_n^2. \end{aligned}$$

Somit ist auch der Fehler der diskreten Dünn-Gitter Lösung $\tilde{u}_n$ von (118) gemessen in der Energienorm von der Ordnung $O(h_n^2)$.
Die Ordnung des Fehlers kann nun aber ohne die Berechnung der Energie der exakten Lösung bestimmt werden. Denn der Energiebeitrag der Korrektur läßt sich für die Gauß-Seidel Iteration leicht berechnen. Man nutzt hierbei die bekannte Tatsache, daß bei Relaxationsverfahren wie Steepest Descent, CG oder Gauß-Seidel in jedem Einzelschritt die durch das zugeordnete Funktional gegebene Energie in einer bestimmten Suchrichtung minimiert wird [26]. Beim Gauß-Seidel Verfahren sind die Suchrichtungen durch die Koordinatenrichtungen e_j des Suchraumes fest vorgegeben, hier z.B. durch die $4N_n$ Richtungen des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n$ (N_n bezeichnet wieder die Anzahl der inneren Punkte des dünnen Gitters $\tilde{G}_n$). Für den ν-ten Lösungsvektor x_n^ν ist die Energie durch das quadratische Funktional E_n

$$E_n(x_n^\nu) = \frac{1}{2} \cdot (x_n^\nu)^T A x_n^\nu - (x_n^\nu)^T b$$

gegeben. A ist die in (93) bzw. durch (95) definierte Steifigkeitsmatrix. Die Suche des Minimums in der Richtung e_j ergibt als notwendige Bedingung

$$\delta E_n = \frac{\partial}{\partial \tau} E_n(x_n^\nu + \tau \cdot e_j)|_{\tau=0} = e_j^T \cdot (A x_n^\nu - b) \stackrel{!}{=} 0.$$

D.h. die Korrektur erfolgt so, daß die j-te Komponente des Residuums verschwindet. Die Energiereduktion berechnet sich dann zu

$$\triangle E_n = -\frac{1}{2} (\delta x_n^{\nu+1})^T A \delta x_n^{\nu+1},$$

wobei $\delta x_n^{\nu+1} = (x_n^{\nu+1} - x_n^\nu)$ die Differenz zwischen neuem und altem Lösungsvektor angibt. Da diese sich nur in der j-ten Komponente unterscheiden, gilt

$$\triangle E_n = \triangle E_n^j = -\frac{1}{2} \cdot A_{jj} \cdot (\delta x_n^{\nu+1})_j^2 = -\frac{1}{2} \cdot A_{jj} \cdot (c_j^{\nu+1} - c_j^\nu)^2. \tag{122}$$

Damit ist die Energieänderung durch das Produkt des Diagonalelementes von A mit dem Quadrat der Differenz der hierarchischen Überschüsse $c_j^{\nu+1}$ und c_j^ν nach und vor der Relaxation der j-ten Zeile des Gleichungssystems bestimmt. Der Einfachheit halber habe ich nicht mehr die verschiedenen Typen von Freiheitsgraden durch Indizes unterschieden.
Nach μ Durchläufen über alle $4N_n$ Freiheitsgrade nach dem Schema des Abschnitts 6.2.2, ist dann die gesamte Energiereduktion der Korrektur durch

$$\triangle E_n^{ges} = \sum_\mu \sum_{j=1}^{4N_n} (\triangle E_n^j)_\mu$$

einfach zu berechnen. Zu beachten ist, daß für die durch die Erweiterung des Gitters $\tilde{G}_{n-1}$ auf das Gitter $\tilde{G}_n$ neu erzeugten Freiheitsgrade die Werte der hierarchischen Überschüsse $c_j^0 = 0$ in (122) eingesetzt werden müssen.
In den Tab.8 bis 10 steigt nun die Iterationszahl μ stetig an. Dies gibt den Sachverhalt wieder, daß mit zunehmender Zahl der Freiheitsgrade die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens abnimmt. Die Werte für μ weisen darauf hin, daß die Konvergenzordnung $\sigma < 2$ ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen zur Untersuchung des Spektralradius aus Abschnitt 6.2.2.
Den Tab.11 und 12 ist zu entnehmen, daß das Verfahren auch für negative Werte von γ stabil ist und ähnliche Konvergenzgeschwindigkeiten wie bei positiven Werten erreicht werden. Hingegen divergiert das Verfahren für kleinere Werte als etwa $\gamma < -95.0$. Da die Beiträge des biharmonischen Operators und des Laplace-Operators zum Diagonalelement für negative γ entgegengesetztes Vorzeichen besitzen, verschwinden die Diagonaleinträge für kleiner werdendes γ und das Gauß-Seidel Verfahren divergiert.

7.2 Die Poisson Gleichung

Ein Lösungsverfahren für die Poisson Gleichung in zwei und drei Dimensionen wurde bereits in [8] vorgestellt. Dort wurden d-lineare Finite-Elemente verwendet. Gerade im Hinblick auf die Lösung von Eigenwertproblemen, wie sie

n	$\|\tilde{e}_n\|_{L_2}$	η_{L_2}	$\|\tilde{e}_n^x\|_{L_2}$	$\|\tilde{e}_n^{xy}\|_{L_2}$	$\|\tilde{e}_n\|_\infty$	η_∞	$\sqrt{\triangle E_n^{ges}}$	η_E	μ
1	$3.90 \cdot 10^{-4}$		$--$	$--$	$3.90 \cdot 10^{-4}$		$4.91 \cdot 10^{-1}$		1
		6.21				5.57		4.10	
2	$6.27 \cdot 10^{-5}$		$7.69 \cdot 10^{-5}$	$--$	$7.00 \cdot 10^{-5}$		$1.20 \cdot 10^{-1}$		6
		14.81				13.69		3.93	
3	$4.24 \cdot 10^{-6}$		$1.72 \cdot 10^{-5}$	$3.21 \cdot 10^{-6}$	$5.11 \cdot 10^{-6}$		$3.04 \cdot 10^{-2}$		20
		16.19				8.40		4.02	
4	$2.62 \cdot 10^{-7}$		$1.91 \cdot 10^{-6}$	$4.40 \cdot 10^{-6}$	$6.09 \cdot 10^{-7}$		$7.56 \cdot 10^{-3}$		27
		16.14				10.27		4.01	
5	$1.62 \cdot 10^{-8}$		$2.15 \cdot 10^{-7}$	$8.23 \cdot 10^{-7}$	$5.92 \cdot 10^{-8}$		$1.89 \cdot 10^{-3}$		86
		15.77				11.77		4.00	
6	$1.03 \cdot 10^{-9}$		$2.45 \cdot 10^{-8}$	$1.60 \cdot 10^{-7}$	$5.03 \cdot 10^{-9}$		$4.71 \cdot 10^{-4}$		189
		15.37				12.66		4.00	
7	$6.69 \cdot 10^{-11}$		$2.81 \cdot 10^{-9}$	$2.56 \cdot 10^{-8}$	$3.98 \cdot 10^{-10}$		$1.18 \cdot 10^{-4}$		471
		14.93				12.96		4.00	
8	$4.48 \cdot 10^{-12}$		$3.26 \cdot 10^{-10}$	$3.39 \cdot 10^{-9}$	$3.07 \cdot 10^{-11}$		$2.94 \cdot 10^{-5}$		940
		9.67				11.70		4.00	
9	$4.64 \cdot 10^{-13}$		$3.81 \cdot 10^{-11}$	$4.51 \cdot 10^{-10}$	$2.82 \cdot 10^{-12}$		$7.35 \cdot 10^{-6}$		2099

Tabelle 11: Numerische Ergebnisse für die verallgemeinerte biharmonische Gleichung (118), $\gamma = -1.0$.

