Fakultät für Informatik
der Technischen Universität München

Rand-Druckkorrektur für die Stokes-Gleichung

Stefan Zimmer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Informatik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:		Univ.-Prof. Dr. A. Endres
Prüfer der Dissertation:		
	1.	Univ.-Prof. Dr. Chr. Zenger
	2.	Univ.-Prof. Dr. M. Griebel
		Rheinische Friedrich-Wilhelms-Univ. Bonn

Die Dissertation wurde am 15. Dezember 1995 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Informatik am 14. Februar 1996 angenommen.

Fakultät für Informatik
der Technischen Universität München

Rand-Druckkorrektur für die Stokes-Gleichung

Stefan Zimmer

Zusammenfassung

Zur Konstruktion schneller Iterationsverfahren vom Uzawa-Typ für die Stokes-Gleichung, die Strömungen im Grenzfall eines unendlich viskosen Fluids beschreibt, wird eine Formulierung der Gleichungen verwendet, die das Problem einschränkt auf die Bestimmung des Drucks am Rand des Berechnungsgebietes. Eine Analyse des zugehörigen Schurkomplementoperators zeigt sowohl für die kontinuierliche Gleichung als auch für eine diskretisierte Form, daß für die einfachsten Gebiete das Uzawa-Verfahren mit passend gewähltem Parameter zum direkten Löser entartet. Für kompliziertere Gebiete läßt sich die geometrieabhängige Information, die von effizienten Iterationsverfahren benötigt wird, mit wenigen Parametern bzw. auf einem Teilraum kleiner Dimension kompakt beschreiben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Gekoppelte Systeme partieller Differentialgleichungen, wie sie hier am Beispiel der Stokes-Gleichung behandelt werden, sind eine adäquate Beschreibung für viele Probleme in der Physik wie auch in deren technischen Anwendungen. Die Problematik, die hierbei für die effiziente Umsetzung auf den Rechner ein genaues Verständnis der zugrundeliegenden Operatoren erfordert, ist zunächst dieselbe, wie sie stets beim numerischen Lösen partieller Differentialgleichungen auftritt. Durch Diskretisierung, das heißt durch Approximation des kontinuierlichen Problems mit einem endlichdimensionalen Lösungsraum, entsteht aus einer linearen Differentialgleichung ein lineares Gleichungssystem. Dieses zu lösen ist zwar im Prinzip eine Standardaufgabe der linearen Algebra, erfordert in der Praxis jedoch wegen der typischerweise sehr großen Zahl von Unbekannten effiziente, auf das jeweilige Problem abgestimmte Verfahren.

Technisch relevante Probleme sind häufig so komplex, daß alleine die Darstellung des Lösungsvektors, der eine hinreichend genaue Approximation der exakten Lösung darstellt, Speicherplatz in der Größenordnung des zur Verfügung stehenden Gesamtspeichers benötigt. Das Abspeichern der Koeffizientenmatrix direkt in Form eines Feldes verbietet sich dann von vorneherein, da der Speicherbedarf hierfür quadratisch mit der Zahl der Unbekannten anwächst; dazu wächst die Rechenzeit z.B. für eine Gaußelimination mit deren dritten Potenz. Sowohl für das Abspeichern als auch für den Lösungsprozeß müssen also spezielle Eigenschaften des Problems ausgenutzt werden.

Eine Möglichkeit hierfür bietet sich oft dadurch, daß die Koeffizientenmatrix für viele Probleme schwach besetzt ist, also pro Zeile oder Spalte nur wenige Einträge von null verschieden sind. Unter Ausnutzen dieser Tatsache reduziert sich der Speicherbedarf oft auf Werte proportional zur Anzahl der Unbekannten und auch die Rechenzeit kann — z.B. durch sogenannte Bandlöser — deutlich reduziert werden, wobei allerdings die Zahl der Operationen in der Regel immer noch überproportional mit der Zahl der Unbekannten wächst. Spezielle Verfahren, wie etwa das Nested-Dissection-Schema [George 1973] nutzen noch weitere Merkmale von Besetzungsmustern aus, wie sie charakteristisch für diskretisierte partielle Differentialgleichungen sind. Dieses Vorgehen nutzt aber nur rein algebraische Informationen, nämlich die Verteilung der Koeffizienten in der Matrix. Man kann mit Recht erwarten, daß sich in vielen Fällen mit zusätzlicher Information, die wir über das dahinterstehende Problem haben, effizientere Verfahren zum Lösen des linearen Gleichungssystems angeben lassen.

Den geeigneten Rahmen, um zusätzliche problemspezifische Eigenschaften auszunutzen, bilden Iterationsverfahren, die versuchen, eine möglichst schnell gegen den Lösungsvektor konvergierende Folge von Iterierten zu konstruieren. Die einzelnen Folgenglieder erfüllen also das lineare Gleichungssystem im allgemeinen nicht: Anwenden der Koeffizientenmatrix ergibt ein Residuum, also eine Differenz zur rechten Seite des Gleichungssystems. Aus diesem Residuum wird durch eine geeignete Iterationsvorschrift ein Korrekturvektor und damit die nächste Iterierte gebildet. Je besser man dabei aus dem Residuum den Fehler zur tatsächlichen Lösung schätzen kann, desto schneller konvergiert das Verfahren.

Ein Beispiel dafür, wie Iterationsverfahren neben algebraischen Informationen, wie der Schwachbesetztheit der Matrix, zusätzliche Eigenschaften des Operators ausnutzen, sind Mehrgitterverfahren, z.B. für das klassische Modellproblem, die Poissongleichung auf einem regelmäßigen Gitter. Hierfür stellt man fest, daß Verfahren wie die Gauß-Seidel-Relaxation, die lokal arbeiten — und deshalb auch nur eine von der Problemgröße unabhängige Zahl von Operationen pro Gitterpunkt und Iterationsschritt brauchen — zwar konvergieren, aber um so langsamer, je feiner das Gitter wird. Der Aufwand, um eine vorgegebene Genauigkeit zu erreichen, wächst überproportional mit der Anzahl der Gitterpunkte und wird schnell unerträglich groß. Mehrgitterverfahren nutzen nun aus, daß der Differentialoperator außer auf dem vorgegebenen Gitter auch Diskretisierungen auf gröberen Gittern zuläßt und daß sich diese Grobgitteroperatoren als eine geeignete Approximation des ursprünglichen Feingitteroperators ansehen lassen:

- Mit einem Aufwand, der nur proportional zur Anzahl der (Feingitter-) Unbekannten ist, läßt sich ein Grobgitterkorrekturvektor berechnen, der alle Fehlerkomponenten, die sich auf dem groben Gitter darstellen lassen, gut approximiert, und

- diese Fehlerkomponenten sind es gerade, die die schlechte Konvergenz der Gauß-Seidel-Relaxation verursachen.

Kombiniert man die lokale Glättung mit der Grobgitterkorrektur, werden alle Fehlerkomponenten gut gedämpft, man kann schnelle und von der Problemgröße unabhängige Konvergenz erzielen [Hackbusch 1980].

Für den in dieser Arbeit untersuchten Gleichungstyp erweist sich eine Zerlegung des Fehlers als effizient, die sich an der Geometrie des Berechnungsgebietes orientiert. Obwohl die gesuchte Lösung eine Funktion auf dem ganzen Gebiet ist, läßt sich der Suchraum so einschränken, daß das eigentliche Problem auf die Bestimmung der Randwerte reduziert ist. Das ist schon an sich eine so große Reduktion der Problemgröße, daß zum Lösen wieder direkte Verfahren in Frage kommen [Kleiser und Schumann 1980; Glowinski 1984], auch iterative Standardverfahren geben zufriedenstellende Konvergenzraten. Eine nähere Analyse des Operators zeigt aber, daß das eingeschränkte Problem auf den geometrisch einfachsten Gebieten, dem Kreis und der Halbebene, durch einen sehr einfachen Korrekturschritt exakt lösbar ist. Für kompliziertere Gebiete gilt dies immer noch in sehr guter Näherung für fast alle Fehlerkomponenten — für ein Quadrat mit einem regelmäßigen $2^k \times 2^k$-Gitter genügt ein Teilraum der Dimension $8k$, um das für dieses Gebiet gegenüber der Halbebene abweichende Verhalten des Operators hinreichend genau zu beschreiben. Ein Iterationsverfahren, das das für die

Halbebene hergeleitete Verfahren mit dem Lösen eines Systems mit diesen $8k$ Unbekannten kombiniert, erzielt sehr gute Konvergenzraten.

Die zugehörige $8k \times 8k$-Matrix, die abzuspeichern im Vergleich zur Größe des Gesamtproblems praktisch nichts kostet, kann man als sehr kompakte Darstellung des ursprünglichen Operators auf dem Raum der Dimension $2^k \times 2^k$ auffassen: sie enthält alle Informationen über ihn, die notwendig sind, um ein schnelles Iterationsverfahren für das jeweilige Gebiet zu konstruieren.

Konkret untersuchen wir iterative Lösungsverfahren für Sattelpunktprobleme, zunächst die stationäre Stokes-Gleichungen in primitiven Variablen — einem Geschwindigkeitsfeld $u : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$ und dem Druck $p : \Omega \to \mathbb{R}$, — also die Impulsgleichung

$$-\Delta u + \operatorname{grad} p = f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = u_\Gamma \tag{1.1}$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$-\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.2}$$

Diese Gleichungen bilden den Grenzfall der Navier-Stokes-Gleichungen mit Reynoldszahl Null; sie beschreiben (im Fall $f = 0$) die Strömung eines unendlich zähen Fluids mit vorgegebener Geschwindigkeit u_Γ am Gebietsrand $\partial\Omega$.

In der verallgemeinerten (zeitabhängigen) Form, wie sie in Kapitel 5.1 untersucht werden wird, kann sie auch als Teilproblem beim Lösen von Navier-Stokes-Lösers betrachtet werden [Glowinski 1984].

Darüberhinaus bilden die Stokes-Gleichungen den Prototyp eines gekoppelten Systems partieller Differentialgleichungen, man kann an diesem Beispiel die Wechselwirkung zwischen Druck und Geschwindigkeitsfeld studieren. Es ist nicht möglich, eine der Gleichungen nach einer dieser Größen aufzulösen und dann die andere Größe mittels der verbleibenden Gleichung zu bestimmen — in diesem Sinn handelt es sich hier um ein echtes gekoppeltes Problem [Zienkiewicz 1984].

Wir werden die Stokes-Gleichung sowohl als kontinuierliches wie auch als diskretisiertes Problem untersuchen, zur Diskretisierung verwenden wir hier ein einfaches Finite-Differenzen-Schema.

In beiden Fällen — kontinuierlich und diskret — gehen wir davon aus, daß Verfahren zur Verfügung steht, der zu gegebenem p die Impulsgleichung (1.1) nach u auflöst, so daß das Problem reduziert ist auf die Bestimmung des Drucks: finde ein p so, daß das zugehörige Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei ist. Ein Schätzwert für p wird diese Bedingung im allgemeinen nicht erfüllen und zu einem $\operatorname{div} u \neq 0$ führen, das als Residuum interpretiert werden kann, das mit dem Eingangsfehler in p korrespondiert. Damit betrachten wir Iterationsverfahren für

$$Sp = \operatorname{div} \Delta^{-1} f \tag{1.3}$$

mit dem Schurkomplementoperator $S = \operatorname{div} \Delta^{-1} \operatorname{grad}$, der zu gegebenem p die zugehörige Divergenz berechnet.

Hierzu ist folgendes zu tun: In jedem Iterationsschritt muß Sp ausgewertet werden, um das Residuum zu berechnen, dann muß die eigentliche Iterationsvorschrift aus diesem Residuum den Korrekturvektor bestimmen. Die Hauptaufgabe bei der Berechnung des Residuums ist die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus der Impulsgleichung, also das Lösen von zwei Poissonproblemen. Dies ist eine Standardaufgabe, für die zahlreiche effiziente Verfahren zur Verfügung stehen — als Beispiel seien hier die Public-Domain-Pakete PLTMG [Bank 1994] und MGGHAT [Mitchell 1992] genannt, die Mehrgitterverfahren implementieren und Poissonprobleme mit einem Aufwand proportional zur Zahl der Unbekannten lösen.

Ein klassisches Iterationsverfahren dieser Art ist der Uzawa-Algorithmus, der ein skalares Vielfaches der enstehenden Divergenz selbst als Korrektur verwendet, also $p^{(\mathrm{neu})} := p - \rho \operatorname{div} u$, $\rho \in \mathbb{R}$ setzt, was einer Richardson-Iteration für das Schurkomplementsystem (1.3) entspricht. Von diesem Verfahren sind zahlreiche Varianten gebräuchlich, die etwa das Verfahren der Konjugierten Gradienten auf das System (1.3) anwenden oder die Impulsgleichungen nur näherungsweise lösen, etwa durch einen Schritt eines Mehrgitterverfahrens [Arrow, Hurwicz und Uzawa 1958; Elman 1994].

Die Einschränkung des Schurkomplements auf ein Problem auf dem Gebietsrand geschieht durch eine Umformung er Ausgangsgleichungen: Bildet man auf beiden Seiten der Impulsgleichung (1.1) die Divergenz, erhält man (wobei vorerst Existenz und Vertauschbarkeit der verwendeten Ableitungen unterstellt werden) die Gleichung

$$-\Delta \operatorname{div} u + \Delta p = \operatorname{div} f,$$

die also nach jedem Lösen der Impulsgleichung erfüllt ist. Für das Lösen der Schurkomplementgleichung hat dies zwei Konsequenzen:

- Löst man die Impulsgleichung mit der Lösung p^* der Schurkomplementgleichung, ist also $\operatorname{div} u = 0$, gilt

  $$\Delta p^* = \operatorname{div} f.$$

  Wählt man nun irgendein $p^{(0)}$ mit $\Delta p^{(0)} = \operatorname{div} f$ als Startwert der Iteration, gilt für den Fehler zur Lösung

  $$\Delta(p^{(0)} - p^*) = 0,$$

  der Suchraum für die Korrekturrichtungen läßt sich also auf den Raum der harmonischen Funktionen einschränken.

- Werden andererseits für irgendein p mit $\Delta p = \operatorname{div} f$ die Impulsgleichungen gelöst, gilt $\Delta \operatorname{div} u = 0$: das Residuum und damit die Korrekturrichtung des Uzawa-Verfahrens sind harmonisch, der eingeschränkte Suchraum wird nicht verlassen.

Man kann also während des Iterationsverfahrens stets die Bedingung $\Delta p = \operatorname{div} f$ für die Iterierte und $\Delta \operatorname{div} u = 0$ für das Residuum erfüllen, diese sind dann durch ihre Randwerte eindeutig bestimmt. Diese Beobachtung führt auf die Formulierung der Stokes-Gleichung aus [Kleiser und Schumann 1980]: Bestimme $u : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^2$ und $p : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta u + \operatorname{grad} p &= f \quad \text{in } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = u_\Gamma \\ \Delta p &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ -(\operatorname{div} u)|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

In dieser Formulierung sind die wesentlichen Operationen, die auf dem Inneren des Gebiets auszuführen sind — harmonisches Fortsetzen von Randwerten für p und das Lösen der Impulsgleichung — mit Standard-Poissonlösern zu implementierten, die eigentliche Iteration für die Schurkomplementgleichung findet nur noch auf dem Gebietsrand statt.

Diese Reduktion vom zweidimensionalen Ω auf seinen eindimensionalen Rand $\partial\Omega$ bringt für die diskretisierten Probleme natürlich in der Regel eine enorme Reduktion der Freiheitsgrade mit sich, so daß in vielen Fällen direkte Löser für das Randproblem möglich sind. Wir nutzen noch einen anderen Aspekt davon aus: Der Randoperator ist wesentlich einfacher zu analysieren als das nicht eingeschränkte Schurkomplement, indem man ihn auf (eindimensionale) Ansatzfunktionen auf dem Rand anwendet — also diese harmonisch ins Innere fortsetzt, die Impulsgleichungen löst und die Randwerte der entstehenden Divergenz berechnet. Mit dieser Technik läßt sich der Zusammenhang zwischen dem Fehler der Iterierten und dem daraus resultierenden Residuum verstehen, und mit diesem Wissen lassen sich sehr effiziente Iterationsverfahren angeben.

Im Kapitel 2 betrachten wir zunächst Sattelpunktprobleme und die zugehörigen Schurkomplementgleichungen in einem abstrakten Rahmen, der später mit den entsprechenden — kontinuierlichen oder diskreten — Operatoren ausgefüllt wird. Für die oben angesprochene Einschränkung des Suchraums auf die harmonischen Funktionen zeigt sich, daß sie sich auf nur zwei Bedingungen an die verwendeten Operatoren zurückführen läßt: Eine Vertauschbarkeitsrelation (2.4), unter der der Suchraum auf den Kern eines Hilfsoperators eingeschränkt wird, sowie eine zusätzliche Bedingung (2.6) an diesen Operator, unter der sein Kern invariant unter Anwendung des Schurkomplements ist, die Einhaltung des Suchraums also keine zusätzlichen Kosten verursacht.

Kapitel 3 behandelt den kontinuierlichen Fall. Wir gehen von einer schwachen Formulierung der Stokes-Gleichungen aus und zeigen zunächst die Einschränkung auf harmonische Funktionen. Für den so eingeschränkten Schurkomplementoperator berechnen wir Spektren, zunächst für den Kreis und die Halbebene als Berechnungsgebiete; hierbei stellt sich heraus, daß das Uzawa-Verfahren bei geeignet gewähltem ρ zu einem direkten Löser entartet. Dieses Ergebnis wird erweitert, indem wir konforme Abbildungen des Einheitskreises betrachten und damit Gebiete charakterisieren können, auf denen das Spektrum des Schurkomplements aus einer festen Anzahl isolierter Eigenwerte besteht. Für die Schurkomplementgleichung bedeutet dies, daß mit sehr wenigen Parametern alle Informationen beschrieben werden können, die zum Lösen auf einem solchen Gebiet notwendig sind.