n	$\|\tilde{e}_n\|_{L_2}$	η_{L_2}	$\|\tilde{e}_n^x\|_{L_2}$	$\|\tilde{e}_n^{xy}\|_{L_2}$	$\|\tilde{e}_n\|_\infty$	η_∞	$\sqrt{\triangle E_n^{ges}}$	η_E	μ
1	$6.39 \cdot 10^{-4}$		$--$	$--$	$6.39 \cdot 10^{-4}$		$4.89 \cdot 10^{-1}$		1
		8.64				7.84		4.13	
2	$7.40 \cdot 10^{-5}$		$1.01 \cdot 10^{-4}$	$--$	$8.16 \cdot 10^{-5}$		$1.18 \cdot 10^{-1}$		5
		15.05				12.62		3.92	
3	$4.91 \cdot 10^{-6}$		$1.74 \cdot 10^{-5}$	$9.67 \cdot 10^{-6}$	$6.47 \cdot 10^{-6}$		$3.02 \cdot 10^{-2}$		19
		16.23				13.31		4.00	
4	$3.03 \cdot 10^{-7}$		$1.91 \cdot 10^{-6}$	$4.17 \cdot 10^{-6}$	$4.86 \cdot 10^{-7}$		$7.55 \cdot 10^{-3}$		27
		16.32				9.80		4.01	
5	$1.85 \cdot 10^{-8}$		$2.14 \cdot 10^{-7}$	$8.12 \cdot 10^{-7}$	$4.96 \cdot 10^{-8}$		$1.88 \cdot 10^{-3}$		86
		16.14				11.52		4.00	
6	$1.15 \cdot 10^{-9}$		$2.45 \cdot 10^{-8}$	$1.60 \cdot 10^{-7}$	$4.30 \cdot 10^{-9}$		$4.71 \cdot 10^{-4}$		190
		15.95				12.48		4.00	
7	$7.20 \cdot 10^{-11}$		$2.81 \cdot 10^{-9}$	$2.50 \cdot 10^{-8}$	$3.45 \cdot 10^{-10}$		$1.18 \cdot 10^{-4}$		476
		16.00				12.77		4.00	
8	$4.49 \cdot 10^{-12}$		$3.26 \cdot 10^{-10}$	$3.39 \cdot 10^{-9}$	$2.70 \cdot 10^{-11}$		$2.94 \cdot 10^{-5}$		974
		11.10				10.13		4.00	
9	$4.05 \cdot 10^{-13}$		$3.81 \cdot 10^{-11}$	$4.51 \cdot 10^{-10}$	$2.66 \cdot 10^{-12}$		$7.35 \cdot 10^{-6}$		2021

Tabelle 12: Numerische Ergebnisse für die verallgemeinerte biharmonische Gleichung (118), $\gamma = -10.0$.

z.B. in der Quantenmechanik auftreten, sind hohe Approximationsordnungen wünschenswert. Deshalb möchte ich in diesem Abschnitt die in Kapitel 5 bewiesene Approximationsordnung für den Fall des Poisson Problems numerisch bestätigen.
Im folgenden betrachte ich hierzu das Modellproblem

$$\triangle u \quad = \quad -2 \cdot \pi^2 \sin(x \cdot \pi) \cdot \sin(y \cdot \pi) \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2 \tag{123}$$

mit den Dirichlet'schen Randbedingungen

$$u \quad = \quad 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma = \partial\Omega. \tag{124}$$

Da (123) mit $\gamma = 1$ und unter Vernachlässigung des biharmonischen Operators aus (89) hervorgeht, ist das in Kapitel 6 erläuterte Lösungsverfahren mit der rekursiven Berechnung des Residuums auf das Poisson Problem anwendbar. Nur die Integrale, die dem Laplace Operator zugeordnet sind, müssen berücksichtigt werden. Mit der in Abschnitt 6.2.1 eingeführten Kurznotation für die rekursiven Schemen berechnet sich das Residuum gemäß

$$r = \mathcal{I}_{x_2}\mathcal{I}_{x_2}(f) - (\mathcal{I}_{x_2}\mathcal{D}_{x_1} + \mathcal{D}_{x_2}\mathcal{I}_{x_1})(c), \tag{125}$$

wobei f und c den Vektor der hierarchischen Überschüsse bzgl. der rechten Seite bzw. der Lösung u auf dem dünnen Gitter darstellen.
Um jedoch das Verfahren aus Kapitel 6 ohne weitere zusätzliche Modifikationen auf das Poisson Problem anwenden zu können, gebe ich jetzt der Einfachheit halber die Randwerte u, u^x, u^y und u^{xy} auf $\Gamma = \delta\Omega$ konsistent zur Lösung u vor. Die auf diese Weise auf dem regulären dünnen Gitter $\tilde{G}_8$ berechnete Lösung $\tilde{u}_8$ ist in Abb.22 mit dem zugehörigen Fehler $\tilde{e}_8$ gezeigt. Die Tab.13 gibt die Fehler, die Reduktionsfaktoren und Iterationszahlen für die verschiedenen Gittertiefen n an.

Deutlich wird, daß das Verfahren bzgl. der L_2-Norm und Maximumsnorm von der Ordnung $O(h_n^4 \cdot \mathrm{ld}(h_n^{-1}))$ ist und bzgl. der Energienorm eine Konvergenzordnung von $O(h_n^3)$ aufweist. Diese Ergebnisse bestätigen somit die in Kapitel 4 und 5 bewiesenen Approximationsordnungen des Dünn-Gitter Raumes $\tilde{B}_n$ für den Fall einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung.

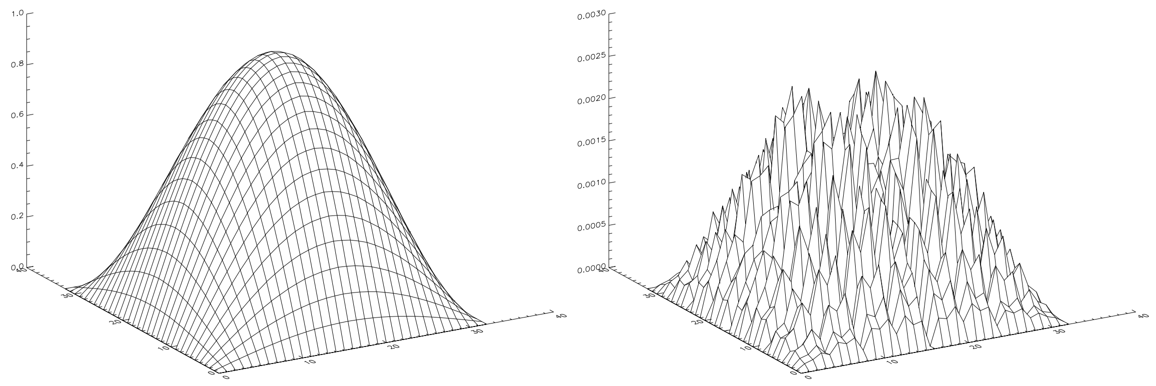


Abbildung 22: Die berechnete Dünn-Gitter Lösung $\tilde{u}_8$ der Poisson Gleichung (123) und der zugehörige Fehler $\tilde{e}_8$

n	$\|e\|_{L_2}$	η_{L_2}	$\|e_x\|_{L_2}$	$\|e_{xy}\|_{L_2}$	$\|e\|_\infty$	η_∞	$\sqrt{\triangle E_n^{ges}}$	η_{E_n}	μ
1	$8.02 \cdot 10^{-4}$		–	–	$8.02 \cdot 10^{-4}$		$6.91 \cdot 10^{-2}$		1
		14.3				7.16		8.84	
2	$5.62 \cdot 10^{-5}$		$4.76 \cdot 10^{-4}$	– –	$1.12 \cdot 10^{-4}$		$7.82 \cdot 10^{-3}$		9
		12.77				9.11		7.02	
3	$4.40 \cdot 10^{-6}$		$3.93 \cdot 10^{-5}$	$1.11 \cdot 10^{-4}$	$1.23 \cdot 10^{-5}$		$1.11 \cdot 10^{-3}$		33
		11.83				10.17		7.46	
4	$3.72 \cdot 10^{-7}$		$3.03 \cdot 10^{-6}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$1.21 \cdot 10^{-6}$		$1.49 \cdot 10^{-4}$		70
		12.16				11.31		7.80	
5	$3.06 \cdot 10^{-8}$		$2.61 \cdot 10^{-7}$	$1.95 \cdot 10^{-6}$	$1.07 \cdot 10^{-7}$		$1.91 \cdot 10^{-5}$		151
		12.70				12.37		7.94	
6	$2.41 \cdot 10^{-9}$		$2.61 \cdot 10^{-8}$	$2.98 \cdot 10^{-7}$	$8.65 \cdot 10^{-9}$		$2.41 \cdot 10^{-6}$		404
		13.24				12.99		7.99	
7	$1.82 \cdot 10^{-10}$		$2.97 \cdot 10^{-9}$	$7.60 \cdot 10^{-8}$	$6.66 \cdot 10^{-10}$		$3.01 \cdot 10^{-7}$		657
		13.58				13.43		8.00	
8	$1.34 \cdot 10^{-11}$		$4.58 \cdot 10^{-10}$	$3.73 \cdot 10^{-8}$	$4.96 \cdot 10^{-11}$		$3.77 \cdot 10^{-8}$		1353

Tabelle 13: Numerische Ergebnisse für die Poisson Gleichung (123) .