Kapitel 4 untersucht die auf einem regelmäßigen versetzten Gitter diskretisierte Stokes-Gleichung. Die Analyse der Halbebene zeigt, daß man ein analoges Ergebnis wie im kontinuierlichen Fall bekommt, wenn man die Randbedingungen sorgfältig diskretisiert. Dabei wird unter vielen möglichen Bedingungen an die diskreten Randwerte eine ausgezeichnet, die für die Halbebene optimale Ergebnisse liefert. Diese Überlegungen sollten sich auf gerade Randstücke bei polygonal berandeten Gebieten übertragen lassen; numerische Berechnungen zeigen, daß dies für ein quadratisches Gebiet zutrifft: der Einfluß der Ecken beschränkt sich im wesentlichen auf Eigenräume, deren Dimension nur logarithmisch mit der Zahl der Unbekannten insgesamt wächst. Spezielle Eckkorrekturen, wie sie im Unterabschnitt 4.6 entwickelt werden, fangen diese Einflüsse fast ganz auf. Damit sind wieder mit wenigen Parametern — hier einer Koeffizientenmatrix kleiner Dimension — die zum effizienten Lösen der Schurkomplementgleichung relevanten Informationen beschrieben.

In Kapitel 5 wird schließlich gezeigt, daß sich andere Sattelpunktprobleme analog behandeln lassen, speziell wird die Analyse des Randoperators auf die zeitabhängige Stokes-Gleichung sowie die die Formulierung der Stokes-Gleichung mit Stromfunktion und Wirbelstromstärke übertragen.

*

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Christoph Zenger, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken: für die Überlassung des Themas, besonders aber dafür, daß er stets Zeit für mich fand — oft schon zur Stelle, während die neuesten Diagramme noch aus dem Drucker quollen — und durch geduldiges Erklären, zahlreiche Anregungen und — wann immer notwendig — auch durch Ermutigung entscheidend half, die Arbeit voranzutreiben.

2 Sattelpunktprobleme, die Schurkomplementgleichung und Einschränkung des Suchraums

2.1 Sattelpunktprobleme

Wir betrachten zunächst abstrakte Sattelpunktprobleme der Form

$$\begin{array}{lll} Au & +B^*p & = f_u \\ Bu & & = f_p, \end{array} \tag{2.1}$$

[Hackbusch 1986, Kap. 12]. Hierbei sind:

- $u \in V$, $p \in W$ mit Hilberträumen V und W; deren Dualräume werden wie üblich mit V' und W' bezeichnet,
- $A : V \to V'$ ein linearer stetiger elliptischer (aber nicht notwendigerweise selbstadjungierter) Operator,
- $B : V \to W'$ linear und stetig mit adjungiertem Operator $B^* : W \to V'$,
- $f_u \in V'$ und $f_p \in W'$.

Im Fall der Stokes-Gleichung entsprechen also $A = -\Delta$, $B = -\operatorname{div}$ und $B^* = \operatorname{grad}$ — jeweils entweder kontinuierlich (vgl. Kapitel 3) oder diskret (vgl. Kapitel 4).

Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden immer W mit seinem Dualraum W' mittels des Riesz-Isomorphismus identifiziert.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & V' \\ W' \arrow[r, equal] & W \arrow[u, "B^*"'] \end{tikzcd}$$

Abbildung 1: Verwendete Räume und Operatoren

Man kann das Sattelpunktproblem (2.1) als Minimierungsproblem für u interpretieren, bei dem das durch A definierte Energiefunktional unter der Nebenbedingung $Bu = f_p$ minimiert wird. Dabei spielt p die Rolle eines Lagrange-Multiplikators, mit dem die Nebenbedingung an die Minimumsbedingung (Bestimme $u \in V$ mit $Bu = f_p$ so, daß für alle $v \in \ker B$ gilt $(Au - f_u)(v) = 0$) angekoppelt wird.

2.2 Schurkomplementgleichung

Da im System (2.1) A invertierbar ist, kann man, falls der Lagrange-Multiplikator p bekannt ist, daraus u als $A^{-1}(f_u - B^*p)$ berechnen. Setzt man dies in die zweite Gleichung $Bu = f_p$ ein, erhält man

$$BA^{-1}(f_u - B^*p) = f_p$$

oder, mit dem Schurkomplementoperator

$$S : BA^{-1}B^*$$

und der rechten Seite

$$f_S := BA^{-1}f_u - f_p$$

die Schurkomplementgleichung

$$Sp = f_S, \tag{2.2}$$

aus der u ganz eliminiert ist.

Die Gleichung (2.2) ist eindeutig lösbar, wenn — zusätzlich zur Elliptiztät von A — die Babuška-Brezzi-Bedingung

$$\inf_{p \in W \setminus \{0\}} \sup_{u \in V \setminus \{0\}} \frac{|(B^*p)(u)|}{\|p\|_W \|u\|_V} \geq \beta > 0 \tag{2.3}$$

erfüllt ist. Dann läßt sich das System (2.1) lösen, indem man p aus (2.2) berechnet und anschließend u durch „Rückwärtssubstitution“ $u = A^{-1}(f_u - B^*p)$ gewinnt.

Das Uzawa-Verfahren [Arrow et al. 1958; Langer und Queck 1987] und davon abgeleitete Verfahren sind iterative Verfahren, speziell eine Richardson-Iteration, mit denen (2.2) gelöst wird, das heißt, eine konvergente Folge von Iterierten

$$p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots \to p^*$$

mit $Sp^* = f_S$ gebildet wird. Der Fehler der Folgenglieder wird mit

$$e^{(i)} := p^{(i)} - p^*,$$

das zugehörige Residuum mit

$$r^{(i)} := Se^{(i)} = Sp^{(i)} - f_S$$

bezeichnet. Im Gegensatz zum Fehler ist das Residuum „leicht“, nämlich durch Anwenden von S zu berechnen, und die Iterationsvorschrift gibt an, wie aus dem Residuum die Korrektur und damit die nächste Iterierte zu bilden ist:

$$p^{(i+1)} = p^{(i)} - Nr^{(i)}$$

mit einem stetigen Operator $N : W \to W$, der den eine möglichst gute Approximation der Umkehrabbildung von S sein soll: wäre $NS = I$, würde gelten

$$e^{(1)} = p^{(1)} - p^* = p^{(0)} - N(Sp^{(0)} - Sp) - p^* = 0,$$

das Verfahren würde im ersten Schritt konvergieren.

Da die Anwendung von N andererseits nicht zu aufwendig sein darf, gilt in der Regel für die Iterationsmatrix

$$M := I - NS$$

nur $M \approx 0$, genauer: die Operatornorm von M soll möglichst klein sein. Denn es gilt wegen

$$e^{(i+1)} = Me^{(i)}$$

die Abschätzung

$$\|e^{(i)}\| \leq \|M\|^i \|e^{(0)}\|,$$

so daß $\|M\|$ als Maß der garantierten Fehlerreduktion interpretiert werden kann.

Für die Richardson-Iteration bzw. das Uzawa-Verfahren wählt man

$$N := \rho I$$

mit passendem $\rho \in \mathbb{R}$. Damit gilt für die Iterationsmatrix $M = I - \rho S$, speziell gilt folgender Zusammenhang zwischen den Spektralwerten $\sigma(M)$ von M und denen von S

$$\sigma(M) = \{1 - \rho\lambda : \lambda \in \sigma(S)\},$$

Eigenvektoren des Schurkomplementoperators S sind auch Eigenvektoren von M. Wir werden im folgenden öfter Eigenräume von S bestimmen, dies läßt sich immer dadurch für ein Iterationsverfahren von diesem Typ ausnutzen, daß alle Komponenten des Fehlers aus einem solchen Eigenraum sich durch einen Uzawa-Schritt mit $\rho = \lambda^{-1}$ eliminieren lassen.

2.3 Einschränkung des Suchraums

Zum effizienten Lösen der Schurkomplementgleichung (2.2) soll der Suchraum für p, der zunächst ganz W ist, eingeschränkt werden durch zusätzliche, aus dem Ausgangssystem (2.1) hergeleitete Bedingungen. Im Fall der Stokes-Gleichung etwa wird sich $\Delta p = 0$, also die Einschränkung des Suchraums auf harmonische Funktionen als geeignete Bedingung erweisen.

Formal beschrieben wird dies durch einen weiteren Hilbertraum X und stetige lineare Abbildungen

$$\tilde{A} : W \to X, \quad \tilde{B} : V' \to X,$$

die vorerst lediglich die Vertauschbarkeitsrelation

$$\boxed{\tilde{A}B = \tilde{B}A} \tag{2.4}$$

erfüllen sollen. Im Fall der Stokes-Gleichung wird später für $\tilde{A}$ ein Laplaceoperator und für $\tilde{B}$ ein Divergenzoperator gewählt, wodurch — wie sich sowohl für den kontinuierlichen wie auch für den diskreten Fall zeigen läßt — diese Bedingung erfüllt wird.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"'] & V' \arrow[d, "\tilde{B}"] \\ W \arrow[r, "\tilde{A}"'] & X \end{tikzcd}$$

Abbildung 2: Zusätzliche Operatoren zur Einschränkung des Suchraums

Nun läßt sich aus (2.1) wiederum u eliminieren (durch Anwenden von $\tilde{B}$ auf die erste und von $\tilde{A}$ auf die zweite Gleichung):

$$\begin{array}{lll} \tilde{B}Au & +\tilde{B}B^*p & = \tilde{B}f_u \\ \tilde{A}Bu & & = \tilde{A}f_p, \end{array}$$

woraus wegen der Vertauschbarkeit (2.4) durch Subtraktion folgt

$$\tilde{B}B^*p = \tilde{B}f_u - \tilde{A}f_p,$$

was mit $\tilde{B} = \tilde{A}BA^{-1}$ die Hilfsgleichung für p

$$\tilde{B}B^*p = \tilde{A}f_S \tag{2.5}$$

ergibt.

Für ein Iterationsverfahren für (2.2) heißt das folgendes: Startet man die Iteration mit irgendeinem $p^{(0)} \in W$, das $\tilde{B}B^*p^{(0)} = \tilde{A}f_S$ erfüllt, gilt für den Fehler zur wahren Lösung p^*

$$\tilde{B}B^*(p^{(0)} - p^*) = 0,$$

der Suchraum ist also auf den Kern von $\tilde{B}B^*$ eingeschränkt worden.

Zwei extreme Möglichkeiten, $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ zu wählen, bestehen unabhängig von dem betrachteten Problem:

- $\tilde{A} := 0$ und $\tilde{B} := 0$. Hierdurch ist der Kern von $\tilde{B}B^*$ ganz W, so daß keine zusätzliche Information gewonnen wird;
- $\tilde{A} := I$ und $\tilde{B} := BA^{-1}$. Jetzt ist $\tilde{B}B^* = S$, so daß das Einhalten des Suchraums gleichbedeutend mit dem Lösen der Schurkomplementgleichung ist, also auch kein neues Verfahren entsteht.

Für die Stokes-Gleichung wird sich mit $\tilde{B} = \operatorname{div}$ und $B^* = \operatorname{grad}$ ein Laplaceoperator $\tilde{B}B^*$ ergeben, was zur Einschränkung auf harmonische Funktionen führt.

Falls $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ so gewählt werden können, daß zusätzlich zu (2.4) auch

$$\boxed{\tilde{A} = \tilde{B}B^*} \tag{2.6}$$

gilt (was im Fall der Stokes-Gleichung wegen $\Delta = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}$ gelingt), folgt

$$\tilde{A}S = \tilde{A}BA^{-1}B^* = \tilde{B}AA^{-1}B^* = \tilde{B}B^* = \tilde{A}. \tag{2.7}$$

Für iterative Verfahren vom Uzawa-Typ, die eine Startlösung $p^{(0)}$ in Richtung des Residuums $Sp^{(0)} - f_S$ verbessern, bedeutet dies, daß der eingeschränkte Suchraum nicht verlassen wird, dazu ist in diesem Fall die Bedingung $\tilde{B}B^*p^{(0)} = \tilde{A}f_S$ an den Startwert $p^{(0)}$ mit der Wahl $p^{(0)} := f_S$ trivial zu erfüllen. Diese Verfahren arbeiten also — bei geeignet gewähltem Startwert — automatisch auf dem eingeschränkten Suchraum, der mithin für die Analyse dieser Verfahren entscheidend ist.

Falls zusätzlich zu (2.4) und (2.6) A selbstadjungiert ist, ist auch S selbstadjungiert, und aus (2.7) folgt

$$S\tilde{A}^* = \tilde{A}^*,$$

d.h. jedes $p \in \operatorname{Im} \tilde{A}^*$ ist Eigenvektor von S zum Eigenwert 1.

Zerlegt man also den ursprünglichen Suchraum W in die orthogonale Summe

$$W = \ker \tilde{A} \oplus \overline{\operatorname{Im} \tilde{A}^*},$$

so ist zur Konstruktion von Iterationsverfahren für die Schurkomplementgleichung aus zwei Gründen nur der Unterraum $\ker \tilde{A}$ interessant: zum einen kann man erreichen, daß der Iterationsfehler stets in $\ker \tilde{A}$ liegt, zum anderen ist sein orthogonales Komplement Fixpunktmenge von S, er kann also durch einen Schritt einer Richardson-Iteration mit $\rho = 1$ eliminiert werden.

3 Der kontinuierliche Operator

3.1 Variationsformulierung der Stokes-Gleichung

Wir betrachten zunächst die kontinuierliche Stokes-Gleichung in einer Variationsformulierung, siehe z.B. [Temam 1984], [Girault und Raviart 1986] oder [Hackbusch 1986]. Dazu bezeichnet wie üblich L_2 den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_\Omega uv\, dx, \quad u, v \in L_2$$

und der Norm $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$. Weiter ist C_0^∞ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω und H_0^k der Abschluß von C_0^∞ in der k-Norm $\|u\|_k = \sqrt{(u, u)_k}$ mit

$$(u, v)_k := \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \le k} \left(\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}, \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right), \quad u, v \in C_0^\infty.$$

Mit der Fortsetzung dieses Skalarprodukts ist H_0^k Hilbertraum; es gilt $L_2 = H_0^0$. Der Dualraum des H_0^k wird mit $H^{-k} := (H_0^k)'$ bezeichnet.

Zur Notation der vektorwertigen Funktionen, also des Geschwindigkeitsfeldes, werden kartesische Produkte der obigen Räume verwendet: $\mathbb{H}_0^k := H_0^k \times H_0^k$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_k := \sum_{i=1}^{2} (u_i, v_i)_k, \quad u = (u_1, u_2)^T, v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{H}_0^k.$$

Wieder ist $\mathbb{H}_0^k$ die Vervollständigung von $\mathbb{C}_0^\infty := C_0^\infty \times C_0^\infty$ in der k-Norm und $\mathbb{L}_2 := \mathbb{H}_0^0$, der Dualraum des $\mathbb{H}_0^k$ wird mit $\mathbb{H}^{-k}$ bezeichnet. Auf den Produkträumen sind Δ und **grad** der komponentenweise angewendete Laplace-Operator bzw. Gradient.

Der Druck wird gesucht in $W := L_2$; als Raum V für das Geschwindigkeitsfeld wird der $\mathbb{H}_0^1$ gewählt,

Die schwache Form des (negativen) Laplace-Operators A lautet

$$A : V \to V', \quad (Au)(v) := (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}\, v) \text{ für } u, v \in V,$$

A ist ein selbstadjungierter, stetiger und elliptischer Operator und erfüllt wegen der Greenschen Formel

$$(Au, f) = (-\Delta u, f) \quad \forall f \in \mathbb{L}_2$$

für $u \in \mathbb{C}_0^\infty$

Die (negative) Divergenz B wird kanonisch erklärt:

$$B : V \to W, \quad Bu := -\operatorname{div} u,$$

sie ist definiert, weil eine H_0^1-Funktion definitionsgemäß erste Ableitungen in L_2 hat, linear und stetig, weil nach der Definition der Normen $\|Bu\|_{L_2} \leq \|u\|_{\mathbb{H}_0^1}$ gilt.

Als adjungierter Operator ergibt sich

$$B^* : W \to V', \quad (B^*p)(v) := (p, -\operatorname{div} v) \text{ für } p \in W,\ v \in V,$$

für $p \in C_0^\infty$ gilt $B^*p \in \mathbb{L}_2$ und

$$(B^*p, v) = (\operatorname{grad} p, v) \quad \forall v \in \mathbb{H}_0^1.$$

In dieser Form erfüllt B die Babuška-Brezzi-Bedingung (2.3) offensichtlich noch nicht, da der Gradient eines konstanten Drucks $p \equiv c \in \mathbb{R}$ verschwindet. Dies spiegelt die Tatsache wieder, daß die Stokes-Gleichung den Druck nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Man löst dieses Problem darurch, daß man W nach dem eindimensionalen Unterraum der konstanten Funktionen faktorisiert, indem man es durch

$$W_0 := W / \ker B := \{p \in L_2 : \int_\Omega p\ dx = 0\}$$

ersetzt. Wegem $\operatorname{Im} S \subset \operatorname{Im} B^* \subset (\ker B)^\perp$ kann man S ohne weiteres als Abbildung $W_0 \to W_0$ auffassen. Dann läßt sich für hinreichend glatt berandetes Ω zeigen, daß mit den so gewählten Operatoren das Sattelpunktproblem (2.1) eine eindeutige Lösung besitzt [Nečas 1965].

3.2 Einschränkung auf harmonische Funktionen

Um den Suchraum für p vom L_2 auf die harmonischen Funktionen einzuschränken, brauchen wir einen Laplaceoperator $\tilde{A}$ auf dem L_2 und einen Divergenzoperator $\tilde{B}$ auf dem $\mathbb{H}^{-1}$. Als Zielraum X wird daher der H^{-2}, also der Dualraum des H_0^2, gewählt, so daß für $\tilde{A}$ der Laplaceoperator auf dem L_2 wie folgt definiert werden kann:

$$\tilde{A} : W \to X, \quad (\tilde{A}p)(q) := (p, \Delta q) \text{ für } p \in W,\ q \in H_0^2,$$

$\tilde{A}$ ist linear und stetig wegen $(p, \Delta q) \leq \|p\|_{L_2} \|\Delta q\|_{L_2} \leq \|p\|_{L_2} \|q\|_{H_0^2}$; für $p \in C^\infty$ gilt mit der zweiten Greenschen Formel

$$(\tilde{A}p, q) = (\Delta p, q) \text{ für } q \in H_0^2.$$

Entsprechend wird die Divergenz auf $\mathbb{H}^{-1}$ erklärt durch

$$\tilde{B} : V' \to X, \quad (\tilde{B}\phi)(q) := -\phi(\operatorname{grad} q) \text{ für } \phi \in \mathbb{H}^{-1},\ q \in H_0^2,$$

sie ist definiert, weil $\operatorname{grad} q \in \mathbb{H}_0^1$ für $q \in H_0^2$ ist, die Stetigkeit folgt aus

$$|\phi(\operatorname{grad} q)| \leq \|\phi\|_{\mathbb{H}^{-1}} \|\operatorname{grad} q\|_{\mathbb{H}_0^1} \leq \|\phi\|_{\mathbb{H}^{-1}} \|q\|_{H_0^2}.$$

Lemma 3.1 *Für die so definierten Operatoren A, B, $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ sind die Vertauschungsrelation (2.4) und die Bedingung (2.6) erfüllt.*

Beweis: Wir betrachten zunächst $u \in \mathbb{C}_0^\infty$ und $q \in H_0^2$:

$$\begin{aligned}(\tilde{A}Bu)(q) &= (Bu, \Delta q)\\ &= (-\operatorname{div} u, \Delta q)\\ &= (-\Delta \operatorname{div} u, q),\end{aligned}$$

andererseits

$$\begin{aligned}(\tilde{B}Au)(q) &= (Au)(\operatorname{grad} q)\\ &= (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{grad}(\operatorname{grad} q))\\ &= (-\Delta u, \operatorname{grad} q)\\ &= (-\operatorname{div} \Delta u, q).\end{aligned}$$

Da wegen $u \in \mathbb{C}_0^\infty$ $\Delta \operatorname{div} u = \operatorname{div} \Delta u$ ist und $\mathbb{C}_0^\infty$ dicht in $\mathbb{H}_0^1$ liegt, gilt $\tilde{A}B = \tilde{B}A$.

Die Bedingung $\tilde{A} = \tilde{B}B^*$ ist erfüllt, weil für alle $p \in L_2$ und $q \in H_0^2$ gilt:

$$\begin{aligned}(\tilde{B}B^*p)(q) &= (B^*p)(\operatorname{grad} q)\\ &= (p, \operatorname{div} \operatorname{grad} q)\\ &= (\tilde{A}p)(q).\end{aligned}$$

$\square$

Dadurch ist gezeigt, daß der Suchraum für den Druck in der Stokes-Gleichung eingeschränkt werden kann auf den Kern von $\tilde{A}$, also auf die (im Distributionensinn) harmonischen Funktionen.

Im folgenden wird für verschiedene Gebiete Ω der Schurkomplementoperator S analysiert. Dazu werden Randwerte für p vorgegeben, diese ins Innere harmonisch fortgesetzt, die Impulsgleichung gelöst und die zugehörige Divergenz berechnet — beziehungsweise deren Randwerte, da die Divergenz selbst harmonisch ist. Als Ansatzfunktion werden Fouriermoden auf dem Rand verwendet, also der Schurkomplementoperator im Fourierraum der Randfunktionen betrachtet.

3.3 Harmonische Funktionen auf dem Einheitskreis

Sei nun Ω der Einheitskreis $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Um S auf $\ker(\tilde{A})$ zu untersuchen, führen wir Polarkoordinaten

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi$$

ein und betrachten die Fouriermoden $r^l\cos(k\varphi)$ und $r^l\sin(k\varphi)$, $l, k \in \mathbb{N}$, zusammengefaßt als Real- und Imaginärteil von $r^l e^{ik\varphi}$.

Für die verwendeten Differentialoperatoren ergibt sich mittels der Additionstheoreme folgendes:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(r^k e^{ik\varphi}\right) = \left(\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(r^k e^{ik\varphi}\right) = kr^{k-1}e^{i(k-1)\varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(r^k e^{ik\varphi}\right) = \left(\sin\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(r^k e^{ik\varphi}\right) = ikr^{k-1}e^{i(k-1)\varphi},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(r^l e^{ik\varphi}\right) = (l-k)r^{l-1}e^{i(k+1)\varphi},$$

$$\Delta\left(r^l e^{ik\varphi}\right) = (l+k)(l-k)r^{l-2}e^{ik\varphi}$$

insbesondere ist $r^l e^{ik\varphi}$ genau für $l = k$ harmonisch, also hier für die Analyse des Schurkomplementoperators von Interesse.

Lemma 3.2 *Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist*

$$p(r,\varphi) = r^k e^{ik\varphi}$$

Eigenfunktion des Schurkomplementoperators S zum Eigenwert $1/2$.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$ und p wie oben. Lösen der Impulsgleichung $-\Delta u + \operatorname{grad} p = 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ ergibt

$$u_1(r,\varphi) = \frac{1}{4}(r^{k+1} - r^{k-1})e^{i(k-1)\varphi} \ \text{ mit } \Delta u_1 = \frac{\partial p}{\partial x_1},\ u_1(1,\phi) = 0 \ \text{ und}$$

$$u_2(r,\varphi) = i\cdot u_1(r,\varphi) \ \text{ mit } \Delta u_2 = \frac{\partial p}{\partial x_2},\ u_2(1,\phi) = 0,$$

mithin ergibt sich für $Sp = \operatorname{div} u$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_1 = \frac{1}{2}p(r,\varphi).$$

□

Mit einem Dichtheitsargument läßt sich nun zeigen, daß das Spektrum des Schurkomplementoperators tatsächlich nur aus drei Werten besteht [Gaultier und Lezaun 1992]:

- 0 mit der konstanten Funktion als Eigenfunktion,
- 1/2 mit den harmonischen Funktionen mit Integralmittel 0 als Eigenraum und
- 1 mit dem orthogonalen Komplement der harmonischen Funktionen als Eigenraum.

Für das Lösen der Schurkomplementgleichung mit dem Uzawa-Verfahren

$$p^{(\mathrm{neu})} := p^{(\mathrm{alt})} - \rho \cdot S p^{(\mathrm{alt})}, \quad \rho \in \mathbb{R}$$

mit dem Iterationsoperator

$$M := I - \rho \cdot S$$

läßt sich damit das Konvergenzverhalten einfach beschreiben. Die konstante Fehlermode kann dabei unberücksichtigt bleiben, da p nur bis auf eine Konstante bestimmt ist, es sind daher nur Fehlermoden aus den Eigenräumen von S zu den Eigenwerten $1/2$ und 1 von Interesse.

- Im Fall $\rho = 1$, also dem ungedämpften Verfahren, werden die Fehlermoden zum Eigenwert 1 Eigenfunktionen zum Eigenwert 0 von M, sie werden im ersten Iterationsschritt eliminiert. Der Fehler ist nach diesem ersten Schritt harmonisch.

  Die harmonischen Fehlermoden sind Eigenfunktionen von M zum Eigenwert $1/2$: die harmonische Fehlerkomponente wird in jedem Schritt halbiert. Die asymptotische Konvergenzrate, die sich bereits im zweiten Iterationsschritt einstellt, beträgt daher $1/2$.

- Mit $\rho = 4/3$ sind die Fehlermoden Eigenfunktionen von M zum Eigenwert $-1/3$ bzw. $1/3$. Diese Wahl von ρ mit der asymptotischen Konvergenzrate $1/3$ ist optimal unter der Voraussetzung, daß der Ausgangsfehler sowohl harmonische Komponenten als auch solche aus den orthogonalen Komplement enthält.

- Mit $\rho = 2$ sind die harmonischen Fehlermoden Eigenfunktionen von M zum Eigenwert 0, sie werden hier im ersten Schritt eliminiert. Die Fehlermoden aus dem orthogonalen Komplement gehören nun zum Eigenwert -1 von M, sie werden also gar nicht gedämpft, sondern oszillieren. Falls aber der Startwert so gewählt wird, daß der Ausgangsfehler harmonisch ist, — was ohne Einschränkung möglich ist, — treten diese Fehlermoden gar nicht auf, in diesem Fall konvergiert das Verfahren im ersten Schritt.

- Auch ohne Voraussetzung an den Fehler der Startlösung läßt sich ein Verfahren konstruieren, das in endlich vielen — in diesem Fall sind es sogar nur zwei — Schritten die exakte Lösung berechnet. Dazu sind einfach je ein Uzawa-Schritt mit $\rho = 1$ und mit $\rho = 2$ auszuführen — durch ersteren werden die Fehlermoden aus dem orthogonalen Komplement eliminiert, durch letzteren die harmonischen Fehlermoden.

  Dies ist der einfachste Fall des Übergangs vom Uzawa-Verfahren zu einer Produktiteration [Hackbusch 1991, Kap. 7], mit dem sich für den Fall, daß das Spektrum von S aus endlich vielen Punkten besteht, direkte Löser konstruieren lassen, indem soviele Uzawa-Schritte mit entsprechendem Parameter ρ hintereinandergeschaltet werden, wie das Spektrum Punkte enthält.

3.4 Harmonische Funktionen auf der Halbebene

Noch einfacher sind die entsprechenden Rechnungen für die Halbebene

$$\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

Sie lassen sich auch, wie im Kapitel 4.3 gezeigt wird, leicht auf den diskreten Fall übertragen, weshalb sie hier aufgeführt werden, obwohl die Voraussetzung an die Beschränktheit von Ω natürlich verletzt ist.

Wir betrachten in x_2-Richtung 2π-periodische Lösungen, die auf ganz Ω beschränkt sind. Für eine Randmode e^{ikx_2}, $k \in \mathbb{N}$ ergibt dann das harmonische Fortsetzen

$$p(x_1, x_2) := e^{-kx_1} \cdot e^{ikx_2},$$

die Ableitungen (die hier nur wegen der Ähnlichkeit zu den entsprechenden Ausdrücken in Kapitel 4.3 abgedruckt sind) lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= -ke^{-kx_1} \cdot e^{ikx_2}, \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= i\frac{\partial p}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Dann erfüllt $u = (u_1, u_2)^T$ mit

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} x_1 e^{-kx_1} \cdot e^{ikx_2}, \\ u_2(x_1, x_2) &= -i \cdot u_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

die Impulsgleichung $-\Delta u + \operatorname{grad} p = 0$ mit den Randbedingungen $u(0, x_2) = 0$, $\lim_{x_1 \to \infty} u(x_1, x_2) = 0$.

Als Divergenz ergibt sich wieder wie im Fall des Kreises

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2} p$$

unabhängig von k.

3.5 Konforme Abbildungen

Die für den Kreis und die Halbebene beobachtete Beziehung $S = \frac{1}{2} I$ für den auf die harmonischen Funktionen eingeschränkten Schurkomplementoperator der Stokes-Gleichung gilt für beliebige Gebiete im allgemeinen nicht; ein Gegenbeispiel ist etwa die Strömung in einem Streifen $[0, 1] \times \mathbb{R}$ [Maday, Meiron, Patera und Rønquist 1993; Goubet 1994]. Darüber hinausgehende Gegenbeispiele erhält man, indem man Gebiete betrachtet, die durch einfache konforme Abbildungen aus dem Einheitskreis hervorgehen.

Die Notation in diesem Abschnitt folgt Kratz und Peyerimhoff [1990]: Wir betrachten Ω als Teilmenge der komplexen Zahlenebene und setzen $z = x_1 + i \cdot x_2$. Im Gegensatz zu den vorherigen Abschnitten wird das Geschwindigkeitsfeld u hier durch *eine* komplexe Variable

$$u = u_1 + i \cdot u_2$$

beschrieben.

Die für die Stokes-Gleichung benötigten Differentialoperatoren werden ausgedrückt durch die komplexen Differentiale [vgl. z.B. Rudin 1987]

$$\begin{aligned} \partial_z u &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}} u &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \end{aligned}$$

Definition 3.1 *Für ein reellwertiges $p : \Omega \to \mathbb{R}$ ist der Gradient erklärt als*

$$\operatorname{grad} p := \frac{\partial p}{\partial x_1} + i \frac{\partial p}{\partial x_2} = 2\partial_{\bar{z}} p$$

und für ein „vektorwertiges" $u : \Omega \to \mathbb{C}$ die Divergenz

$$\operatorname{div} u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 2\operatorname{Re}(\partial_z u),$$

und der (komponentenweise) Laplace-Operator

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 4\partial_{\bar{z}}\partial_z u = 4\partial_z\partial_{\bar{z}} u.$$

Zur Lösung der homogenen Stokes-Gleichung werden also in dieser Notation $p : \Omega \to \mathbb{R}$ und $u : \Omega \to \mathbb{C}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{grad} p, \\ \operatorname{div} u &= 0. \end{aligned}$$

Lemma 3.3 (Rechenregeln) *Sei $u : \Omega \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.*

$$\partial_z u = \overline{\partial_{\bar z} \overline{u}},$$

es gelten die gewöhnlichen Regeln für Summen und Produkte:

$$\begin{aligned} \partial_z(c_1 \cdot u_1 + c_2 \cdot u_2) &= c_1 \cdot \partial_z u_1 + c_2 \cdot \partial_z u_2, \\ \partial_z(u_1 \cdot u_2) &= \partial_z u_1 \cdot u_2 + u_1 \cdot \partial_z u_2. \end{aligned}$$

Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt holomorph in Ω, falls $\partial_{\bar z} f \equiv 0$, also genau dann, wenn $\partial_z \overline{f} \equiv 0$, dann ist $f' := \partial_z f$ und es gilt:

Lemma 3.4 (Kettenregel) *Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und $u : f(\Omega) \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann ist*

$$\partial_z(u(f(z)) = f'(z) \cdot (\partial_z u)(f(z)).$$

Für einfach zusammenhängende Gebiete lassen sich harmonische Funktionen durch holomorphe Funktionen ausdrücken:

Lemma 3.5 (Lösungen der Laplace-Gleichung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $u : \Omega \to \mathbb{C}$ harmonisch, d.h. $u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u \equiv 0$ in Ω Dann ist*

$$u = f_1 + \overline{f_2}$$

mit holomorphen f_1 und f_2.

Hieraus gewinnt man leicht eine entsprechende Darstellung für die Lösungen der Impulsgleichung [Kratz und Peyerimhoff 1990]:

Lemma 3.6 (Lösungen der Impulsgleichung) *Sei Ω einfach zusammenhängend, $p = 2\,\mathrm{Re}\, f$, f auf Ω holomorph.*
Dann gilt für alle u mit $\Delta u = \mathrm{grad}\, p$:

$$u = \frac{1}{2} z \overline{f} + v_1 + \overline{v_2}$$

mit holomorphen v_1 und v_2; weiter gilt:

$$\mathrm{div}\, u = \mathrm{Re}\, f + 2\,\mathrm{Re}\, v_1'.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta(\frac{1}{2} z \overline{f}) &= 2\partial_{\bar z}\partial_z(z\overline{f}) = 2\partial_{\bar z}\overline{f} = 2\partial_{\bar z}(f + \overline{f}) = 4\partial_{\bar z}(\mathrm{Re}\, f) \\ &= \mathrm{grad}\, p. \end{aligned}$$

Also löst $\frac{1}{2}z\overline{f}$ die Impulsgleichung; alle Lösungen erhält man durch „Variation der Konstanten", d.h. Addition einer harmonischen Funktion, darstellbar als $v_1 + \overline{v_2}$ mit holomorphen v_1 und v_2. □

Lemma 3.6 läßt sich auf den Fall von Gebietstransformationen durch konforme Abbildungen übertragen. Dadurch läßt sich der Schurkomplementoperator auf dem transformierten Gebiet studieren, indem man den entsprechenden Operator auf dem Ausgangsgebiet — im folgenden der Einheitskreis D — untersucht.