7.3 Das adaptive Verfahren auf dünnen Gittern zur Lösung der biharmonischen Gleichung

Nun untersuche ich die Eigenschaften des adaptiven Verfahrens, um es anschließend zur Berechnung der *lid driven cavity* zu verwenden. Hierzu betrachte ich die biharmonische Gleichung auf dem Einheitsquadrat

$$\Delta^2 u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2 \tag{126}$$

mit den Dirichlet'schen Randbedingungen

$$u = u_{ex}|_\Gamma \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_{ex}}{\partial n}|_\Gamma$$

Als Lösungsfunktion von (126) wähle ich die harmonische Funktion

$$u = \frac{\cos(4 \cdot \pi \cdot (x-y)) \cdot \sinh(4 \cdot \pi \cdot (x+y)))}{\sinh(8 \cdot \pi)}. \tag{127}$$

Ich habe diese Funktion aus zwei Gründen ausgewählt. Zum einen erfüllt sie die Glattheitsanforderungen aus Abschnitt 4.1. Die in Kapitel 5 gezeigten Konvergenzordnungen sollten sich also für dieses Beispiel bestätigen lassen. Zum anderen wächst die Funktion in der Umgebung der Ecke (1,1) des betrachteten Einheitsquadrates sehr schnell an. Damit sind aber insbesondere die Werte der Ableitungsfunktion $\frac{\partial^2 u_{ex}}{\partial x \partial y}$ in dieser Umgebung groß und die Energie (63) nimmt große Werte an. Mit diesem Beispiel kann das adaptive Verfahren also gut getestet werden.

7.3.1 Das Verfahren auf regulären dünnen Gittern

In Abb.23 ist die auf dem regulären Gitter $\tilde{G}_9$ berechnete Lösung $\tilde{u}_9$ und die zugehörige Fehlerfunktion gezeigt. Die Funktionswerte für u, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n}$ werden hierbei wie in Abschnitt 6.1.1 besprochen auf dem Rand Γ von Ω vorgegeben.

In Tab.14 sind für dieses Beispiel die Ergebnisse der Berechnung auf regulären dünnen Gittern $\tilde{G}_n$ wiedergegeben. Diesmal habe ich die Energie der diskreten Lösung $\tilde{u}_{11}$ zuvor auf einem dünnen Gitter der Tiefe 11 und bei einer Randbaumtiefe 12 berechnet und erhalte so einen Näherungswert für die Energie der exakten Lösung. Mit diesem Näherungswert berechne ich den

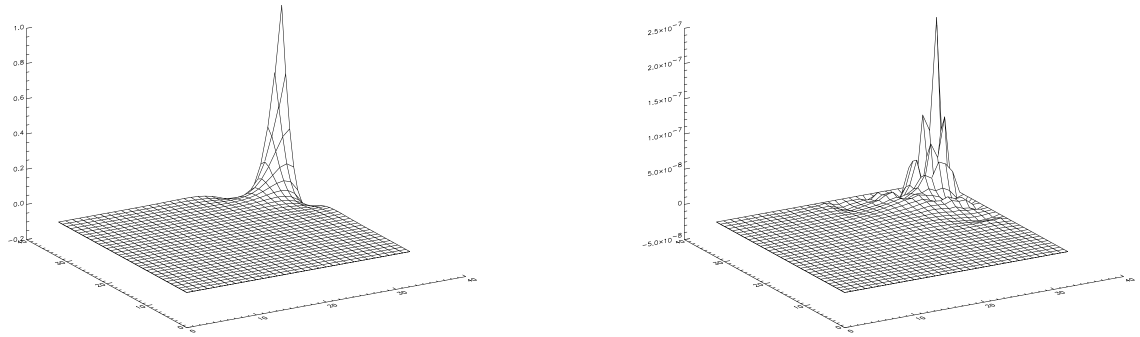


Abbildung 23: Die berechnete Dünn-Gitter Lösung $\tilde{u}_9$ der biharmonischen Gleichung (126) und der zugehörige Fehler $\tilde{e}_9$.

Energiefehler $|\tilde{e}_n|_2$ der Lösungen $\tilde{u}_n$ auf den dünnen Gittern bis zur Tiefe 9. Die Ergebnisse sind in Tab.14 angegeben. η_2 ist durch (120) definiert und strebt gegen den Wert 4. Das Verfahren besitzt demnach die Konvergenzordnung von $O(h_n^2)$ in der Energienorm (65).
Sowohl die Werte für den Fehler der diskreten Lösung $\tilde{u}_n$ in der L_2-Norm als auch in der Maximumsnorm nehmen erst ganz allmählich mit einem Faktor η_{L_2} bzw. η_∞ ab, der auf eine Konvergenz der Ordnung von $O(h_n^4 \cdot \mathrm{ld}(h_n^{-1}))$ schließen läßt. Diese Konvergenzordnung ist erst zu erwarten, wenn das starke Anwachsen der Funktion in der Umgebung der Ecke durch ein feineres Gitter hinreichend genug aufgelöst wird. So steigen die Werte nur bis auf $\eta_{L_2} = 13.12$ bzw. $\eta_\infty = 11.16$ an. Diesmal habe ich das Maximum der Fehler $\|\tilde{e}_n^x\|_{L_2}$ und $\|\tilde{e}_n^y\|_{L_2}$ unter $\max(e_n^x, e_n^y)$ in Tab.14 angegeben. Die Fehler bzgl. der Ableitungen der Funktion $\max(e_n^x, e_n^y)$ und $\|\tilde{e}_n^{xy}\|_{L_2}$ werden langsamer reduziert als der Fehler $\|\tilde{e}_n\|_{L_2}$ der Funktion selbst.
Weiter ist für den Mittelpunkt $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ in Tab.14 auch der punktweise Fehler $(\tilde{e}_n)_P = u_{ex(P)} - \tilde{u}_{n(P)}$ eingetragen. Eine punktweise Fehlerordnung von $O(h_n^4 \cdot \mathrm{ld}(h_n^{-1}))$ ist anzunehmen. Der durch (120) definierte Faktor η_P steigt bis auf $\eta_P = 16.48$ an.
Um einen Vergleich zu den Ergebnissen des adaptiven Verfahrens ziehen zu können, ist in Tab.14 für jede Gittertiefe auch die Zahl der verwendeten Freiheitsgrade DOF (degree of freedom) eingetragen.

n	$\|\|\tilde{e}_n\|\|_{L_2}$	$\max(\tilde{e}_n^x, \tilde{e}_n^y)$	$\|\|\tilde{e}_n^{xy}\|\|_{L_2}$	$\|\|\tilde{e}_n\|\|_\infty$	$\|\tilde{e}_n\|_2$	η_2	$(\tilde{e}_n)_P$	μ	DOF
1	$2.94 \cdot 10^{-1}$	1.90	$1.86 \cdot 10^{1}$	$2.94 \cdot 10^{-1}$	$7.79 \cdot 10^{1}$	2.16	$2.94 \cdot 10^{-1}$	1	4
2	$7.09 \cdot 10^{-2}$	$8.63 \cdot 10^{-1}$	$1.23 \cdot 10^{1}$	$1.03 \cdot 10^{-1}$	$3.61 \cdot 10^{1}$	3.27	$-6.07 \cdot 10^{-1}$	9	20
3	$1.45 \cdot 10^{-2}$	$1.69 \cdot 10^{-1}$	2.86	$3.67 \cdot 10^{-2}$	$1.10 \cdot 10^{1}$	3.19	$7.69 \cdot 10^{-3}$	79	68
4	$1.94 \cdot 10^{-3}$	$3.67 \cdot 10^{-2}$	$9.97 \cdot 10^{-1}$	$8.14 \cdot 10^{-3}$	3.45	3.66	$1.06 \cdot 10^{-3}$	144	196
5	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$5.05 \cdot 10^{-3}$	$1.39 \cdot 10^{-1}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$9.43 \cdot 10^{-1}$	3.97	$1.01 \cdot 10^{-4}$	232	516
6	$2.07 \cdot 10^{-5}$	$6.10 \cdot 10^{-4}$	$2.78 \cdot 10^{-2}$	$2.00 \cdot 10^{-4}$	$2.38 \cdot 10^{-1}$	4.04	$8.32 \cdot 10^{-6}$	419	1284
7	$1.81 \cdot 10^{-6}$	$6.63 \cdot 10^{-5}$	$3.12 \cdot 10^{-3}$	$2.43 \cdot 10^{-5}$	$5.87 \cdot 10^{-2}$	4.05	$5.93 \cdot 10^{-7}$	525	3076
8	$1.47 \cdot 10^{-7}$	$6.27 \cdot 10^{-6}$	$4.34 \cdot 10^{-4}$	$2.65 \cdot 10^{-6}$	$1.45 \cdot 10^{-2}$	4.31	$3.82 \cdot 10^{-8}$	635	7172
9	$1.12 \cdot 10^{-8}$	$6.16 \cdot 10^{-7}$	$6.22 \cdot 10^{-5}$	$2.38 \cdot 10^{-7}$	$3.39 \cdot 10^{-3}$		$2.32 \cdot 10^{-9}$	976	16388

Tabelle 14: Die Ergebnisse für die Berechnung der biharmonischen Gleichung (126) auf regulären dünnen Gittern $\tilde{G}_n$.