Lemma 3.7 (Transformierte Impulsgleichung) *Sei g konforme Abbildung $D \to \Omega$, $p = 2\,\mathrm{Re}\, f$, f auf D holomorph.*
Dann gilt für alle $u : D \to \mathbb{C}$, deren Transformierte $u \circ g^{-1}$ auf Ω die Impulsgleichung erfüllt, d.h. $\Delta(u \circ g^{-1}) = \mathrm{grad}(p \circ g^{-1})$:

$$u = \frac{1}{2} g\overline{f} + v_1 + \overline{v_2} \tag{3.1}$$

mit holomorphen v_1 und v_2; weiter gilt

$$\mathrm{div}(u \circ g^{-1}) \circ g = \mathrm{Re}\, f + 2\,\mathrm{Re}\,\frac{v_1'}{g'}.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich direkt durch Anwenden von Lemma 3.6 auf

$$\hat{f} : \Omega \to \mathbb{C}, \quad \hat{f} = f \circ g^{-1}$$

unter Ausnutzung der Tatsache, daß die Hintereinanderausführung holomorpher Funktionen holomorph ist. □

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich das Spektrum des Schurkomplementoperators für harmonische Funktionen auf transformierten Gebieten untersuchen:

Satz 3.1 *Sei*

$$g(z) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m z^m$$

bijektive konforme Abbildung $D \to \Omega$ mit $g' \neq 0$ auf $\overline{D}$,

$$\frac{1}{g'(z)} = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l z^l.$$

Dann gilt für den Schurkomplementoperator S der Stokes-Gleichung

- *für $f(z) = z^n$ mit $n \geq M$ sind $p_R := 2\,\mathrm{Re}\, f$ und $p_I := 2\,\mathrm{Im}\, f$ Eigenfunktionen zum Eigenwert $1/2$;*
- *für*

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{M-1} \gamma_n z^n}{g'(z)} \tag{3.2}$$

führt $p_R := 2\operatorname{Re} f$ *zu einer Divergenz*

$$Sp_R = \frac{1}{2}p_R + \frac{\sum_{k=0}^{M-1} \nu_k z^k}{g'(z)},$$

und $p_I := 2\operatorname{Im} f$ *zu*

$$Sp_I = \frac{1}{2}p_I - \frac{\sum_{k=0}^{M-1} \nu_k z^k}{g'(z)},$$

wobei die konjugiert lineare Abbildung $(\gamma_l)_{l=0\ldots M-1} \mapsto (\nu_k)_{k=0\ldots M-1}$

$$\nu_k = \sum_{l=0}^{M-1} s_{k,l}\overline{\gamma_l}$$

durch die Koeffizienten

$$s_{k,l} = \begin{cases} -\frac{k+1}{2}\sum_{m=k+1+l}^{M} \alpha_m \overline{\beta_{m-k-1-l}} & \textit{für } k+1+l \leq 0, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \tag{3.3}$$

beschrieben wird.

Beweis: Sei zunächst $f(z) = z^n$ mit $n \geq M$. Dann erfüllen $p_R = 2\operatorname{Re} f$ und

$$u_0 := \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M} \alpha_m z^m \overline{z}^n$$

mit Lemma 3.7 die transformierte Impulsgleichung (ohne Randbedingung); es bleibt also noch eine harmonische Funktion v so zu bestimmen, daß $u_0 + v$ die homogene Dirichlet-Randbedingung für ∂D erfüllt.

Auf ∂D ist $|z|^2 = z\overline{z} = 1$, also $z^m\overline{z}^n|_{\partial D} = z^m\overline{z}^m\overline{z}^{n-m}|_{\partial D} = \overline{z}^{n-m}|_{\partial D}$ und für $n \geq m$ ist $\overline{z}^{n-m}$ harmonisch in D.

Daher erfüllt

$$u(z) := \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M} \alpha_m z^m \overline{z}^n - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M} \alpha_m \overline{z}^{n-m}$$

die Impulsgleichungen mit Randbedingung, man kann in der Darstellung (3.1) $v_1 = 0$ wählen, also ist $\operatorname{div} u = \operatorname{Re} f = \frac{1}{2}p_R$.

Für $p_I = 2\operatorname{Im} z^n$ mit $n \geq M$ ergibt dieselbe Rechnung mit $f(z) = -iz^n$ eine Divergenz $\operatorname{div} u = \operatorname{Re} f = \operatorname{Re}(-iz^n) = \operatorname{Im} z^n = \frac{1}{2}p_I$.

Sei nun f wie in (3.2), $p_R := 2\operatorname{Re} f$. Analog zum ersten Fall konstruieren wir zunächst eine spezielle Lösung

$$
\begin{aligned}
u_0(z) &= \frac{1}{2} g(z)\overline{f(z)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{M} \alpha_m z^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} \overline{\beta_{n-l}\cdot\gamma_l \overline{z}^n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{M}\left[\sum_{\substack{m-n=k\\ 0\le m\le M\\ 0\le n}} \alpha_m \left(\sum_{l=0}^{n}\overline{\beta_{n-l}\cdot\gamma_l}\right) z^m \overline{z}^n\right]
\end{aligned}
$$

und addieren, damit die Randbedingung erfüllt wird, harmonische Funktionen; eine holomorphe, also mit Entwicklung in z:

$$
v_1 = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M}\left[\sum_{m-n=k} \alpha_m \left(\sum_{l=0}^{n}\overline{\beta_{n-l}\cdot\gamma_l}\right)\right] z^k,
$$

und eine konjugiert holomorphe, also mit Entwicklung in $\overline{z}$:

$$
\overline{v_2} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n-m=k} \alpha_m \left(\sum_{l=0}^{n}\overline{\beta_{n-l}\cdot\gamma_l}\right)\right] \overline{z}^k,
$$

wodurch $u_0 + v_1 + v_2$ die Impulsgleichung mit Randbedingung erfüllt.

In die Divergenz geht $\overline{v_2}$ nicht ein; v_1' wird entwickelt als

$$
v_1' = \sum_{k=0}^{M-1} \nu_k z^k
$$

mit

$$
\nu_k = -\frac{k+1}{2}\sum_{m-n=k+1} \alpha_m \left(\sum_{l=0}^{n}\overline{\beta_{n-l}\cdot\gamma_l}\right)
$$

für $k = 0 \ldots M-1$ und ergibt die Koeffizienten aus (3.3).

Schließlich ergibt sich die Behauptung für $p_I = 2\,\mathrm{Im}\, f$ mit f aus (3.2) wegen $\mathrm{Im}\, f = -\mathrm{Re}(if)$ durch Anwenden derselben Rechnung mit $-if$ statt f, wobei der Vorzeichenwechsel entsteht, weil die Abbildung $(\gamma_l)_{l=0\ldots M-1} \mapsto (\nu_k)_{k=0\ldots M-1}$ konjugiert linear ist.

$\square$

Mit Satz 3.1 laßt sich das Spektrum des transformierten Schurkomplementoperators studieren: wir betrachten wieder harmonische Fehlermoden p auf D, denen wegen der konformen Abbildung $g : D \to \Omega$ harmonische Moden $p \circ g^{-1}$ auf dem Zielgebiet Ω entsprechen.

Die Moden $e^{ik\varphi}$ aus der Analyse im Kapitel 3.3 treten hier als z^k auf, sie sind immer noch Eigenfunktionen zum Eigenwert $1/2$, falls k wenigstens so groß ist wie der Polynomgrad M der konformen Abbildung. Hinzu kommen jetzt höchstens $2M$ zusätzliche Eigenwerte, die mit Hilfe der Eigenwerte der Matrix $(s_{k,l})_{0\le k,l\le M}$ bestimmt werden können, wobei ein reeller Eigenwert der Matrix höchstens zwei Eigenwerte des Schurkomplements ergibt, die symmetrisch zu $1/2$ liegen — wie das folgende Beispiel zeigt, entstehen bei diesem Aufspalten nicht immer zwei Eigenwerte von S, da der zugehörige Eigenraum degenerieren kann.

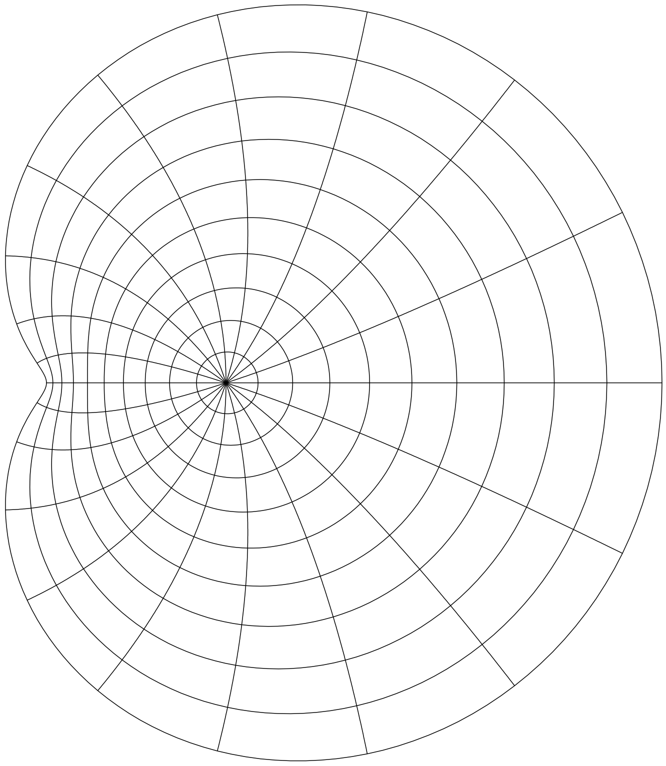


Abbildung 3: Bild des Einheitskreises unter der Transformation $z \mapsto (z-1.2)^2$.

Beispiel: Für das nierenförmige Gebiet aus Abbildung 3 mit

$$g(z) := (z-z_0)^2$$

mit reellem $z_0 > 1$ ergibt sich

$$(s_{k,l})_{0\le k,l\le 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4z_0^2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4z_0} \\ \frac{1}{2z_0} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

mit Eigenvektoren

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -z_0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ und}$$
$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2z_0 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_2 = \frac{1}{4z_0^2}.$$

Die Eigenwerte sind reell, Zerlegen der zugehörigen Funktionen f_j, $j = 1, 2$ aus (3.2) in Real- und Imaginärteil ergibt jeweils Eigenfunktionen von S:

$$p_R = 2\,\mathrm{Re}\, f_j \mapsto \left(\frac{1}{2} + \lambda_j\right) p_R$$

und

$$p_I = 2\,\mathrm{Im}\, f_j \mapsto \left(\frac{1}{2} - \lambda_j\right) p_I.$$

Hier ist $\mathrm{Re}\, f_1$ konstant und Eigenfunktion von S zum Eigenwert 0, $\mathrm{Im}\, f_1 \equiv 0$, also keine Eigenfunktion von S; für λ_2 sind

$$p_R = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{2z_0 - 1}{2(z - z_0)}, \quad p_I = 2\,\mathrm{Im}\,\frac{2z_0 - 1}{2(z - z_0)}$$

Eigenfunktionen von S zu den Eigenwerten $\frac{1}{2} + \frac{1}{4z_0^2}$ bzw. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4z_0^2}$, sie sind für $z_0 = 1.2$ in Abbildung 4 dargestellt.

Mit diesen Eigenwerten läßt sich nun auch für das transformierte Gebiet ein Iterationsverfahren konstruieren, das alle harmonischen Fehlermoden eliminiert. Zusäzlich zu dem auf dem Kreis nötigen Schritt

$$p^{(1)} := p^{(0)} - 2Sp^{(0)},$$

der hier immer noch alle Fehlermoden z^n, $n \geq 2$ aus der Startlösung $p^{(0)}$ auslöscht, benötigen wir zwei weitere Schritte für die beiden Moden zu den Eigenwerten $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{4z_0^2}$:

$$p^{(2)} := p^{(1)} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4z_0^2}\right)^{-1} Sp^{(1)}$$

und

$$p^{(3)} := p^{(2)} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4z_0^2}\right)^{-1} Sp^{(2)}.$$

Da die Eigenfunktionen von S auch Eigenfunktionen des jeweiligen Iterationsoperators sind und jede Fehlermode von einem der Iterationsschritte ausgelöscht wird, liefert die Produktiteration aus diesen drei Uzawa-Schritten für beliebigen harmonischen Ausgangsfehler die exakte Lösung.

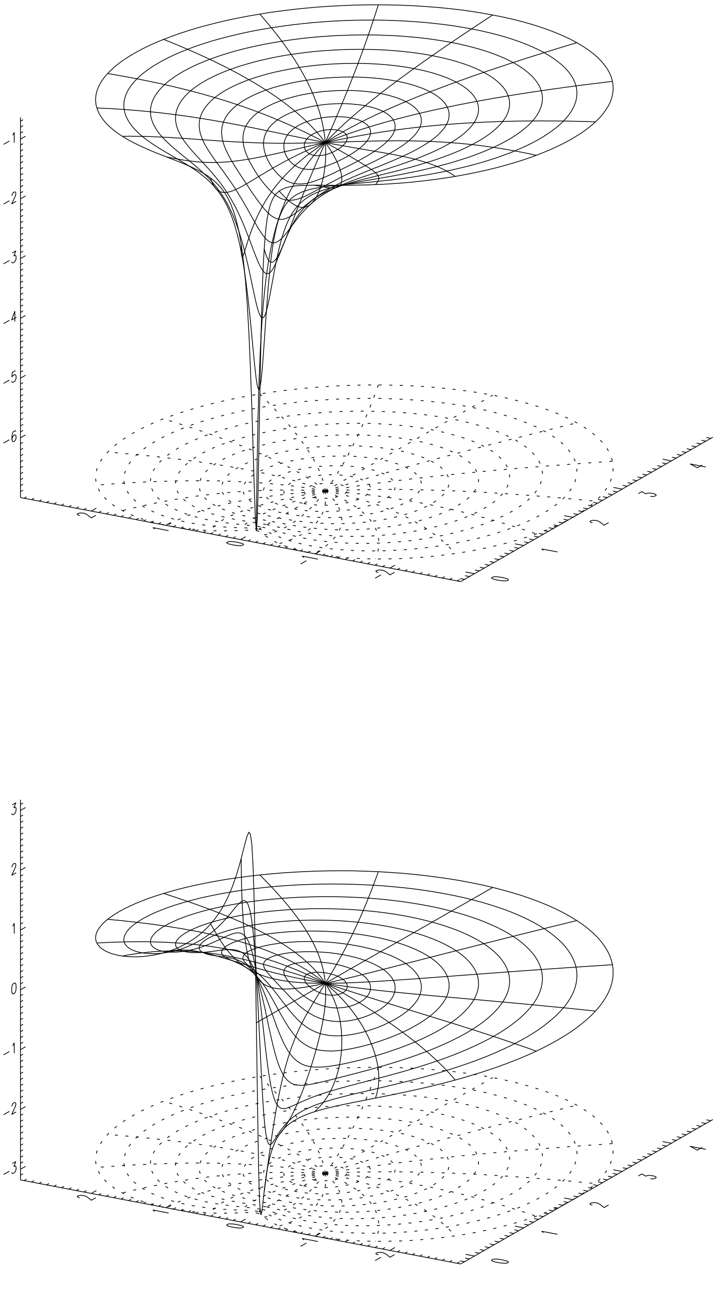


Abbildung 4: Eigenfunktionen von S auf dem transformierten Gebiet aus Abbildung 3 ($z_0 = 1.2$) zu den Eigenwerten $\frac{1}{2} + \frac{1}{4z_0^2}$ (oben) und $\frac{1}{2} - \frac{1}{4z_0^2}$.

4 Der diskrete Operator

4.1 Verwendete Gitter und Operatoren

Für ein diskretes Analogon zu den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts betrachten wir die Stokes-Gleichung auf einem regelmäßigen versetzten Gitter [Harlow und Welch 1965; Roache 1976; Brandt 1984; Griebel, Dornseifer und Neunhoeffer 1995] auf einem Gebiet, das aus endlich vielen quadratischen Kontrollvolumina der Kantenlänge h besteht. Die Funktionswerte für den Druck werden in den Mittelpunkten gespeichert, also auf einem Gitter

$$G_p \subset h \cdot \mathbb{Z} \times h \cdot \mathbb{Z}.$$

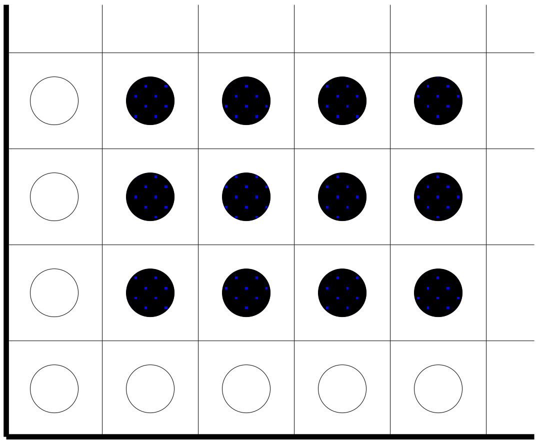


Abbildung 5: Gitter G_p für den Druck ($\bullet$ und $\circ$) und G_X ($\bullet$, vgl. Kapitel 4.2).

Die Geschwindigkeitskomponenten werden in den Mittelpunkten der inneren Grenzflächen gespeichert, also auf Gittern

$$G_1 := \{(x_1, x_2) : (x_1 + \frac{h}{2}, x_2), (x_1 - \frac{h}{2}, x_2) \in G_p\},$$
$$G_2 := \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2 + \frac{h}{2}), (x_1, x_2 - \frac{h}{2}) \in G_p\}$$

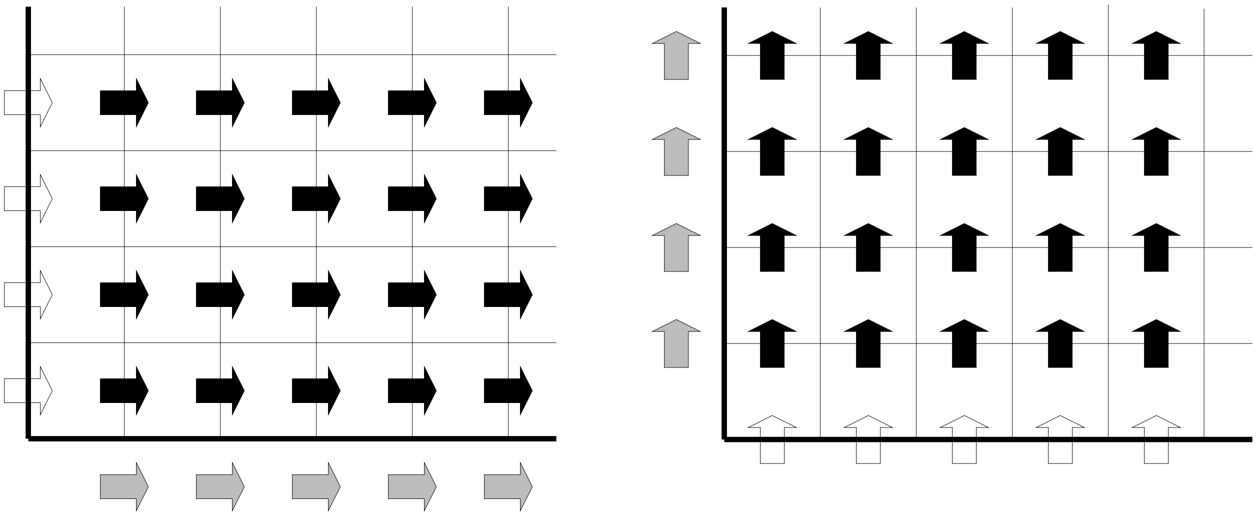
(Abbildung 6, ausgefüllte Pfeile).