7.3.2 Das adaptive Verfahren

Das Testproblem (126) mit der exakten Lösung (127) werde ich jetzt mit Hilfe eines adaptiven Verfahrens auf dünnen Gittern berechnen. Dabei gehe ich nach der in Abschnitt 5.4.2 vorgestellten *energieorientierten* Adaptivitätsstrategie vor: nur die Freiheitsgrade werden verwendet, die einen gewissen Mindestbeitrag ϵ an Energie zur Korrektur der Lösung beitragen. Zunächst gebe ich als Startlösung die auf dem regulären dünnen Gitter $\tilde{G}_3$ berechnete Lösung $\tilde{u}_3$ vor. Ich beginne mit der Energieschranke $\epsilon = 6.3 \cdot 10^{-2}$ die adaptive Verfeinerung und reduziere diese Schranke schrittweise um den Faktor $\frac{1}{16}$. Dieser Faktor wird durch die für reguläre dünne Gitter ermittelte Konvergenzordnung von $O(h_n^2)$ in der Energienorm nahegelegt. Nach jeder adaptiven Verfeinerung des dünnen Gitters wird die ϵ-Schranke wieder soweit erhöht, daß die Lösung ohne Erzeugung zu vieler weiterer Freiheitsgrade ausiteriert werden kann. Nach diesem Glättungsschritt erfolgt der nächste Verfeinerungsschritt durch eine weitere Reduktion von ϵ um den Faktor $\frac{1}{16}$. Tab.15 stellt die auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse zusammen. Aufgelistet sind dort sowohl die Fehler in der L_2-Norm, Maximumnorm und Energienorm als auch der punktweise Fehler für den Mittelpunkt $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ des Einheitsquadrates. Angegeben sind auch die Schranken ϵ, die Iterationszah-

ϵ	$\|\|\tilde{e}_\epsilon\|\|_{L_2}$	$\max(\tilde{e}_\epsilon^x, \tilde{e}_\epsilon^y)$	$\|\|\tilde{e}_\epsilon^{xy}\|\|_{L_2}$	$\|\|\tilde{e}_\epsilon\|\|_\infty$	$\|\tilde{e}_\epsilon\|_2$	$(\tilde{e}_\epsilon)_P$	μ	DOF
$6.3 \cdot 10^{-2}$	$2.52 \cdot 10^{-3}$	$5.44 \cdot 10^{-2}$	1.29	$7.79 \cdot 10^{-3}$	3.49	$1.86 \cdot 10^{-3}$	86	91
$3.9 \cdot 10^{-3}$	$3.21 \cdot 10^{-4}$	$9.45 \cdot 10^{-3}$	$1.61 \cdot 10^{-1}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	$9.35 \cdot 10^{-1}$	$9.86 \cdot 10^{-5}$	107	144
$2.4 \cdot 10^{-4}$	$4.80 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-3}$	$5.09 \cdot 10^{-2}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$2.52 \cdot 10^{-1}$	$1.89 \cdot 10^{-6}$	142	266
$1.5 \cdot 10^{-5}$	$1.03 \cdot 10^{-5}$	$5.10 \cdot 10^{-4}$	$1.43 \cdot 10^{-2}$	$3.68 \cdot 10^{-5}$	$6.65 \cdot 10^{-2}$	$2.81 \cdot 10^{-6}$	255	493
$9.5 \cdot 10^{-7}$	$5.50 \cdot 10^{-6}$	$2.51 \cdot 10^{-4}$	$6.46 \cdot 10^{-3}$	$2.17 \cdot 10^{-5}$	$1.71 \cdot 10^{-2}$	$-1.17 \cdot 10^{-6}$	875	880
$6.0 \cdot 10^{-8}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$	$6.08 \cdot 10^{-5}$	$2.53 \cdot 10^{-3}$	$4.51 \cdot 10^{-6}$	–	$-2.60 \cdot 10^{-7}$	407	1602
$3.7 \cdot 10^{-9}$	$2.12 \cdot 10^{-7}$	$2.06 \cdot 10^{-5}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$1.68 \cdot 10^{-6}$	– –	$-4.66 \cdot 10^{-9}$	600	2911
$2.3 \cdot 10^{-10}$	$2.11 \cdot 10^{-8}$	$1.65 \cdot 10^{-6}$	$1.87 \cdot 10^{-4}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$	– –	$-2.47 \cdot 10^{-8}$	1999	5575

Tabelle 15: Die Ergebnisse für die Berechnung der biharmonischen Gleichung (126) auf adaptiven dünnen Gittern.

len μ und die Zahl der verwendeten Freiheitsgrade DOF. Die Energiefehler sind nur bis zu $\epsilon = 9.5 \cdot 10^{-7}$ verfügbar. Bei dieser Schranke ist nämlich das Gitter in der Umgebung der Ecke (1,1) des Einheitsquadrates beim adaptiven Verfahren bis zu einer Maschenweite $h = 2^{-9}$ verfeinert. Das reguläre Gitter $\tilde{G}_{11}$, mit dem ein Näherungswert für die Energie der Lösung berechnet wurde, hat diese Gitterverfeinerung in der Umgebung der Ecke aber noch nicht erreicht, sondern nur ein Gitter der Maschenweite $h = 2^{-6}$ erzeugt. Der zuvor berechnete Näherungswert für die Energie ist damit als Bezugswert für das adaptive Verfahren zu ungenau.
Der Vergleich mit dem Verfahren auf dünnen regulären Gittern zeigt, daß sich die Adaptivität bei diesem Beispiel auszahlt. Zunächst betrachte ich den Energiefehler, der den angemessenen Maßstab für die energieorientierte Adaptivität darstellt. So erreicht das adaptive Verfahren bei $\epsilon = 9.5 \cdot 10^{-7}$ unter Verwendung von 880 Freiheitsgraden den Energiefehler $|\tilde{e}_\epsilon|_2 = 1.71 \cdot 10^{-2}$. Dieser Fehler ist mit dem Fehler $|\tilde{e}_\epsilon|_2 = 1.45 \cdot 10^{-2}$ auf dem regulären Gitter $\tilde{G}_8$ mit 7172 Freiheitsgraden vergleichbar. Diese erhebliche Reduktion der Zahl der Freiheitsgrade ohne Verlust an Genauigkeit der Lösung bestätigt die Effektivität des energieorientierten adaptiven Verfahrens.
Betrachtet man die Fehler in den anderen Normen, so zeigt sich ebenfalls eine deutliche Verbesserung der Approximation der gesuchten Funktion. Das adaptive Verfahren berechnet z.B. mit 5575 Freiheitsgraden bei $\epsilon = 2.3 \cdot 10^{-10}$ die Lösung mit einem Fehler von $||\tilde{e}_\epsilon||_{L_2} = 2.11 \cdot 10^{-8}$, der dem Fehler

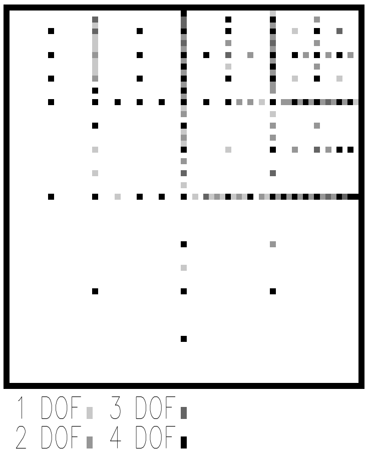


Abbildung 24: Das adaptive Gitter für $\epsilon = 1.5 \cdot 10^{-5}$.

$\|\tilde{e}_9\|_{L_2} = 1.12 \cdot 10^{-8}$ des regulären dünnen Gitters $\tilde{G}_9$ mit 16388 Freiheitsgraden entspricht. Der Fehler der Lösung auf dem adaptiv verfeinerten Gitter in der Maximumsnorm ist für $\epsilon = 2.3 \cdot 10^{-10}$ ebenfalls von dergleichen Größenordnung wie der Fehler auf dem regulären dünnen Gitter $\tilde{G}_9$. Der punktweise Fehler und die Fehler der Ableitungen der Funktion in der L_2-Norm sind gegenüber den Fehlern des Gitters $\tilde{G}_9$ etwas verschlechtert.
In den Abb.24 bis Abb.27 ist eine Bildsequenz der adaptiven dünnen Gitter gezeigt, die bei der Berechnung von (126) mit der exakten Lösung (127) durch das adaptive Verfahren erzeugt wurden. Die obere rechte Ecke des Quadrates in den Abbildungen entspricht dem Eckpunkt $(1, 1)$. Die erzeugten Gitterpunkte sind durch ausgefüllte Quadrate symbolisiert. Die verschiedenen Graustufen repräsentieren die Zahl der verwendeten Freiheitsgrade auf dem jeweiligen Gitterpunkt wie dies in den Abbildungen angegeben ist. Es ist jeweils ein Ausschnitt von 65×65 Gitterpunkten dargestellt.