Für $V := \mathbb{R}^{G_1} \times \mathbb{R}^{G_2}$ und $W := \mathbb{R}^{G_p}$ werden die üblichen Knotenbasen und die euklidischen Skalarprodukte $(.,.)_V$ und $(.,.)_W$ verwendet, V und W werden wie üblich mit ihren Dualräumen identifiziert.

Die Differentialoperatoren werden aus der mit zentralen Differenzen diskretisierten Ableitung

$$\frac{\partial^h}{\partial x} u(x) := \frac{u(x + \frac{h}{2}) - u(x - \frac{h}{2})}{h}$$

zusammengesetzt:



Gitterpunkte: Randwerte: Extrapolierte Werte:

Abbildung 6: Gitter G_1 und G_2 für die Geschwindigkeitskomponenten.

- der komponentenweise auf u_1 und u_2 angewendete diskrete Laplace-Operator $A : V \to V' = V$:

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\Delta^h u_1 \\ -\Delta^h u_2 \end{pmatrix}.$$

  mit $\Delta^h := \left(\frac{\partial^h}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial^h}{\partial x_2}\right)^2$, ausgewertet in den Punkten von G_1 bzw. G_2, wobei bei der Auswertung im Falle eines Randpunktes (x_1, x_2) folgendes für den Zugriff auf Punkte außerhalb des Gitters gilt:

  - Falls der betreffende Punkt auf dem Rand des Gebietes liegt, wird direkt der Funktionswert aus der Dirichlet-Randbedingung eingesetzt (dies ist der Fall bei $u_1(x_1 \pm h, x_2)$ und $u_2(x_1, x_2 \pm h)$, weiße Pfeile in Abbildung 6).
  - Sonst, also wenn der betreffende Punkt im Abstand von $h/2$ außerhalb des Gebietes liegt (dies ist bei $u_1(x_1, x_2 \pm h)$ und $u_2(x_1 \pm h, x_2)$ der Fall, graue Pfeile in Abbildung 6), wird der Funktionswert durch Extrapolation gewonnen; eine geeignete Extrapolationsvorschrift wird im Abschnitt 4.4 hergeleitet. Je nach Randdiskretisierung wird A nicht unbedingt selbstadjungiert sein.

    Dies führt zu einem lokal in den betroffenen Randpunkten modifizierten Laplacestern. Die Invertierbarkeit von A bleibt dadurch erhalten, wenn der modifizierte Stern schwach diagonaldominant mit Diagonalelement ungleich Null ist, da dann auf den Gittern G_1 und G_2 jeweils ein diskretes Maximumsprinzip gilt.

- Der Operator $B : V' = V \to W$ ist die negative diskrete Divergenz
$$B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := -\frac{\partial^h}{\partial x_1} u_1 - \frac{\partial^h}{\partial x_2} u_2,$$
ausgewertet auf den Punkten von G_p, wobei im Falle von Randpunkten für Funktionswerte von Punkten außerhalb des Gitters der durch die Randbedingung vorgegebene Wert eingesetzt wird (es wird nicht auf „graue Pfeile“ zugegriffen).

- Dann ist B^* gerade der diskrete Gradient:
$$B^* p = \begin{pmatrix} \frac{\partial^h}{\partial x_1} p \\ \frac{\partial^h}{\partial x_2} p \end{pmatrix}$$
ausgewertet in den Punkten von G_1 bzw. G_2.

Im weiteren sei vorausgesetzt, daß das Gebiet in folgendem Sinn zusammenhängend ist: zu je zwei beliebigen Gitterpunkten $p_A, p_B \in G_p$ läßt sich ein Pfad $p_0, p_1, \ldots, p_n$ mit $p_i \in G_p$ angeben, wobei $p_0 = p_A$, $p_n = p_B$ sind und für $0 \le i < n$ die Kontrollvolumina zu p_i und p_{i+1} eine gemeinsame Kante haben. Da an jedem Mittelpunkt dieser Kanten eine Komponente des diskreten Druckgradienten ausgewertet wird, sieht man leicht, daß unter dieser Zusammenhangsbedingung der Kern von B^* von der „konstanten Funktion“ aufgespannt wird:
$$\ker B^* = \langle \vec{1}_W \rangle,$$
wobei $\vec{1}_W$ den Vektor aus W bezeichnet, dessen Komponenten alle 1 sind.

Weil B^* und damit auch B den Rang $\dim(W) - 1$ haben und A regulär ist, ist dies auch der Rang des Schurkomplements $S = BA^{-1}B^*$, für den Bildraum gilt
$$\operatorname{Im} S = \operatorname{Im} B = (\ker B^*)^\perp = \langle \vec{1}_W \rangle^\perp.$$

Man erzwingt in der Regel Eindeutigkeit der Drucklösung — die ja durch die diskrete Stokes-Gleichung nur bis auf eine Konstante bestimmt ist — dadurch, daß man zusätzlich das Verschwinden des Integralmittels von p fordert:
$$(p, \vec{1}_W)_W \stackrel{!}{=} 0, \tag{4.1}$$
also $p \perp \ker B^*$. Dies hat den Vorteil, daß Verfahren vom Uzawa-Typ, die Korrekturrichtungen aus $\operatorname{Im} S$ liefern, diese Nebenbedingung automatisch einhalten. Es sind aber auch andere Nebenbedingungen möglich, die dann durch eine Projektion künstlich erzwungen werden müssen.

Damit ist die diskrete Stokes-Gleichung bis auf die Randbedingungen für die Impulsgleichung — diese werden im Kapitel 4.4 hergeleitet — vollständig spezifiziert.

Hat man einen effizienten Poisson-Löser zum Lösen der Impulsgleichungen bei gegebenem Druck p zur Verfügung, bleibt zum Lösen des Systems (2.1) die Aufgabe übrig, p aus der Schurkomplementgleichung $Sp = f_S$ zu bestimmen.

4.2 Einschränkung auf harmonische Funktionen; der Randoperator

Zum Lösen der Schurkomplementgleichung im diskreten Fall eignen sich wieder iterative Verfahren vom Uzawa-Typ. Wir zeigen nun, daß sich hierbei der Suchraum für die Schurkomplementgleichung (2.2) mit dem Operator $S := BA^{-1}B^*$ nach dem Schema aus Kapitel 2.3 auf die diskret harmonischen Funktionen einschränken läßt: analog zum kontinuierlichen Fall wird für $\tilde{A}$ der diskrete Laplace-Operator

$$\tilde{A}p := \Delta^h p$$

und für $\tilde{B}$ der diskrete Divergenz-Operator

$$\tilde{B}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} := \frac{\partial^h}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial^h}{\partial x_2}u_2,$$

gewählt, beide aber eingeschränkt auf die inneren Kontrollvolumina, also auf die Punkte des Gitters

$$G_X := \{(x_1, x_2) : (x_1 \pm h, x_2), (x_1, x_2 \pm h) \in G_p, \},$$

womit sich als Zielraum für $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ der Raum der Gitterfunktionen auf G_X ergibt, dargestellt durch $X := \mathbb{R}^{G_X}$.

Für die Einschränkung des Suchraums sind drei Punkte wesentlich:

- Die Vertauschbarkeitsbedingung (2.4) $\tilde{A}B = \tilde{B}A$ ist erfüllt, Abbildung 7 zeigt den zugehörigen Differenzenstern. Die Modifikation des Laplace-Operators A in den Randpunkten spielt dabei keine Rolle, da G_X keine Randpunkte enthält, somit $\tilde{B}A$ nicht auf extrapolierte Funktionswerte von u zugreift (vgl. Abbildungen 5 und 6). Der Suchraum für den Druck ist damit auf den Kern von $\tilde{A}$, also die diskret harmonischen Funktionen, eingeschränkt.

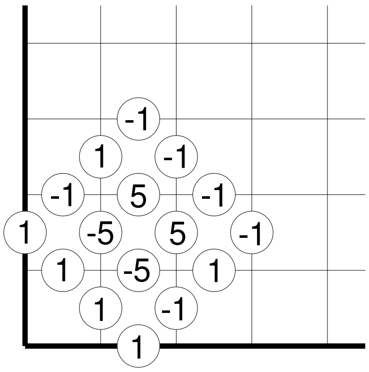


Abbildung 7: Differenzenstern für $\tilde{A}B = \tilde{B}A$ (multipliziert mit h^3).

- Die Bedingung (2.6) $\tilde{A} = \tilde{B}B^*$ ist ebenfalls erfüllt, daher ist $\ker \tilde{A}$ invariant unter S.

- Weil $\tilde{A}$ der diskrete Laplace-Operator ist, ist jedes $p \in \ker \tilde{A}$ — wie auch sein Bild $Sp \in \ker \tilde{A}$ — durch seine Randwerte, also den Funktionswerten in $G_p \setminus G_X$ eindeutig bestimmt. Man kann also S als lineare Abbildung auf dem Raum der Randfunktionen, d.h. auf

$$W_R := l_2(G_p \setminus G_X)$$

auffassen.

Das Spektrum dieses Randoperators ist eine Teilmenge des Spektrums von S, weil $\ker \tilde{A}$ invariant unter S ist, also die Fortsetzung der Eigenfunktionen des Randoperators ins Innere genau die harmonischen Eigenfunktionen von S sind und den eingeschränkten Suchraum für eine Korrekturrichtung für p aufspannen.

Der Randoperator ist natürlich im Regelfall von viel niedriger Dimension als der Schurkomplementoperator, da es (im Zweidimensionalen) $O(h^{-1})$ Randpunkte, aber $O(h^{-2})$ innere Punkte gibt. Weil der Suchraum aber nur noch aus harmonischen Funktionen besteht, ist er eine vollständige Beschreibung des auf den Suchraum eingeschränkten Schurkomplements.

Eine explizite Darstellung des Randoperators erhält man, indem man

- eine Basis von W_R wählt,

- jede Basisfunktion durch Lösen einer Laplacegleichung harmonisch auf G_X fortsetzt,

- das Schurkomplement anwendet

- und die resultierende Divergenz auf den Rand einschränkt und in der Ausgangsbasis entwickelt.

Die Nebenbedingung (4.1) $(p, \vec{1}_W)_W = 0$ läßt sich für harmonische Funktionen umschreiben in ein Funktional auf dem Rand: Bezeichnet man die Abbildung des harmonischen Fortsetzens mit $P : W_R \to W$, so gilt für alle $p_R \in W_R$

$$(Pp_R, \vec{1}_W)_W = (p_R, P^*\vec{1}_W)_{W_R},$$

es ist also die adjungierte Abbildung des harmonischen Fortsetzens auf die konstante Funktion anzuwenden, um ein Funktional auf dem Rand zu erhalten. Wählt man für W_R die gewöhnliche Knotenbasis und das euklidische Skalarprodukt, läßt sich $P^*\vec{1}_W$ im wesentlichen durch Lösen einer Poissongleichung mit konstanter rechter Seite und Bilden der Normalableitung der Lösung berechnen. Die Normalableitung ist dabei auszuwerten in allen Paaren aus benachbarten Rand- und Nichtrandpunkten:

$$RP := \{(x, y) : x \in G_p \setminus G_X, y \in G_X, \|x - y\| = h\}. \tag{4.2}$$

Die adjungierte Abbildung P^* wird mit Hilfe der zweiten Greenschen Formel hergeleitet, deren diskrete Form in unserem Fall (mit dem Fünfpunkte-Laplacestern) lautet:

Lemma 4.1 *Für $u, v \in W$ gilt*

$$\sum_{x \in G_X} \Big(u(x)\Delta^h v(x) - v(x)\Delta^h u(x) \Big) = \frac{1}{h^2} \sum_{(x,y) \in RP} \left(u(y)v(x) - v(y)u(x) \right).$$

Dabei läuft die Summe auf der rechten Seite der Gleichung über die Menge der Paare (x, y) von benachbarten Rand- und Nichtrandpunkten RP aus (4.2).

Damit gilt für $\phi \in W$ mit

$$\Delta^h \phi = \vec{1}_W|_{G_X}, \quad \phi|_{G_p \setminus G_X} = 0$$

und p mit $\Delta^h p = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{x \in G_X} p(x) &= \sum_{x \in G_X} p(x) \Delta^h \phi(x) \\ &= -\frac{1}{h^2} \sum_{(x,y) \in RP} p(x)\phi(y). \end{aligned}$$

Die Bedingung $(p, \vec{1}_W)_W$ lautet somit für die Randfunktionen harmonischer Funktionen

$$\begin{aligned} (p, \vec{1}_W)_W &= \sum_{x \in G_p} p(x) \\ &= \sum_{x \in G_p \setminus G_X} p(x) - \frac{1}{h^2} \sum_{(x,y) \in RP} p(x)\phi(y). \end{aligned}$$

Diese Nebenbedingung wird bei Korrekturschritten im Uzawa-Verfahren automatisch eingehalten, weil die entsprechende Nebenbedingung in W gilt (erzwingen läßt sie sich auch immer, indem zur entsprechenden harmonischen Fortsetzung ein passendes Vielfaches der konstanten Funktion addiert wird, so daß die Nebenbedingung auf W erfüllt ist).

Im folgenden werden nur einfach zusammenhängende Gebiete betrachtet. Zur Notation deren Randfunktionen verwenden wir eine stetige Kurve

$$\tau : \mathbb{R} \supset \Omega_R \to \Omega,$$

die die Randpunkte von G_p durchläuft, also im Abstand von $h/2$ vom Rand in Ω liegt.

Die Urbilder der Randpunkte von Ω bilden ein Gitter G_R auf Ω_R, die Randwerte einer Gitterfunktion p auf G_p bilden eine Gitterfunktion $p \circ \tau$ auf G_R, eine „Abwicklung“ der Randes von p.

Die spezielle Wahl von τ spielt keine weitere Rolle, τ dient nur der bequemen Beschreibung von Randfunktionen.

4.3 Harmonische Funktionen in der Halbebene

Zur Analyse des diskreten Schurkomplementoperators, insbesondere zur Bestimmung geeigneter Randbedingungen für A, werden die Ergebnisse aus dem Abschnitt 3.4 auf den diskreten Fall übertragen.

Zunächst einige elementare Eigenschaften der diskreten Differentialoperatoren. Der eindimensionale (kontinuierliche) Laplace-Operator hat bekanntlich Eigenfunktionen $x \mapsto e^{ikx}$ zum Eigenwert $-k^2$ und $x \mapsto e^{\pm kx}$ zum Eigenwert k^2. Entsprechendes gilt auch im Diskreten:

Lemma 4.2 (Eigenfunktionen von Δ^h (1-D)) *Sei $k \in \mathbb{N}$, $h > 0$. Zum diskreten Laplace-Operator*

$$\Delta^h u(x) := \frac{1}{h^2}(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))$$

ist $x \mapsto e^{ikx}$ Eigenfunktionen zum Eigenwert $-\mu k^2$ mit

$$\mu = \mu(k \cdot h) := \left(\frac{2}{kh}\sin(\frac{kh}{2})\right)^2 = \frac{2}{(kh)^2}(1 - \cos(kh)). \tag{4.3}$$

Mit der Lösung η von

$$\eta^{\frac{kh}{2}} - \eta^{-\frac{kh}{2}} = \sqrt{\mu}kh \tag{4.4}$$

sind $x \mapsto \eta^{-kx}$ und $x \mapsto \eta^{kx}$ Eigenfunktionen zum Eigenwert $+\mu k^2$ von Δ^h.

Für die ersten Ableitungen erhält man Entsprechungen der gewöhnlichen Ableitungsregeln, auch die im Abschnitt 3.4 verwendete Beziehung

$$\Delta\left(xe^{-kx}\right) = k^2 xe^{-kx} - 2ke^{-kx}$$

hat ein direktes diskretes Analogon:

Lemma 4.3 (Weitere diskrete Ableitungen (1-D)) *Für $k \in \mathbb{N}$, $h > 0$ und μ, η aus (4.3), (4.4) ist*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^h}{\partial x} e^{ikx} &= \sqrt{\mu}k \cdot ie^{ikx} = \frac{\eta^{\frac{kh}{2}} - \eta^{-\frac{kh}{2}}}{h} ie^{ikx}, \\
\frac{\partial^h}{\partial x} \eta^{-kx} &= -\frac{\eta^{\frac{kh}{2}} - \eta^{-\frac{kh}{2}}}{h}\eta^{-kx}, \\
\frac{\partial^h}{\partial x}\left(x\eta^{-kx}\right) &= -\frac{\eta^{\frac{kh}{2}} - \eta^{-\frac{kh}{2}}}{h} x\eta^{-kx} + \frac{\eta^{\frac{kh}{2}} + \eta^{-\frac{kh}{2}}}{2}\eta^{-kx}
\end{aligned}$$

und

$$\Delta^h\left(x\eta^{-kx}\right) = \mu k^2 x\eta^{-kx} - \frac{\eta^{kh} - \eta^{-kh}}{h}\eta^{-kx}.$$

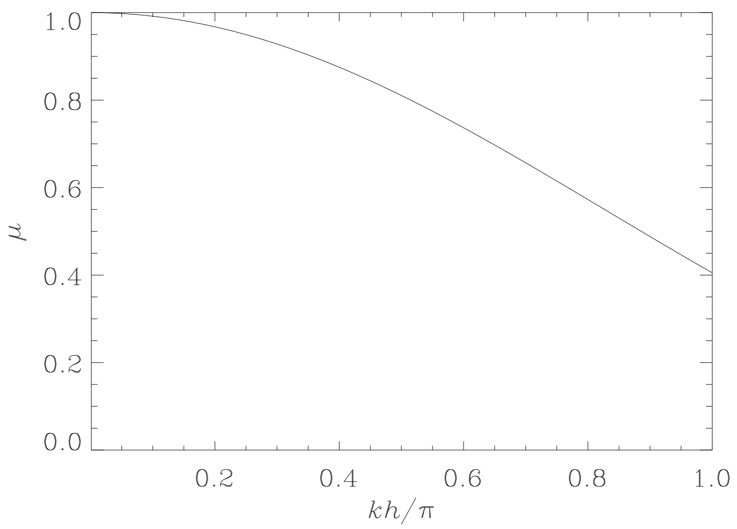


Abbildung 8: „Diskretisierungsfehler“ μ des Eigenwerts $-\mu k^2$ von Δ^h.

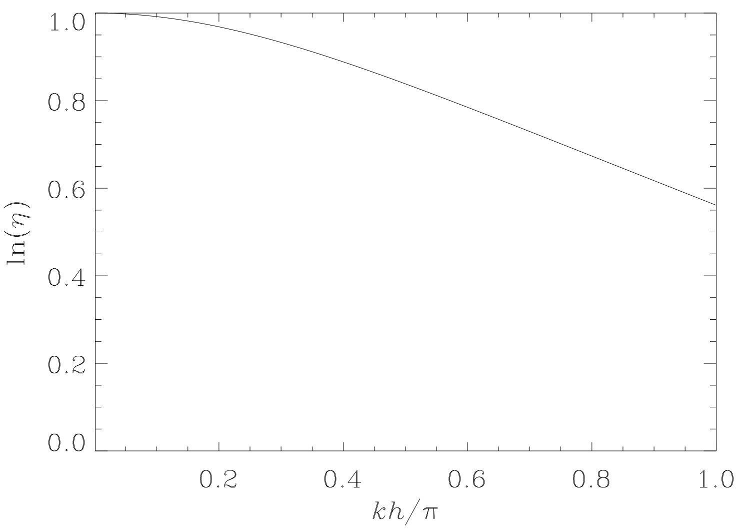


Abbildung 9: Basis η der Exponentialfunktion, die Eigenfunktion von Δ^h zum Eigenwert μk^2 ist.

Nun werden Lösungen der diskreten Impulsgleichungen zu gegebenem harmonischem Druck konstruiert.

Sei zunächst

$$\tilde{p}(x_1, x_2) := \eta^{-kx_1} e^{ikx_2}.$$

Wegen Lemma 4.2 gilt $\Delta^h \tilde{p} \equiv 0$, der Gradient ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^h}{\partial x_1} \tilde{p}(x_1, x_2) &= -\frac{\eta^{\frac{kh}{2}} - \eta^{-\frac{kh}{2}}}{h} \eta^{-kx_1} e^{ikx_2}, \\ \frac{\partial^h}{\partial x_2} \tilde{p}(x_1, x_2) &= i \frac{\eta^{\frac{kh}{2}} - \eta^{-\frac{kh}{2}}}{h} \eta^{-kx_1} e^{ikx_2}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für

$$u_1(x_1, x_2) := x_1 \eta^{-kx_1} e^{ikx_2}, \quad u_2(x_1, x_2) := -i u_1(x_1, x_2) \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \Delta^h u_1 &= -\frac{\eta^{kh} - \eta^{-kh}}{h} \eta^{-kx_1} e^{ikx_2} \\ \Delta^h u_2 &= i \frac{\eta^{kh} - \eta^{-kh}}{h} \eta^{-kx_1} e^{ikx_2}. \end{aligned}$$

und $u_1(0, x_2) = u_2(0, x_2) = 0$.

Also ist $\Delta^h u = c \cdot \operatorname{grad}^h \tilde{p}$ mit einem Faktor

$$c := \frac{\eta^{kh} - \eta^{-kh}}{\eta^{\frac{kh}{2}} - \eta^{-\frac{kh}{2}}} = \eta^{\frac{kh}{2}} + \eta^{-\frac{kh}{2}}$$

und wir erhalten

Lemma 4.4 (Diskrete Moden) *Für $k \in \mathbb{N}$, $h > 0$ und μ, η aus (4.3), (4.4) erfüllen*

$$p(x_1, x_2) = \left(\eta^{\frac{kh}{2}} + \eta^{-\frac{kh}{2}}\right) \eta^{-kx_1} e^{ikx_2}$$

und u aus (4.5) die diskreten Impulsgleichungen

$$\Delta^h u = \operatorname{grad}^h p, \quad u|_{x_1=0} = 0,$$

mit $\Delta^h p \equiv 0$. Weiter ist p Eigenfunktion des Schurkomplementoperators zum Eigenwert $1/2$, unabhängig von k:

$$\frac{\partial^h u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^h u_2}{\partial x_2} = \frac{p}{2}$$

Wie im kontinuierlichen Fall gilt auch für das Schurkomplement der diskreten Stokes-Gleichung und jede harmonische Fehlermode auf der Halbebene $Sp = \frac{1}{2}p$.

4.4 Randbedingungen für die diskreten Impulsgleichungen

Zur vollständigen Beschreibung der Diskretisierung stehen noch die Randbedingungen für die Impulsgleichungen aus, genauer für die randnahen Gitterpunkte, d.h. solchen im Abstand $h/2$ vom Rand. Dies wird exemplarisch an der in Abbildung 10 dargestellten Situation diskutiert: Im Punkt $R = (0, x_2)$ ist der Funktionswert 0 für u_2 vorgeschrieben, dieser Punkt gehört aber nicht zu G_2. In $P = (\frac{h}{2}, x_2)$ soll u_2 die Impulsgleichung erfüllen, in die die Funktionswerte in den Nachbarpunkten W, O, N, S eingehen.

Zur Konstruktion der diskreten Randbedingung wählt man eine Interpolationsvorschrift, die aus den Punkten P, W und evtl. noch weiteren inneren Punkten den Wert im Punkt R interpoliert und eliminiert mittels dieser Gleichung — und der Bedingung $u_2(R) \stackrel{!}{=} 0$ — die Unbekannte in W aus dem in P aufgesetzten Laplacestern.

Lineare Interpolation, vgl. z.B. [Roache 1976, S. 199]

$$u_2(R) := \frac{u_2(W) + u_2(P)}{2}$$

führt auf den Laplacestern

$$\tilde{\Delta}^h \widehat{=} \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & 1 & \\ \cdot & -5 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

in P; quadratische Interpolation, vgl. z.B. [Brandt 1984]

$$u_2(R) := \frac{3}{8} u_2(W) + \frac{3}{4} u_2(P) - \frac{1}{8} u_2(O)$$

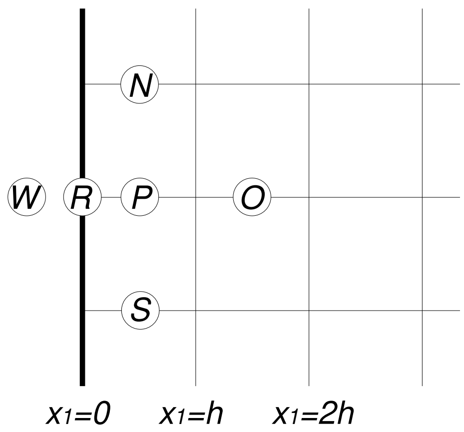


Abbildung 10: Zur Diskretisierung der Randbedingung für u_2 im Punkt $P = (\frac{h}{2}, x_2)$.

ergibt

$$\tilde{\Delta}^h \widehat{=} \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & 1 & \\ \cdot & -6 & \frac{4}{3} \\ & 1 & \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Beide Interpolationsformeln sind für die Moden aus (4.5) nicht exakt — daher ergeben sich beim Lösen der Impulsgleichungen mit den Randsternen (4.6) oder (4.7) Geschwindigkeitsfelder, die gegenüber (4.5) gestört sind, mithin auch eine gestörte Divergenz. Zwar geht diese Störung für jede Mode bei kleiner werdenden Gitterweite h gegen Null, die Beziehung aus Lemma 4.4 geht aber verloren und damit die Möglichkeit, für die Halbebene alle Fehlermoden mit einem Uzawa-Schritt auszulöschen.

Die Forderung, Moden der Form (4.5) auf dem Rand der Halbebene exakt zu interpolieren, um Lemma 4.4 in der Praxis anwenden zu können, führt zu einer neuen Interpolationsvorschrift. Wir konstruieren sie als Korrektur zur quadratischen Interpolation: Setzt man ein u_2 aus (4.5) in die Formel für die quadratische Interpolation ein, erhält man als Interpolationsfehler zum tatsächlichen Wert 0

$$\begin{aligned} \tilde{u_2}(R) &:= \frac{3}{8}u_2(W) + \frac{3}{4}u_2(P) - \frac{1}{8}u_2(O) \\ &= \frac{3h}{16}\left(\eta^{kh} - 2 + \eta^{-kh}\right)\eta^{-\frac{kh}{2}} i e^{kx_2} \\ &= \frac{3h}{16}\mu k^2 h^2 \eta^{-\frac{kh}{2}} i e^{kx_2} \\ &= \frac{3}{8}h^2 \left(\frac{\partial^h}{\partial x_2}\right)^2 u_2(P) \end{aligned}$$

Daher liefert der Differenzenstern

$$\begin{bmatrix} & \cdot & \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \\ & \cdot & \end{bmatrix} - \frac{3}{8} \begin{bmatrix} & 1 & \\ \cdot & -2 & \cdot \\ & 1 & \end{bmatrix} = \frac{3}{8} \begin{bmatrix} & -1 & \\ 1 & 4 & -\frac{1}{3} \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

aufgesetzt im Punkt P unabhängig von k die exakte Interpolation 0; darüberhinaus werden Polynome vom Typ $x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$, $0 \le \alpha \le 2$, $0 \le \beta \le 1$ exakt interpoliert, weil hierfür $(\partial^h/\partial x_2)^2$ verschwindet und die verbleibende quadratische Interpolation exakt ist.

Als modifizierter Laplacestern für P ergibt sich

$$\tilde{\Delta}^h \widehat{=} \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & 2 & \\ \cdot & -8 & \frac{4}{3} \\ & 2 & \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

ein Randwert $u_{2,\Gamma}(R)$ ginge in diese Gleichung mit dem Gewicht $\frac{8}{3h^2}$ in die rechte Seite ein.

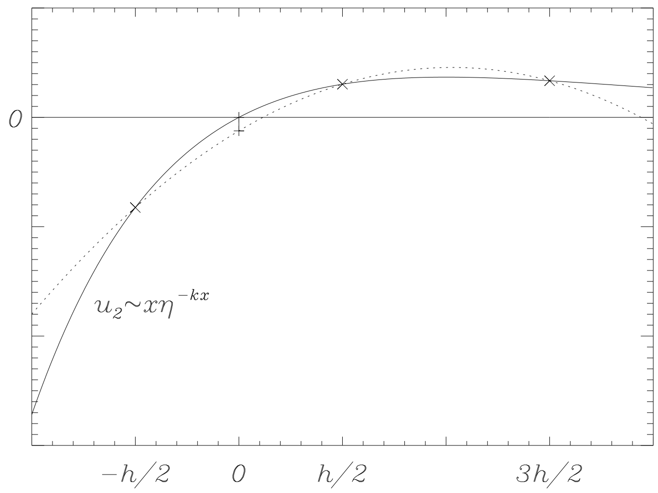


Abbildung 11: Interpolation einer u_2-Mode auf den Rand $x_1 = 0$; der Fehler der quadratischen Interpolation (gepunktet) kann durch einen geeigneten Differenzenstern exakt korrigiert werden.

Mit den Randdiskretisierungen (4.7) und (4.8) enstehen diskrete Laplaceoperatoren Δ^h, die nicht mehr symmetrisch sind; sie lassen sich aber durch Diagonalskalierung symmetrisieren. Sei dazu D eine Diagonalmatrix derselben Größe wie Δ^h mit Diagonalelementen $\sqrt{4/3}$ für die Komponenten, denen Gitterpunkte mit modifiziertem Laplacestern zugeordnet sind und Diagonalelementen 1 für die übrigen Komponenten. Dann ist $D^{-1}\Delta^h D$ symmetrisch, insbesondere reell diagonalisierbar. Da Δ^h und $D^{-1}\Delta^h D$ dasselbe Spektrum haben, ist mithin auch Δ^h reell diagonalisierbar.

Werden die diskreten Impulsgleichungen mit der Randdiskretisierung aus (4.8) gelöst, gilt die Beziehung $Sp = p/2$ aus Lemma 4.4 für jede (diskret) harmonische Fehlermode p exakt. Wie im kontinuierlichen Fall liefert daher die Korrektur $p^{(\mathrm{neu})} := p^{(\mathrm{alt})} - 2Sp^{(\mathrm{alt})}$ im einem Schritt die exakte Lösung, wenn, was ja ohne Einschränkung angenommen werden kann, der Fehler in $p^{(\mathrm{alt})}$ harmonisch ist.

4.5 Numerische Ergebnisse für das Quadrat

Während auf der Halbebene jede diskret harmonische Fehlermode Eigenfunktion des Schurkomplements — bei richtig gewählten Randbedingungen der Impulsgleichung — zum Eigenwert 1/2 ist, gilt dies bei komplizierteren Gebieten im allgemeinen nicht.

Man kann aber erwarten, daß für ein polygonal berandetes Gebiet für einen harmonischen Fehler p, der in der Nähe der Ecken verschwindet, in guter Näherung $Sp \approx p/2$ gilt, während der Einfluß der Ecken — analog zu den Transformationen im Kapitel 3.5 — zu Eigenwerten führt, die weiter von 1/2 entfernt sind. Daß dies tatsächlich so ist, wird im diesem Kapitel durch numerisch berechnete Spektren belegt.

Betrachten wir dazu im folgenden exemplarisch das Einheitsquadrat $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, aufgeteilt in h^{-2} Kontrollvolumina mit

$$h = 2^{-k}, \quad k \in \mathbb{N};$$

damit ist die Dimension des Raums W_R der Randfunktionen

$$n_R := 4 \cdot (h^{-1} - 1).$$

Als Randparametrisierung wählen wir $\tau : [0, n_R \cdot h[\to \Omega$ so, daß, beginnend und endend im Punkt $\tau(0) = \lim_{x \to n_R \cdot h} \tau(x) = (1/2 - h/2, h/2)$, die Randpunkte von G_p im Uhrzeigersinn durchlaufen werden und deren Urbilder ein regelmäßiges Gitter der Maschenweite h bilden. Die Urbilder der Eckpunkte liegen dann im Abstand von $1 - h$, sie werden im folgenden bezeichnet mit $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \xi_4$.

Abbildung 12 zeigt die Eigenwerte des Randoperators S — der ja auch als das auf den Raum der diskret harmonischen Funktionen eingeschränkte Schurkomplement interpretiert werden kann — für $h = 1/16$ und $h = 1/32$ jeweils mit den Varianten der Randbedingung für die Impulsgleichung nach (4.6), (4.7) und (4.8). Das Schurkomplement für die Stokes-Gleichung ist bekanntlich — abgesehen vom Eigenwert 0 zum konstanten Druck — gut konditioniert, was auch bei allen drei Diskretisierungen erhalten bleibt.

Die Randdiskretisierung (4.8), mit der in der Halbebene jede harmonische Funktion Eigenfunktion zum Eigenwert 1/2 ist, konzentriert auch im Fall des Quadrats den überwiegenden Teil der Eigenwerte sehr nahe bei 1/2, der Einfluß der Ecken beschränkt sich bei dieser Diskretisierung auf Eigenräume sehr kleiner Dimension. Dabei beobachtet man für diese Eigenwerte (Abbildungen 12 und 13) und die zugehörigen Eigenfunktionen (Abbildungen 14 und 15) folgendes:

- Es treten jeweils Cluster von vier Eigenvektoren auf, die sich in den Symmetrieeigenschaften bezüglich der Seitenmitten unterscheiden, zwei davon mit exakt gleichem Eigenwert, (die durch eine Drehung um 90° ineinander überführt werden können,) einer mit nur geringfügig abweichendem und einer mit etwas abgesetztem Eigenwert.

- Bei Halbierung der Maschenweite treten zwei neue Cluster auf, je einer zu Eigenwerten größer bzw. kleiner 1/2, also zusammen 4 deutlich verschiedene Eigenwerte.

- Die Eigenfunktionen zu den kleinsten Eigenwerten sind symmetrisch zu den Ecken des Quadrats, die zu den größten Eigenwerten antisymmetrisch.