Man erkennt, daß das Verfahren das Gitter dort verfeinert, wo die Funktion stark anwächst. Die Gitterpunkte werden aber nicht ganz symmetrisch zur Winkelhalbierenden der Ecke $(1, 1)$ generiert, was durch die vorgegebene Symmetrie der gesuchten Funktion wünschenswert wäre. Dies zeigt

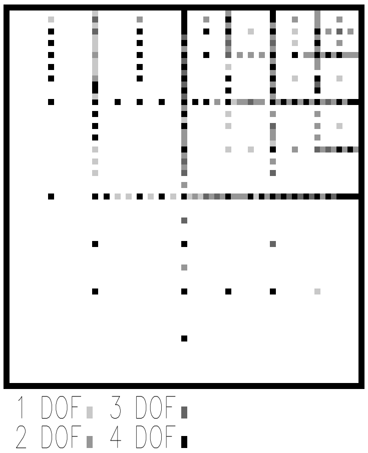


Abbildung 25: Das adaptive Gitter für $\epsilon = 9.5 \cdot 10^{-7}$.

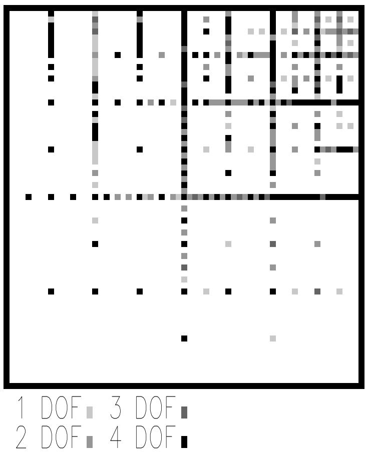


Abbildung 26: Das adaptive Gitter für $\epsilon = 6.0 \cdot 10^{-8}$.

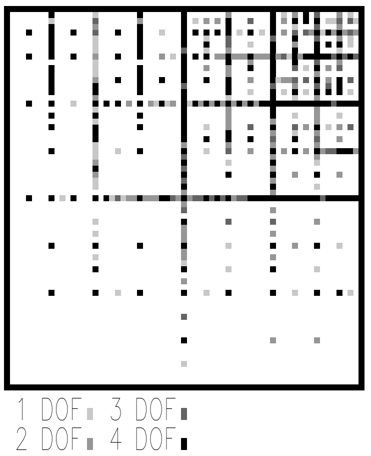


Abbildung 27: Das adaptive Gitter für $\epsilon = 3.7 \cdot 10^{-9}$.

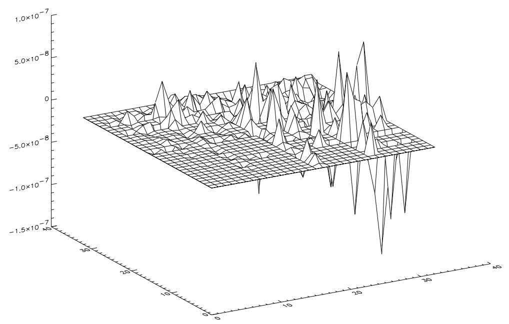


Abbildung 28: Der Fehler $\tilde{e}_\epsilon$ der berechneten Lösung $\tilde{u}_\epsilon$ von (126) auf dem adaptiven Gitter mit $\epsilon = 2.3 \cdot 10^{-10}$.

ϵ	4 DOF	3 DOF	2 DOF	1 DOF
$6.3 \cdot 10^{-2}$	19	4	1	1
$3.9 \cdot 10^{-3}$	26	0	15	10
$2.4 \cdot 10^{-4}$	39	13	28	15
$1.5 \cdot 10^{-5}$	67	15	70	40
$9.5 \cdot 10^{-7}$	94	35	162	75
$6.0 \cdot 10^{-8}$	171	31	335	155
$3.7 \cdot 10^{-9}$	288	92	563	357
$2.3 \cdot 10^{-10}$	565	124	1138	667

Tabelle 16: Die adaptiv erzeugten Gitterpunkte aufgeschlüsselt nach der Zahl ihrer Freiheitsgrade.

auch der in Abb.28 dargestellte Fehler der Lösung des adaptiven Gitters mit $\epsilon = 2.3 \cdot 10^{-10}$, der nicht wie auf dem regulären Gitter (siehe Abb.23) symmetrisch zur Winkelhalbierenden ist. Dieses Verhalten des adaptiven Verfahrens ist darauf zurückzuführen, daß der Lösungsalgorithmus zeilenorientiert arbeitet.

In Tab.16 sind die Gitterpunkte, aufgeschlüsselt nach der Zahl ihrer Freiheitsgrade, zusammengefaßt. Aus der Tabelle geht hervor, daß Gitterpunkte mit nur einem oder zwei Freiheitsgraden erst nach starker Verfeinerung des Gitters erzeugt werden, so daß das singuläre Verhalten der Funktion in der Umgebung der Ecke $(1,1)$ genau genug erfaßt ist. Die im übrigen Gebiet sehr glatte Lösung wird mit nur sehr wenigen Freiheitsgraden approximiert. Die Gitterpunkte mit wenigen Freiheitsgraden werden vornehmlich auf den unteren Hierarchieleveln, also in den Blättern des Datenbaumes, generiert. In Abb.27 sind deshalb von den 1805 Gitterpunkten mit einem oder zwei Freiheitsgraden nur 179 sichtbar. Alle anderen derartigen Gitterpunkte sind tiefer liegenden Hierarchieebenen zuzuordnen, die in dem Ausschnitt von 65×65 Punkten in Abb.27 nicht mehr darstellbar sind.
Die Anwendung der energieorientierten Adaptivität zeigt somit deutlich die Effektivität des adaptiven Verfahrens zur Lösung der biharmonischen Gleichung auf einem Rechtecksgebiet. Ich wende mich nun wieder der numerischen Berechnung der Stokes Gleichungen in ihrer Formulierung mit Hilfe der Stromfunktion ψ zu.

8 Die Stokes Gleichungen

In diesem Kapitel werde ich die zweidimensionalen Stokes Gleichungen in ihrer Formulierung mit Hilfe der Stromfunktion ψ berechnen. Es ist also die biharmonische Gleichung für die Stromfunktion zu lösen. Zunächst wird die *lid driven cavity* als Modellproblem betrachtet. Anschließend untersuche ich ein modifiziertes Problem der Kavität, das den physikalischen Experimenten besser angepaßt ist.

8.1 Das *lid driven cavity* Problem

Wie in Kapitel 2 gezeigt, können die Stokes Gleichungen in zwei Dimensionen auf die biharmonische Gleichung

$$\Delta^2\psi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega = (0,1)^2, \tag{128}$$

für die Stromfunktion ψ reduziert werden. Mit dem Einheitsquadrat als Lösungsgebiet und den Randbedingungen auf den Randstücken Γ_i, wie sie in Abb.29 gezeigt sind,

$$\begin{array}{llll} \psi = 0 & \text{und} & \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 & \text{auf} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \\ \psi = 0 & \text{und} & \frac{\partial\psi}{\partial n} = 1 & \text{auf} \quad \Gamma_1 \end{array} \tag{129}$$

ist das Modellproblem der *lid driven cavity* definiert.

Auf Γ_1 gilt $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u = 1$, wobei u die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung ist. Γ_1 stellt somit einen bewegten Rand dar, der auf Grund der Haftbedingungen des Fluids eine zirkulierende Strömung in der Kavität hervorruft. Die Randbedingungen (129) erfüllen die Kompatibilitätsbedingung (8). Wie in Abschnitt 6.1.1 erläutert, gebe ich vereinfachend auch die Randwerte $\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0$ und $\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial n} = 0$ auf Γ vor. $\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0$ folgt aus (129) und (11). In den Eckpunkten E_{14} und E_{12} ist demnach $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ unstetig (siehe Abb.29). Die Beseitigung dieser Unstetigkeit werde ich weiter unten noch diskutieren.

8.1.1 Berechnungen auf regulären dünnen Gittern

Zunächst werde ich Lösungen ohne adaptive Techniken berechnen. Ich erhalte diskrete Lösungen $\tilde{\psi}_n$ auf regulären dünnen Gittern $\tilde{G}_n$, zusätzlich aber auch die Geschwindigkeiten $\tilde{u}_n$ und $\tilde{v}_n$ in x- bzw. y-Richtung. In Abb.30 ist

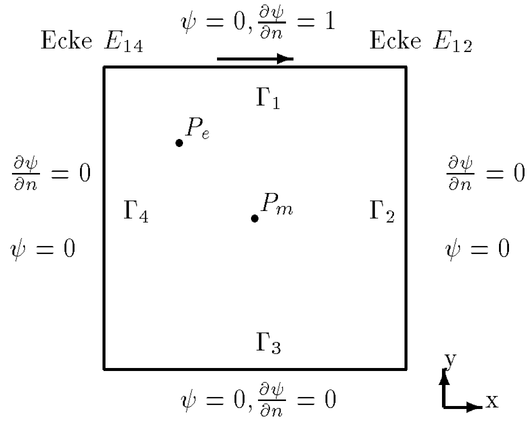


Abbildung 29: Die Randbedingungen der *lid driven cavity*.

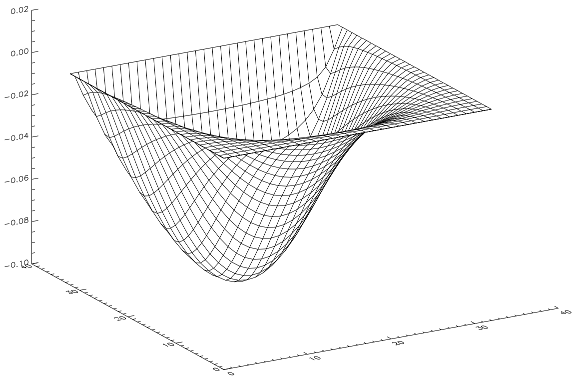


Abbildung 30: Die berechnete Stromfunktion $\tilde{\psi}_9$.

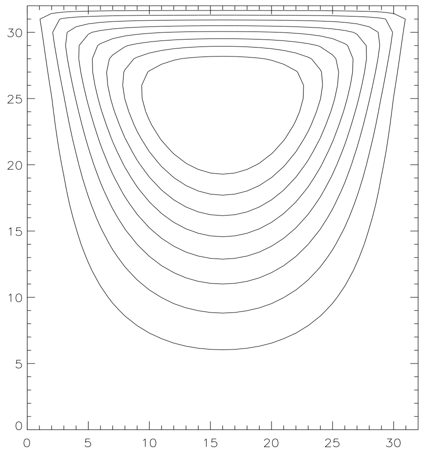


Abbildung 31: Die Höhenlinien von $\tilde{\psi}_9$.

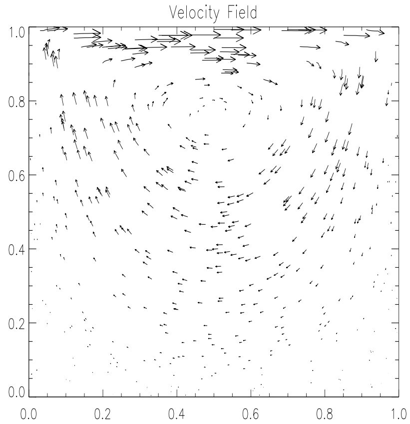


Abbildung 32: Das Geschwindigkeitsfeld der *lid driven cavity.*

die berechnete Stromfunktion $\tilde{\psi}_9$ gezeigt, in Abb.31 ihre Höhenlinien, die physikalisch die Stromlinien darstellen. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld ist in Abb.32 gezeigt.
Da die exakte Lösung nicht bekannt ist, habe ich eine Referenzlösung ψ_{10}^{ref} auf einem vollen äquidistanten Gitter mit der Maschenweite $h = 2^{-10}$ berechnet. Hierzu erfolgte die Diskretisierung des Differentialgleichungssystems (9) mittels Finite-Element Methode mit bilinearen Elementen. Mit einem Mehrgitterverfahren, das die Kopplungen von ψ und ω auf dem Rand geeignet behandelt, wurde anschließend das lineare Gleichungssystem gelöst [22, 28]. In Tab.17 sind die Abweichungen $|\tilde{e}_{n(P_i)}| = |\psi_{ref(P_i)} - \tilde{\psi}_{(P_i)}|$ für den Mittelpunkt $P_m = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und den Punkt $P_e = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ in der linken oberen Ecke der Kavität (siehe Abb.29) zwischen der Referenzlösung und den Dünn-Gitter Lösungen $\tilde{\psi}_n$ mit den zugehörigen Iterationszahlen eingetragen. Die Lösungen der beiden Verfahren gleichen sich an und die Ergebnisse aus Tab.17 können mir somit als Vergleichswerte für das adaptive Verfahren dienen. In der Tabelle sind auch wieder die Korrekturen $\sqrt{\triangle E_n}$ der dünnen Gitter $\tilde{G}_n$ in der Energienorm (65), wie sie in Abschnitt 7.1 definiert wurden, aufgeführt. Sie wachsen kontinuierlich mit dem Faktor 2 an, d.h. die Energie der gesuchten Lösung ist nicht endlich. Ursache hierfür ist das Auftreten von Singularitäten der zweiten Ableitungen der Stromfunktion ψ in den Ecken

n	$e_n(P_m)$	$e_n(P_e)$	$\sqrt{\triangle E_n}$	μ	DOF
1	$4.64 \cdot 10^{-3}$	–	1.28	1	4
2	$2.57 \cdot 10^{-3}$	–	4.40	8	20
3	$9.14 \cdot 10^{-4}$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{1}$	32	68
4	$8.59 \cdot 10^{-5}$	$1.83 \cdot 10^{-4}$	$2.36 \cdot 10^{1}$	62	196
5	$4.79 \cdot 10^{-4}$	$4.75 \cdot 10^{-4}$	$4.89 \cdot 10^{1}$	161	516
6	$2.13 \cdot 10^{-4}$	$3.24 \cdot 10^{-4}$	$9.92 \cdot 10^{1}$	216	1284
7	$7.97 \cdot 10^{-5}$	$1.62 \cdot 10^{-4}$	$2.00 \cdot 10^{2}$	187	3076
8	$2.51 \cdot 10^{-5}$	$6.75 \cdot 10^{-5}$	$4.02 \cdot 10^{2}$	297	7172
9	$6.00 \cdot 10^{-6}$	$2.37 \cdot 10^{-5}$	$8.05 \cdot 10^{2}$	458	16388

Tabelle 17: Der punktweise Fehler gegenüber einer Referenzlösung in den Punkten $P_m = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $P_e = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

der Kavität. Für die asymptotische Näherung der Stokes Gleichungen in einer kleinen Umgebung der Ecke E_{14} (oder E_{12}) in Abb.29 läßt sich nämlich zeigen [28], daß

$$\psi_{(r,\phi)} = \frac{r}{\pi^2 - 4} \cdot (-\pi^2 \cdot sin(\phi) + 2 \cdot \pi \cdot \phi \cdot sin(\phi) + 4 \cdot \phi \cdot cos(\phi))$$

ist. Dabei wurden der Koordinatenursprung in die betrachtete Ecke gelegt und Polarkoordinaten eingeführt. Mithin sind also die im Energiefunktional (63) auftretenden zweiten Ableitungen der Funktion $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \sim \frac{1}{r}$ und die Energie divergiert. Gerade diese Ecksingularitäten legen es nahe, ein adaptives Verfahren zu verwenden.

8.1.2 Berechnungen auf adaptiv verfeinerten dünnen Gittern

Bei der Anwendung des adaptiven Verfahrens zur Berechnung der Kavität ist es notwendig, eine kleinste Maschenweite h_{min} einzuführen, die bei der Verfeinerung des dünnen Gitters nicht unterschritten werden darf. Zur Approximation der Singularitäten in den Ecken würde das adaptive Verfahren das Gitter immer weiter verfeinern und daher unendlich viele Freiheitsgrade erzeugen. Die Ergebnisse der Berechnung mit dem adaptiven Verfahren sind in Tab.18 festgehalten. Dort sind wieder die Abweichungen zu der Referenzlösung ψ_{10}^{ref} auf dem vollen Gitter mit der Maschenweite $h = 2^{-10}$ in den Punkten P_m und P_e (wie in Abb.29) zusammen mit den Iterationszahlen und

ϵ	$\lvert e_(P_m)\rvert$	$\lvert e_(P_e)\rvert$	μ	DOF
$1.0 \cdot 10^{-2}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$	–	7	8
$6.3 \cdot 10^{-4}$	$9.19 \cdot 10^{-4}$	$2.02 \cdot 10^{-4}$	22	93
$3.9 \cdot 10^{-5}$	$2.10 \cdot 10^{-4}$	$2.90 \cdot 10^{-4}$	55	460
$2.4 \cdot 10^{-6}$	$3.38 \cdot 10^{-6}$	$6.47 \cdot 10^{-5}$	139	1985
$1.53 \cdot 10^{-7}$	$8.22 \cdot 10^{-7}$	$7.39 \cdot 10^{-6}$	109	8210

Tabelle 18: Die Ergebnisse der Berechnung des *lid driven cavity* Problems mit dem adaptiven Dünn-Gitter Verfahren.