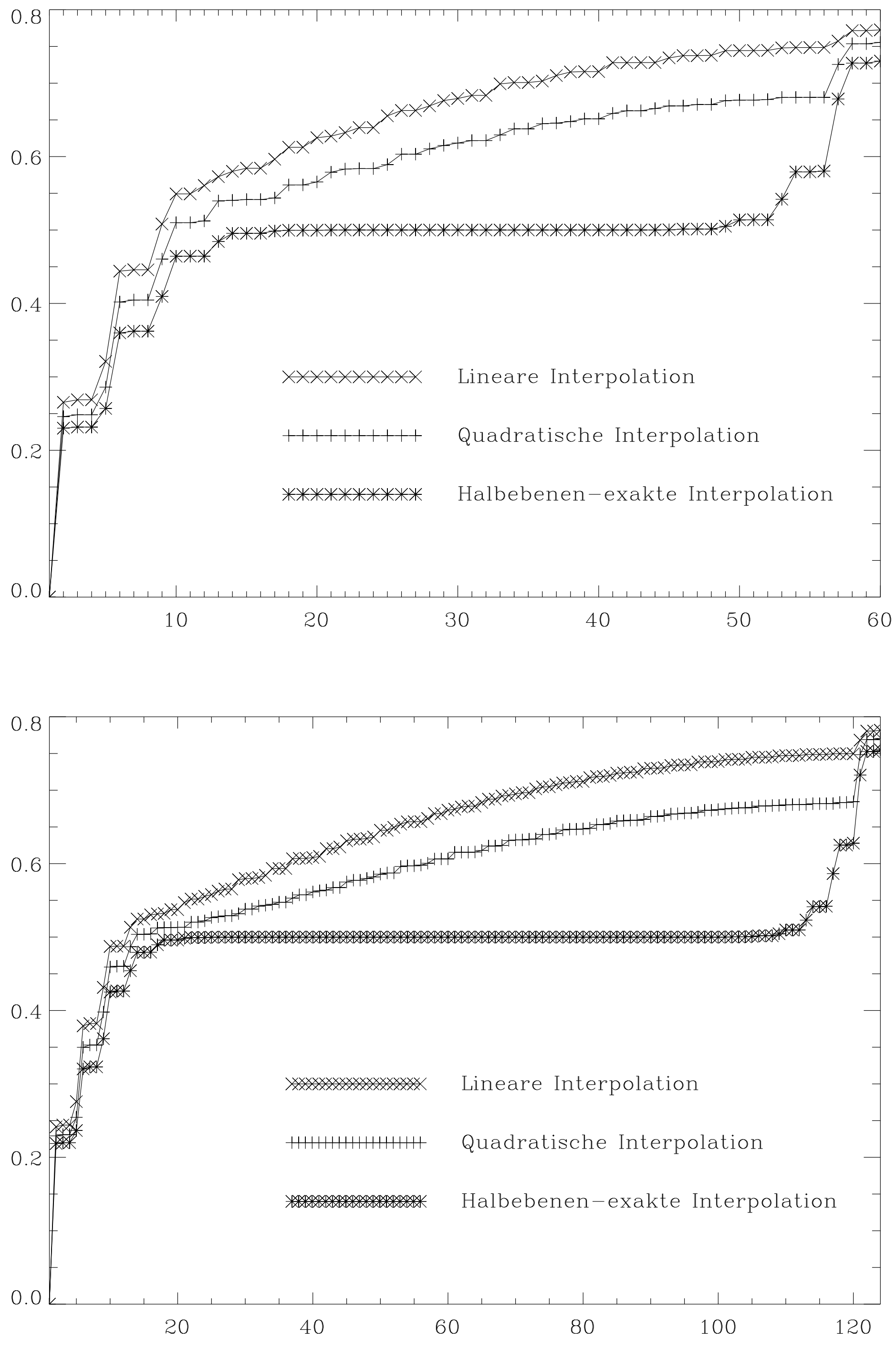


Abbildung 12: Eigenwerte des Randoperators S für $h = 1/16$ (oben) bzw. $h = 1/32$ und verschiedene Diskretisierungen der Impulsgleichungen am Rand.

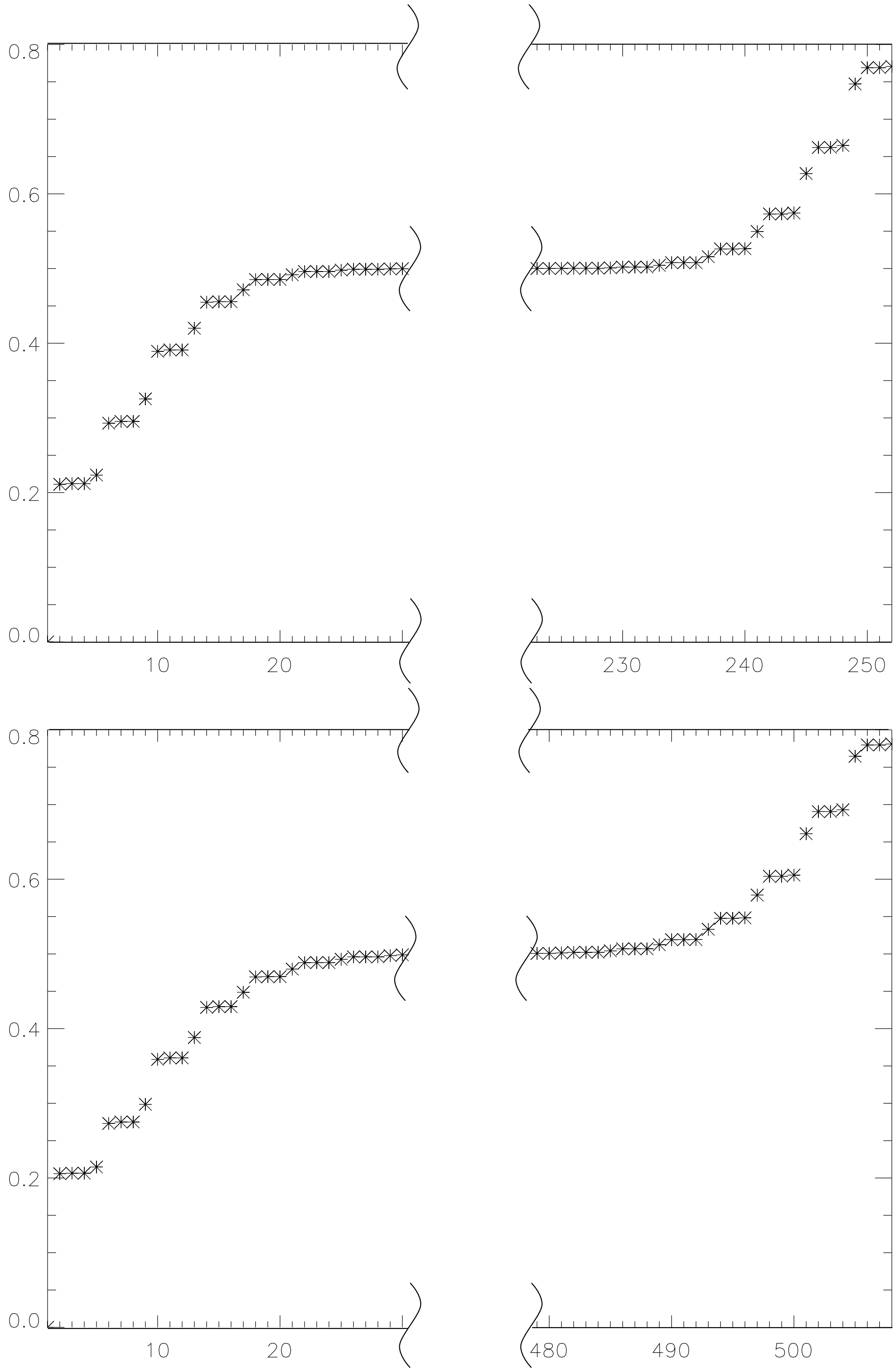


Abbildung 13: Eigenwerte des Randoperators S für $h = 1/64$ (oben) bzw. $h = 1/128$, Randdiskretisierung aus (4.8).

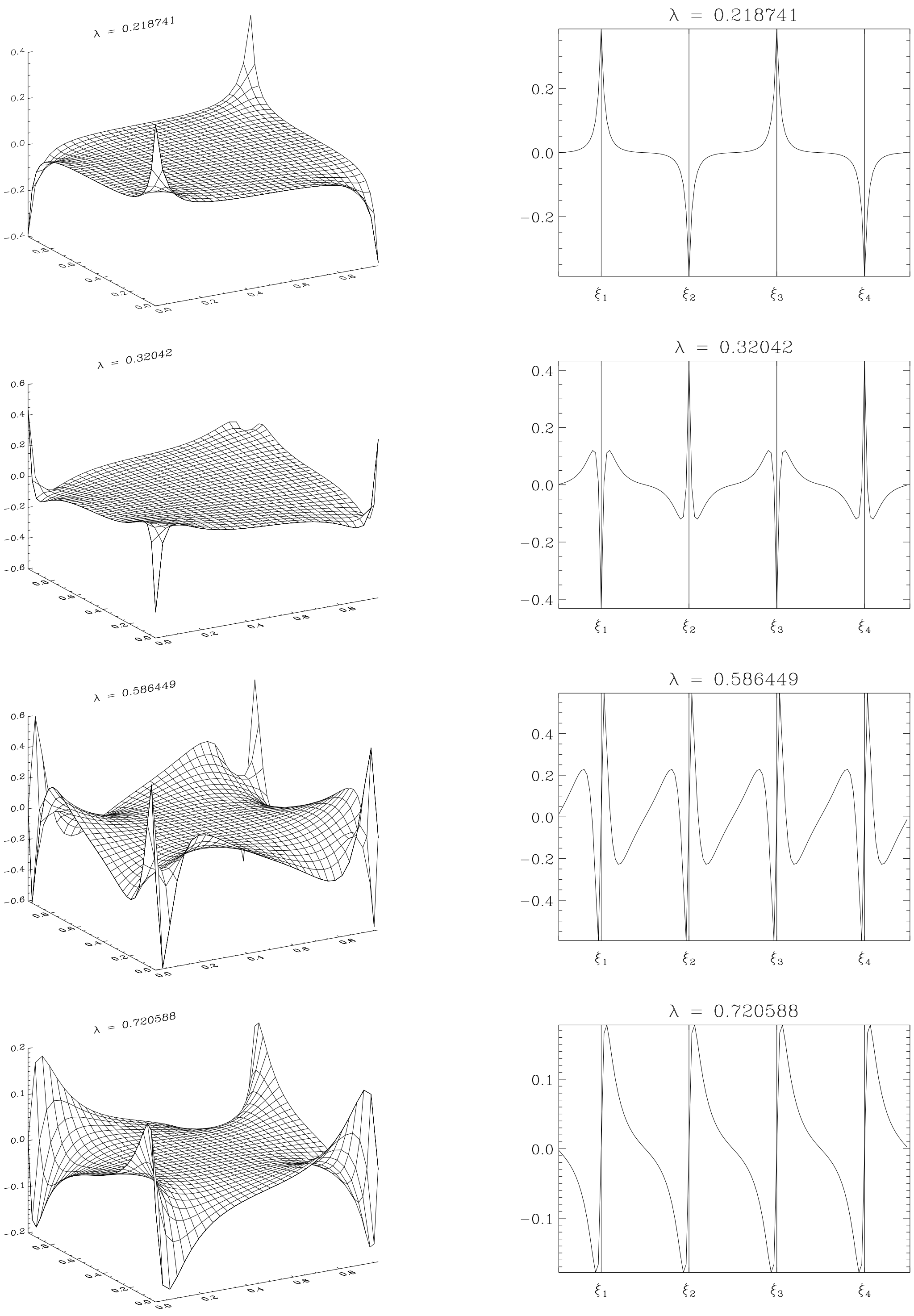


Abbildung 14: Je eine Eigenfunktion aus den vier extremen Eigenwertclustern (Halbebenen-exakte Randfunktionen, $h = 1/32$) als harmonische Funktion auf Ω (links) und als Randfunktion.

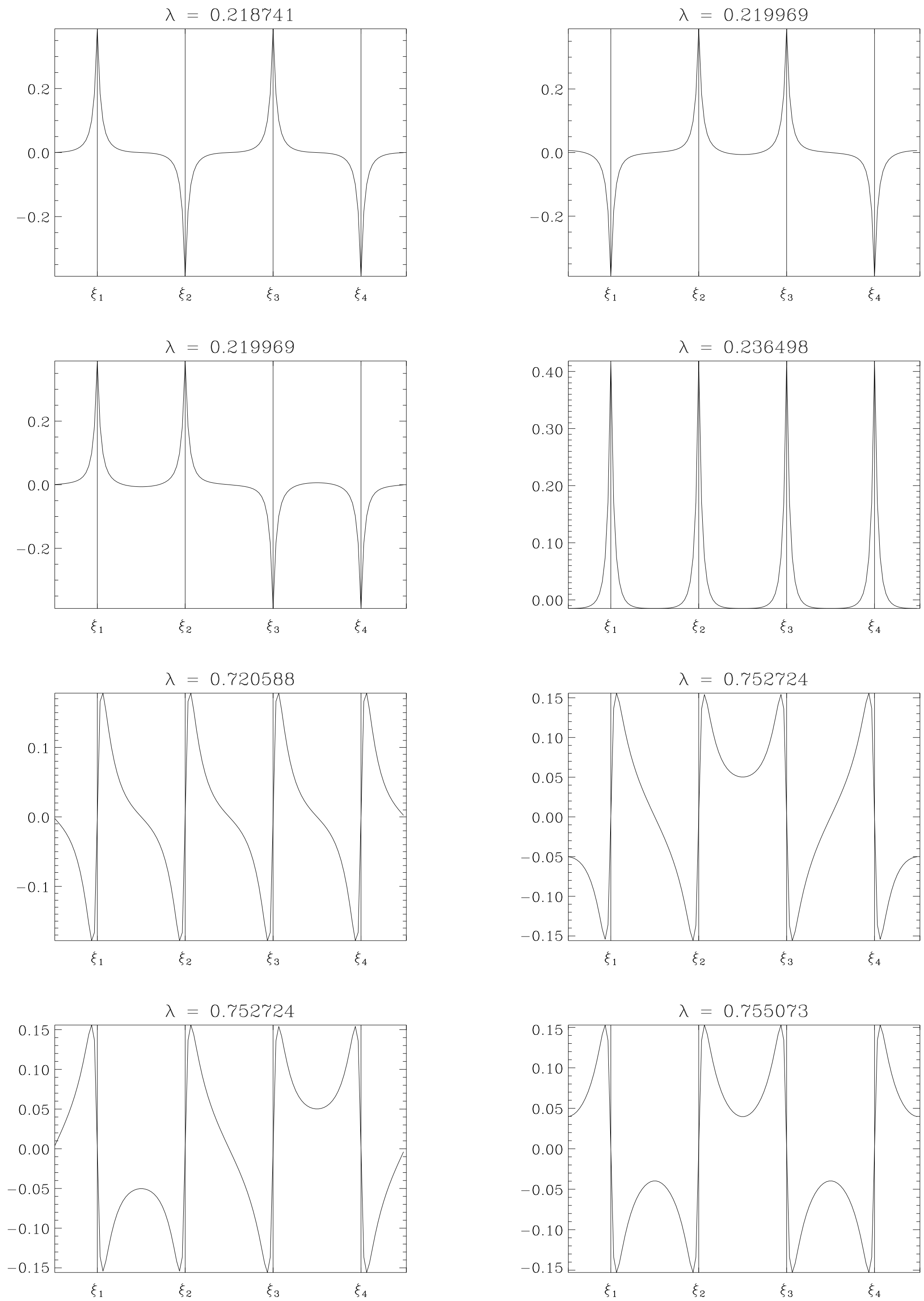


Abbildung 15: Eigenfunktionen zu den beiden extremen Eigenwert-Clustern

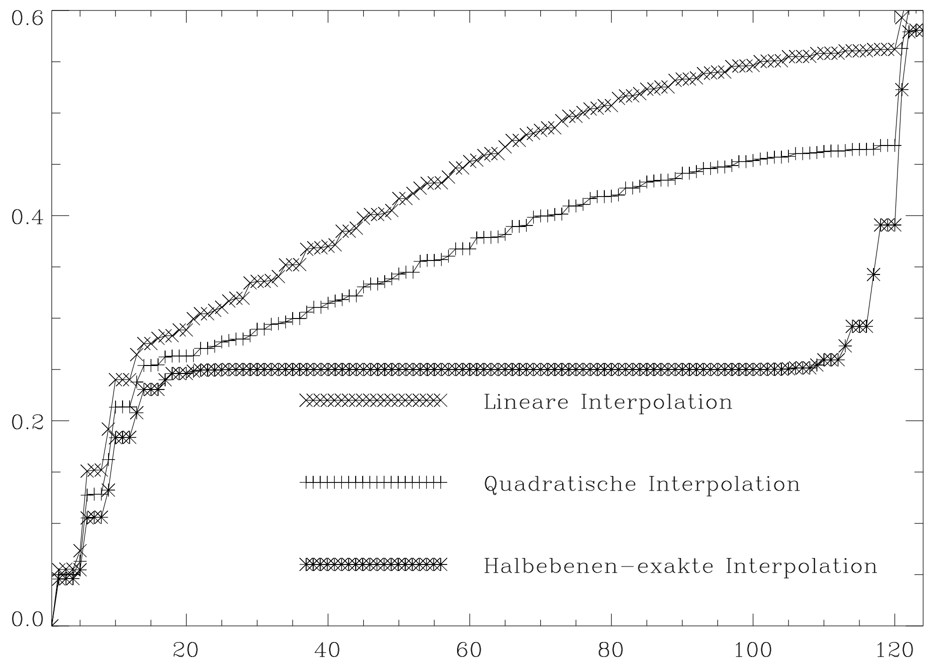


Abbildung 16: Eigenwerte von $S^T S$, $h = 1/32$

Das Spektrum des Randoperators S, das bei der Randdiskretisierung (4.8) nur noch aus wenigen Eigenwertclustern besteht, erlaubt eine Beschleunigung des Uzawa-Verfahrens. Zunächst könnte man im Prinzip wieder Produktiterationen wie beim kontinuierlichen Operator auf transformierten Gebieten verwenden und in jedem Schritt durch einen passenden Dämpfungsparameter einen Eigenwertcluster eliminieren. Für die Praxis ist dies aber zu aufwendig, da die Eigenwerte hier nicht a priori bekannt sind und ihre Berechnung aufwendig ist.