DOF	4 DOF	3 DOF	2 DOF	1 DOF	Gitterpunkte
8	0	0	4	0	4
93	18	2	6	3	29
460	100	4	16	16	136
1985	453	12	48	41	554
8210	1946	38	106	100	2190

Tabelle 19: Die Gitterpunkte des adaptiven dünnen Gitters aufgeschlüsselt nach der Anzahl ihrer Freiheitsgrade.

der Zahl der verwendeten Freiheitsgrade aufgelistet. Die Verfeinerung erfolgte hier ebenfalls wie in Abschnitt 7.3.2 durch Reduktion der ϵ Schranke um den Faktor $\frac{1}{16}$. Jedesmal wurden zwei Verfeinerungsschritte durchgeführt, bevor die Lösung auf dem neuen adaptiven Gitter ausiteriert wurde. Das adaptive Verfahren erweist sich im Vergleich zum Verfahren auf regulären Gittern wiederum als wesentlich effizienter. Die Werte der Referenzlösung ψ_{10}^{ref} in den Punkten P_m und P_e werden mit erheblich weniger Freiheitsgraden erreicht. Im Mittelpunkt beträgt die Abweichung bei Verwendung von 1985 Freiheitsgraden nur noch $|e_{(P_m)}| = 3.38 \cdot 10^{-6}$ und ist mit dem Wert, der auf dem regulären Gitter $\tilde{G}_9$ mit 16388 Freiheitsgraden erreicht wird, vergleichbar. In Tab.19 ist wieder detailliert angegeben, wieviele Gitterpunkte 4, 3, 2 oder einen Freiheitsgrad tragen. Es werden ausschließlich Gitterpunkte mit 4 Freiheitsgraden erzeugt. Die zugehörigen adaptiven Gitter sind in Abb.33 bis Abb.35 mit einem Ausschnitt von 65×65 Gitterpunkten gezeigt. Gut zu erkennen ist die adaptive Verfeinerung des dünnen Gitters in die Ecken E_{12} und E_{14}.

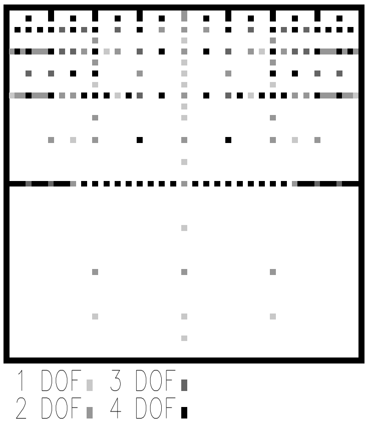


Abbildung 33: Das adaptive Gitter zur Berechnung des *lid driven cavity* Problems, $\epsilon = 2.4 \cdot 10^{-6}$.

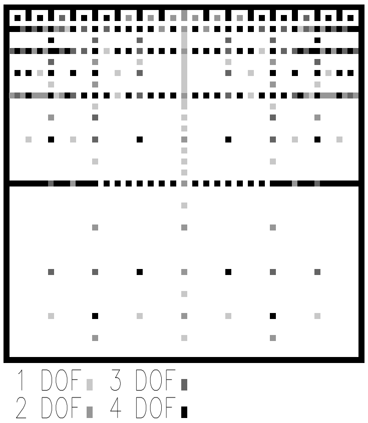


Abbildung 34: Das adaptive Gitter zur Berechnung des *lid driven cavity* Problems, $\epsilon = 1.5 \cdot 10^{-7}$.

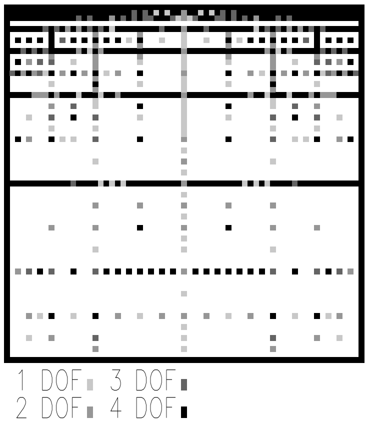


Abbildung 35: Das adaptive Gitter zur Berechnung des *lid driven cavity* Problems, $\epsilon = 9.5 \cdot 10^{-9}$.

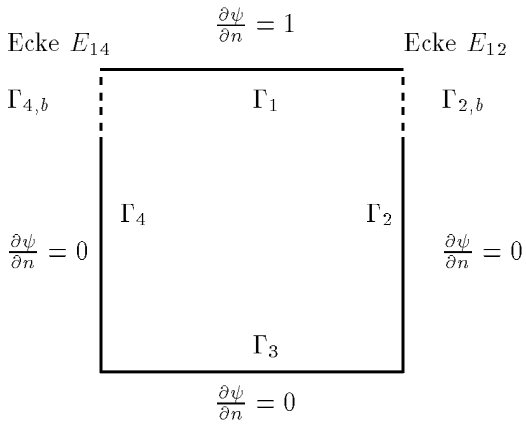


Abbildung 36: Die Kavität mit den Spalten $\Gamma_{2,b}$ bzw. $\Gamma_{4,b}$.

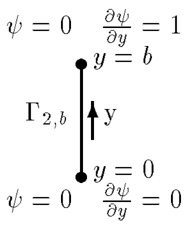


Abbildung 37: Die Interpolation auf dem Randstück $\Gamma_{2,b}$.

8.2 Das modifizierte Problem der *lid driven cavity*

Wie bereits erwähnt, ist die Normalenableitung $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ in den Ecken E_{14} und E_{12} nicht stetig. Diese Unstetigkeit kann man durch die Wahl folgender Randbedingungen beheben

$$
\begin{array}{llll}
\psi = \psi_I, & \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \psi_I^y & \text{auf} & \Gamma_{2,b} \quad \text{und} \quad \Gamma_{4,b} \\
\psi = 0, & \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, & \text{auf} & (\Gamma_2 \setminus \Gamma_{2,b}) \cup \Gamma_3 \cup (\Gamma_4 \setminus \Gamma_{4,b}) \\
\psi = 0, & \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 1 & \text{auf} & \Gamma_1
\end{array}
\tag{130}
$$

ψ_I und ψ_I^y bezeichnen die eindimensionalen hermitesch kubischen Interpolanten auf $\Gamma_{2,b}$ bzw. $\Gamma_{4,b}$. Die Randstücke $\Gamma_{2,b}$ und $\Gamma_{4,b}$ der Breite b sind in Abb.36 als gestrichelte Linie gezeigt. Zur Erläuterung der Interpolation habe ich in Abb.37 das Randstück $\Gamma_{2,b}$ mit den Randwerten in den Endpunkten herausgezeichnet. Die gezeigten Randbedingungen werden von der Ansatzfunktion vom Typ II (19) (siehe Kapitel 3) erfüllt. Daher habe ich nur nach der Vorschrift (47) bzw. (48) in y-Richtung zu interpolieren. Dann gilt mit $\frac{\partial\psi}{\partial y} = u(y)$, wobei u die Geschwindigkeit in x-Richtung ist,

$$
\begin{array}{ll}
\psi(y) = & \frac{y^3}{b^2} - \frac{y^2}{b} \\
u(y) = & 3 \cdot \frac{y^2}{b^2} - 2 \cdot \frac{y}{b}
\end{array}
\tag{131}
$$

und die hierarchischen Überschüsse für ψ und $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ verschwinden auf $\Gamma_{2,b}$ bzw. $\Gamma_{4,b}$. Der sich ergebende Verlauf der Funktionen ψ_I und $\frac{\partial\psi_I}{\partial y} = u(y)$ ist in den Abb.38 und Abb.39 gezeigt. Die vorgegebene Geschwindigkeit u erfüllt die

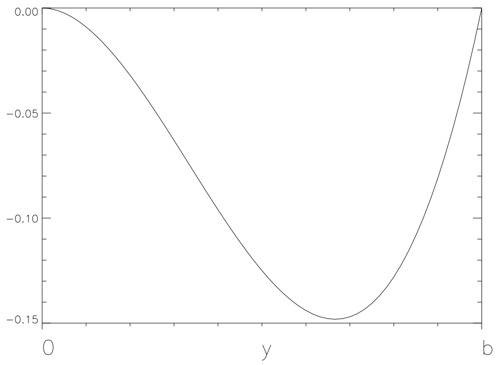


Abbildung 38: Die Interpolierende ψ_I auf dem Randstück $\Gamma_{2,b}$.

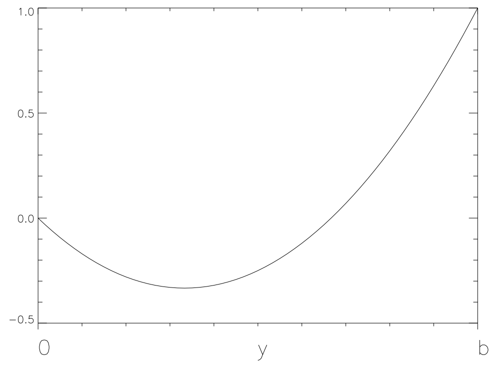


Abbildung 39: Die Interpolierende $\psi_I^y = u(y)$ auf dem Randstück $\Gamma_{2,b}$.

Kompatibilitätsbedingung (8) aus Abschnitt 2.2, denn es gilt

$$\int\limits_{\Gamma_{2,b}} \vec{n} \cdot \vec{u} ds = \int\limits_0^b u(y) dy = [\psi(y)]_0^b = 0.$$

Die Randbedingungen sind damit physikalisch sinnvoll. Zur Demonstration habe ich mit dem adaptiven Verfahren die Lösung der *lid driven cavity* mit einem Spalt der Breite $b = \frac{1}{8}$ berechnet. Hierzu wurden 2750 Gitterpunkte und insgesamt 10577 Freiheitsgrade generiert. Die zweiten Ableitungen der Stromfunktion sind jetzt nicht mehr singulär, so daß die Energie gemäß (63) nach oben beschränkt bleibt.

In Abb.40 ist das Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung der Ecke E_{12} mit einem Ausschnitt von 20×20 Gitterpunkten gezeigt. Zu erkennen ist ein Ein- und Ausströmprofil entlang des Spaltes. In einiger Entfernung vom Spalt ergibt sich jedoch wieder das Strömungsbild der geschlossenen Kavität. Durch den Spalt zwischen den festen Wänden Γ_2 bzw. Γ_4 und der bewegten Wand Γ_1 kann somit das Fluid in die Kavität hinein- oder aus ihr hinausströmen. Dies entspricht der physikalischen Realität, da eine Kavität ohne Spalt eine unendliche Kraft an den Ecken E_{14} und E_{12} voraussetzen würde und damit nicht wirklich im Experiment realisierbar ist.

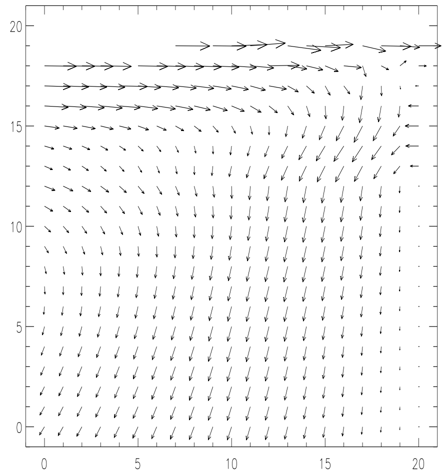


Abbildung 40: Das auf einem adaptiv verfeinerten dünnen Gitter berechnete Geschwindigkeitsfeld für die Kavität mit Spalt, Umgebung der Ecke E_{12}.

9 Schlußbemerkung

In dieser Arbeit habe ich ein adaptives numerisches Verfahren auf dünnen Gittern zur Lösung einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung vorgestellt. Hierzu wurden Funktionenräume mit Hilfe hermitesch d-kubischer hierarchischer Basisfunktionen konstruiert und als Ansatz- und Testraum in einem Galerkin Verfahren zur Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung verwendet. Approximationseigenschaften dieser Dünn-Gitter Räume wurden bewiesen. Im Vergleich zu der Approximationsordnung der Funktionenräume, die mit den herkömmlichen vollen Gittern korrespondieren, erweist sich das Dünn-Gitter Verfahren von höherer Ordnung in Bezug auf die Zahl der benötigten Freiheitsgrade.
Ein adaptives Verfahren wurde implementiert, das sowohl eine Gitterverfeinerung als auch eine adaptive Auswahl der in einem Gitterpunkt zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade erlaubt. Zum einen bestätigen die numerischen Ergebnisse der Berechnung einer verallgemeinerten biharmonischen Gleichung und der Poisson Gleichung auf regulären dünnen Gittern die bewiesenen Aussagen über die Approximationsgüte. Zum anderen zeigen die Ergebnisse der Rechnungen mit dem adaptiven Verfahren, daß sich die Adaptivität bei Auftreten von Singularitäten auszahlt. Die Zahl der benötigten Freiheitsgrade kann in diesem Fall erheblich reduziert werden. Eine Anwendung des Verfahrens auf das Plattenproblem aus der Elastizitätstheorie ist damit effizient möglich, muß jedoch noch eingehender untersucht werden. Weiter wurde die numerische Berechnung der Stokes Gleichungen für das Modellproblem der *lid driven cavity* mit dem adaptiven Verfahren durchgeführt.
Die bisherigen Implementierungen beschränken sich noch auf zweidimensionale Probleme. Eine Erweiterung auf d Dimensionen für die Berechnung von Eigenwertproblemen aus der Quantenmechanik (stationäre Schrödingergleichung) steht noch aus (siehe [17]).

Literatur

[1] O. Axelsson and V.A. Barker. *Finite Element Solution of Boundary Value Problems.* Academic Press, Inc., 1984.

[2] I. Babuška and M. Suri. The optimal convergence rate of the p-version of the Finite Element Method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 24(4), August 1987.

[3] R. Balder and C. Zenger. The d-dimensional Helmholtz equation on sparse Grids. SFB Bericht 342/21/92 A, Institut für Informatik, TU München, 1992.

[4] R. Balder and C. Zenger. The solution of the multidimensional Helmholtz equation on sparse grids. *SIAM*, 1994. submitted.

[5] P. Bjorstad. *Numerical solution of the biharmonic equation.* PhD thesis, Dept. of Computer Science, Stanford University, 1980.

[6] D. Braess. *Finite Elemente.* Springer-Verlag, 1992.

[7] A. Brandt. Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics. *GMD Studien*, 85, 1984.

[8] H. Bungartz. *Dünne Gitter und deren Anwendung bei der adaptiven Lösung der dreidimensionalen Poisson-Gleichung.* PhD thesis, TU München, Institut für Informatik, Juni 1992.

[9] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* North-Holland, Amsterdam, New York, London, 1978.

[10] E.J. Dean, R. Glowinski, and O. Pironneau. Iterative solution of the stream function - vorticity formulation of the Stokes problem, applications to the numerical simulation of incompressible viscous flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 87:117–155, 1991.

[11] C.J. Freitas, R.L. Street, A.N. Findikakis, and J.R. Koseff. Numerical Simulation of Three-Dimensional Flow in a Cavity. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 5:561–575, 1985.

[12] B. Guo and I. Babuška. The *h-p* version of the Finite Element Method, Part I. *Computational Mechanics*, 1:21–41, 1986.

[13] B. Guo and I. Babuška. The *h-p* version of the Finite Element Method, Part II. *Computational Mechanics*, 203-220:2, 1986.

[14] W. Hackbusch. *Multigrid Methods and Applications.* Springer Verlag, Berlin, 1985.

[15] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen.* Teubner Studienbücher, 1986.

[16] W. Hackbusch. *Iterative Lösung großer schwach besetzter Gleichungssysteme.* Teubner Studienbücher, 1992.

[17] S. Hilgenfeldt. Numerische Lösung der stationären Schrödingergleichung mit Finite-Element-Methoden auf dünnen Gittern. Diplomarbeit, Institut für Informatik, Institut für Physik, Technische Unibersität München, Mai 1994.

[18] W. Hoppenstedt, editor. *Sparse Ideas on Sparse Grids.* Müller-Lüdenscheid Publishing Company, Hammerfest, Timbuktu, Furth im Wald, Proceedings of the First International Conference on Applied Loriotics (LAN),Castel di Mare (Lago di Bodo),11.3.–16.3., 1991.

[19] J.H. Bramble and J.E. Pasciak and J. Xu. Parallel Multilevel Preconditioners. *Mathematics of Computation*, 55(191):1–22, July 1990.

[20] L. Landau and E. M. Lifschitz. *Elastizitätstheorie.* Akademie Verlag, Berlin, 1970.

[21] U. Langer and W. Queck. Preconditioned Uzawa-type iterative methods for solving mixed finite element equations. *Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt*, 3, 1987.

[22] J. Linden. Mehrgitterverfahren für das erste Randwertproblem der biharmonischen Gleichung und Anwendung auf ein inkompressibles Strömungsproblem. GMD-Bericht Nr. 164, Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1986.

[23] P. Oswald. Multilevel preconditioners for discretizations of the biharmonic equation by rectangular finite elements. Institut für Angewandte Mathematik, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 1992. preprint.

[24] L. Quartapelle. *Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations*, volume 113. International Series of Numerical Mathematics, ISNM, 1993.

[25] C. Reinsch. Numerische Mathematik I und II. Skriptum zur Vorlesung, Mathematisches Institut, Technische Universität München, 1992.

[26] H. Rutishauser. *Lectures on Numerical Mathematics.* Birkhäuser, Boston, 1990.

[27] J. Stoer. *Einführung in die Numerische Mathematik I.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Band 1, 1989.

[28] T. Störtkuhl, C. Zenger, and S. Zimmer. An asymptotic solution for the singularity at the angular point of the lid driven cavity. *Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 4(1):47–59, February 1994.

[29] G. Strang and G.J. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.

[30] G. Wittum. Multi-Grid Methods for Stokes and Navier-Stokes Equations. *Numer. Math.*, 54:543–563, 1989.

[31] H. Yserentant. On the Multi-Level Splitting of Finite Element Spaces. *Numer. Math.*, 49:379–412, 1986.

[32] C. Zenger. Sparse Grids. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 31, 1991.

[33] X. Zhang. Studies in domain decomposition: Multi-level methods and the biharmonic dirichlet problem. Technical report, Courant Institute, Ney York, 1991.

[34] S. Zimmer. Lösung der Stokes Gleichungen durch ein adaptives Verfahren mit hierarchischen Basisfunktionen. Diplomarbeit, Institut für Informatik, Technische Unibersität München, 1991.