Für symmetrisch positiv semidefinite Matrizen $\tilde{S}$ schafft hier das CG-Verfahren Abhilfe, das die Dämpfungsparameter automatisch „richtig" wählt in dem Sinn, daß der Fehler in der Energienorm

$$\|e\|_E := \|e^T \tilde{S} e\|$$

nach n CG-Schritten minimal ist unter allen Produktiterationen aus n Schritten der Form $x^{(i+1)} = x^{(i)} - \rho_i(\tilde{S}x^{(i)} - f)$.

Der einfachste Weg, diese Minimierungseigenschaft auf den nicht symmetrischen Randoperator S zu übertragen, ist die Anwendung des CG-Verfahrens auf $\tilde{S} := S^T S$, das für beliebiges S stets positiv semidefinit ist. Entscheidend für die Konvergenz ist nun das Spektrum von $S^T S$, für das derselbe qualitative Befund gilt wie für das Spektrum von S, vgl. Abbildung 16. Als Basis des Raums W_R der Randfunktionen wurde dabei die gewöhnliche Knotenbasis gewählt.

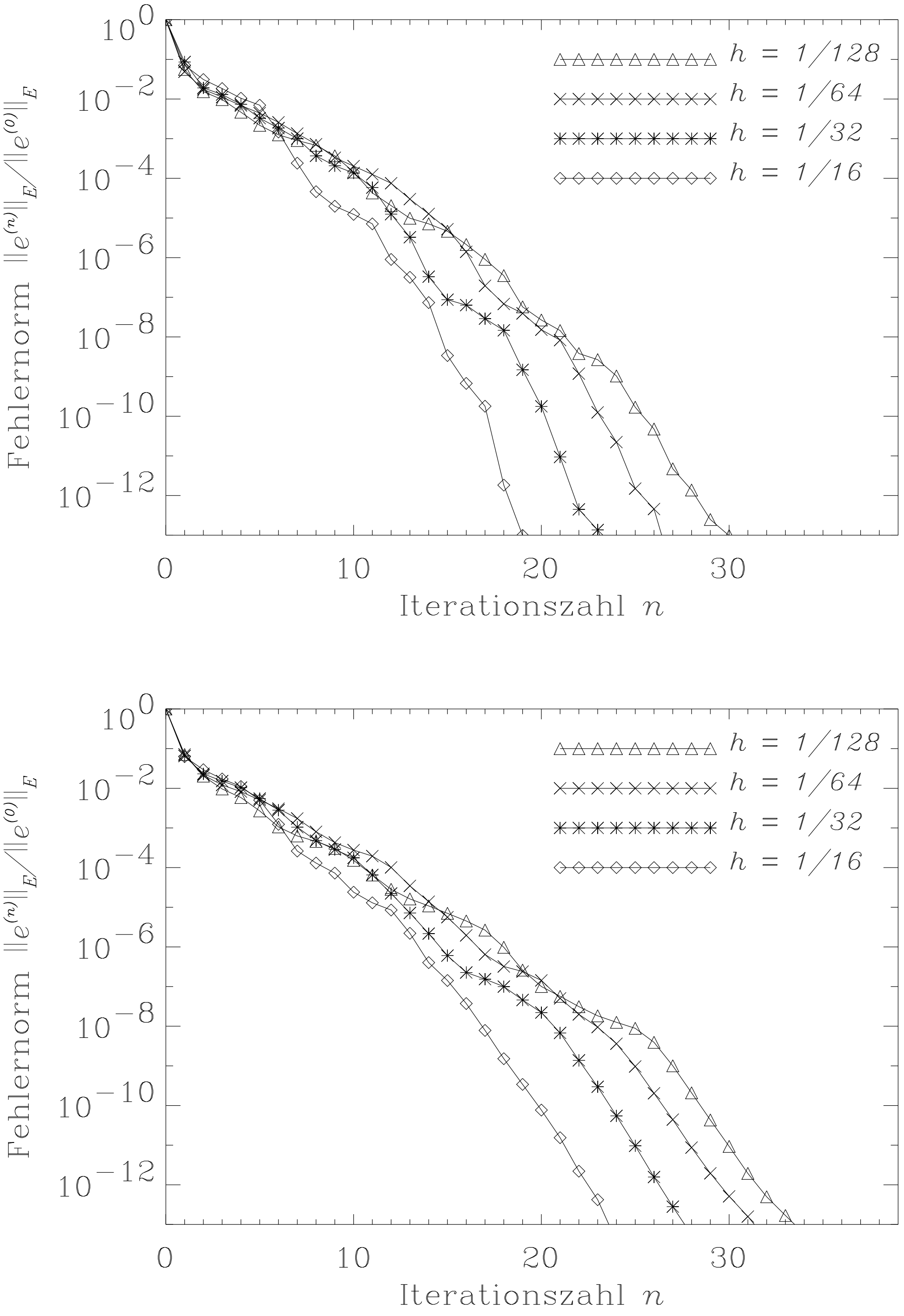


Abbildung 17: Konvergenz des CG-Verfahrens für $S^T S$ mit Randdiskretisierung (4.8) (oben) bzw. (4.6) (unten)

Weil das Spektrum so stark geclustert ist, wird die Konvergenz des CG-Verfahrens mit steigender Iterationszahl immer schneller, wie man im oberen Diagramm von Abbildung 17 beobachten kann. Dort ist die Fehlerreduktion für verschiedene Maschenweiten und jeweils einer zufällig gewählten rechten Seite aufgetragen, man sieht das „Abstürzen“ des Fehlers lange bevor die Iterationszahl die Dimension des Suchraums n_R erreicht und das CG-Verfahren ohne weitere Voraussetzung an den Operator zum direkten Löser entarten würde.

Der Gewinn, der durch die speziellen Randbedingungen für die Impulsgleichungen erzielt wird, ist allerdings nicht sehr groß, da auch bei konventionellen Diskretisierungen das CG-Verfahren eine gewisse Clusterung des Spektrums ausnutzen kann und gute Konvergenzraten liefert. Das untere Diagramm in Abbildung 17 zeigt zum Vergleich die entsprechende Fehlerreduktion mit der Randbedingung (4.6).

Die starke Fehlerreduktion bei bei der Randbedingung (4.8) setzt zu spät ein, um die Zahl der Iterationen, die zum Erreichen der Maschinengenauigkeit nötig sind, deutlich zu verringern. Andererseits wird der Gewinn einiger Iterationen auch durch keinen Mehraufwand pro Iterationsschritt erkauft.

Dennoch erweist sich dieser Ansatz, der nur die Verteilung der Eigenwerte ausnutzt, als viel weniger effektiv als das im folgenden Kapitel hergeleitete Verfahren, das zusätzlich Eigenschaften der zugehörigen Eigenvektoren ausnutzt.

4.6 Eckkorrekturen

Wir betrachten weiter den Randoperator S für die diskrete Stokes-Gleichung auf dem Quadrat mit den Randbedingungen (4.8) für die Impulsgleichung.

Für ein effizientes Iterationsverfahren kann man nicht nur ausnutzen, daß das Spektrum von S nur aus wenigen Clustern besteht, sondern auch, daß „fast alle“ Eigenwerte sehr nahe bei $1/2$ liegen — es sind bei insgesamt n_R Unbekannten auf dem Rand nur $O(\log n_R)$ deutlich von $1/2$ verschiedene Eigenwerte.

Diese sind es aber, die die Kosten für die Iteration bestimmen, weil alle übrigen Komponenten des Fehlers mit einem Uzawa-Schritt gleichzeitig praktisch ausgelöscht werden können. Deshalb ist es sinnvoll, mehr Aufwand zu investieren, um die Fehlerkomponenten dieses kleinen Teilraums zu dämpfen.

Wir zerlegen dazu den Suchraum W_R in eine direkte Summe

$$W_R =: W_{R,1} \oplus W_{R,2}$$

so, daß

$$Sp \approx \frac{1}{2}p \quad \text{für alle } p \in W_{R,2}$$

und auch $W_{R,1}$ in möglichst guter Näherung invariant unter S ist. In der Praxis läßt sich letzteres dadurch erreichen, daß man die Teilräume zueinander orthogonal wählt.

Für einen Iterationsschritt wird das Residuum $r = Sp - f_S$ in zwei Komponenten $r_1 \in W_{R,1}$ und $r_2 \in W_{R,2}$ zerlegt. Die Korrekturrichtung setzt sich zusammen aus $2r_2$ — was dem näherungsweisen Lösen der Schurkomplementgleichung für r_2 entspricht — und einer Korrektur aus $W_{R,1}$, die berechnet wird durch Lösen eines — vergleichsweise sehr kleinen — linearen Gleichungssystems, das aus dem auf $W_{R,1}$ eingeschränkten Randoperator entsteht, mit r_1 als rechter Seite.

Seien die Spalten von

$$T = (t_1, \ldots, t_{n_R})$$

eine Basis von W_R, die sich partitionieren läßt in

$$T = (T_1, T_2)$$

mit $\langle T_1 \rangle = W_{R,1}$ und $\langle T_2 \rangle = W_{R,2}$. Entsprechend wird der in dieser Basis dargestellte Randoperator partitioniert als

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

und das Residuum als

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Als Korrekturrichtung ergibt sich dann

$$p^{(\mathrm{neu})} = p^{(\mathrm{alt})} - \begin{pmatrix} S_{11}^{-1} r_1 \\ 2r_2 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

(Falls die konstante (Rand-) Funktion in dem von T_1 aufgespannten Raum liegt, ist S_{11} singulär, in diesem Fall sei S_{11}^{-1} die verallgemeinerte Inverse).

Dies führt auf ein Iterationsverfahren mit Iterationsmatrix

$$M = I - \begin{pmatrix} S_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = I - \begin{pmatrix} I & S_{11}^{-1} S_{12} \\ 2S_{21} & 2S_{22} \end{pmatrix}.$$

Weil für den Iterationsfehler $e^{(i)}$ nach i Schritten eines solchen linearen Iterationsverfahrens die Fehlerreduktion in der euklidischen Norm abgeschätzt werden kann durch

$$\|e^{(i)}\| \le \|M\|^i \|e^{(0)}\|$$

mit der Spektralnorm $\|M\|$, der Wurzel aus dem größten Eigenwert von $M^T M$, soll diese möglichst klein sein. Wir dürfen ein schnelles Iterationsverfahren erwarten, falls T_2 so gewählt wird, daß $S_{22} \approx \frac{1}{2} I$, $S_{12} \approx 0$ und $S_{21} \approx 0$.

Im Extremfall $T_1 = \emptyset$ wird das Verfahren zum gewöhnlichen Uzawa-Verfahren (mit $\rho = 2$); im Fall $T_2 = \emptyset$ entartet es zum direkten Löser.

Eine mögliche, wenn auch sehr aufwendige Wahl von T sind die Eigenfunktionen von S, geordnet nach abnehmendem Abstand des zugehörigen Eigenwertes von 1/2, also beginnend mit der konstanten Funktion und den acht Funktionen aus Abbildung 15. Je mehr dieser Basisfunktionen dem Block T_1 zugeschlagen werden, desto mehr Cluster extremer Eigenwerte werden aus dem Spektrum eliminiert und desto kleiner wird die Spektralnorm der Iterationsmatrix, in Abbildung 18 aufgetragen gegen die Anzahl der eingesetzten Basisfunktionen in T_1, d.h. gegen die Dimension des zu lösenden Gleichungssystems bei der Berechnung von $S_{11}^{-1} r_1$.

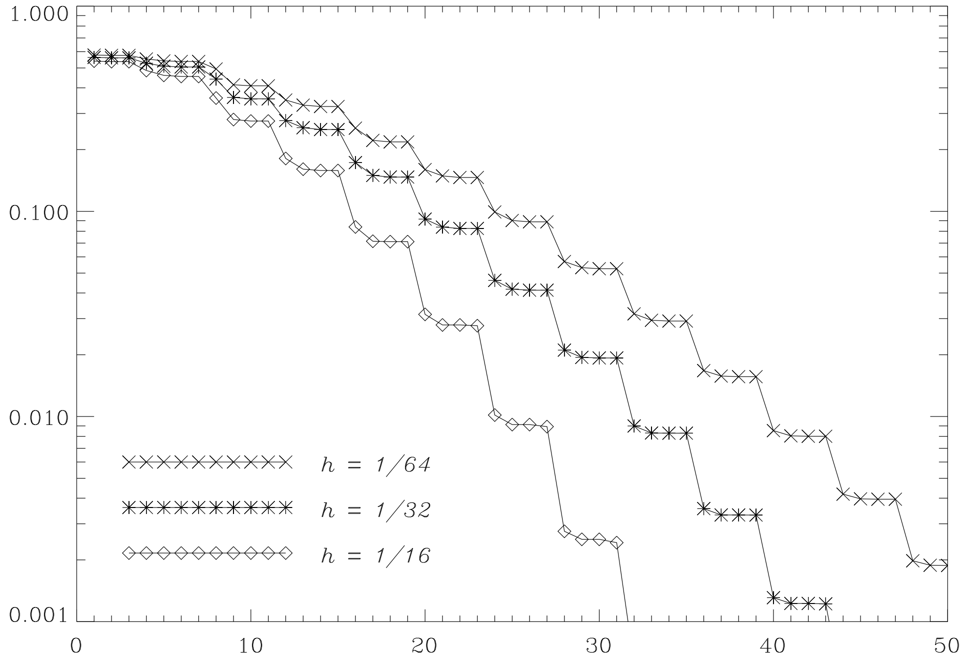


Abbildung 18: Vorkonditionierung mit Eigenfunktionen: Anzahl der verwendeten Basisfunktionen gegen Spektralnorm der Iterationsmatrix

Zwei Ergebnisse seien festgehalten:

- Man erreicht mit moderater Dimension von $W_{R,1}$ Fehlerreduktionssraten von z.B. 1/100 pro Iterationsschritt, und

- bei Halbierung der Maschenweite $h = 2^{-k}$ muß man die Dimension von $W_{R,1}$ um 8 erhöhen, um wieder eine ähnliche Reduktionsrate zu erzielen. Dies spiegelt das Auftreten von zwei zusätzlichen Viererclustern im Spektrum von S wieder. Da dem eine Verdopplung der Anzahl der Unbekannten des Randsystems entspricht, spielt $W_{R,1}$ für feiner werdende Gitter beim Aufspannen des Raums eine immer kleinere Rolle, weil seine Dimension im Verhältnis zur Dimension von $W_{R,2}$ schnell sehr klein wird.

Ein praktikables Verfahren sollte sich natürlich nicht auf die a priori nicht bekannten und aufwendig zu berechnenden Eigenfunktionen stützen. Entscheidend dafür, daß sich dies vermeiden läßt, ist, daß es gelingt, den benötigten Teilraum $W_{R,1}$ durch die Geometrie des Berechnungsgebietes zu charakterisieren: die Eigenfunktionen zu den extremen Eigenwerten (vgl. Abbildungen 14 und 15) bilden charakteristische Spitzen in der Nähe der Ecken aus und sind überall sonst sehr glatt. Wir werden deshalb zu jeder Ecke Ansatzfunktionen wählen, mit denen sich solche Funktionen gut approximieren lassen, dies ergibt die Basis T_1.

Für T_2 wird eine Basis des orthogonalen Komplements des von T_1 aufgespannten Teilraums gewählt, bezüglich des l_2-Skalarprodukts der Randfunktionen. Dies wird durch die Beobachtung motiviert, daß, obwohl S nicht symmetrisch ist, Eigenfunktionen von S zu verschiedenen Eigenwerten numerisch beinahe orthogonal sind. Die Basis T_2 wird für das Iterationsverfahren selbst nicht benötigt, da wegen der Orthogonalität der beiden Teilräume r_2 die Orthogonalprojektion des Residuums ist, die alleine durch Verwendung von T_1 berechnet werden kann, zur Berechnung des Korrekturvektors wird r_2 nur um den Faktor 2 gestreckt, was unabhängig von der gewählten Basis T_2 ist.

Geeignete Basisfunktionen für T_1 erhält man durch eine Variante der sogenannten Punktblock-Systeme, wie sie bei bestimmten Implementierungen von Mehrgitterverfahren zum Lösen elliptischer Differentialgleichungen verwendet werden [Griebel 1993, 1995]. Dort werden Basisfunktionen, die auf verschiedenen Leveln des Mehrgitterverfahrens demselben Gitterpunkt zugeordnet sind, zu einem System zusammengefaßt, das also aus Ansatzfunktionen besteht, deren Träger unterschiedliche Größe, aber denselben Mittelpunkt haben. Dieser Ansatz führt zu Iterationsverfahren, die Mehrgitter-Konvergenzraten mit guten Parallelisierungseigenschaften verbinden [Griebel und Neunhoeffer 1994] und sich auch bei Dünngitterdiskretisierungen einsetzen lassen [Griebel und Zimmer 1993; Griebel, Zenger und Zimmer 1993].

Hier verwenden wir nur für die Eckpunkte des Quadrats Punktblocksysteme, mit denen sich die Eigenfunktionen zu den extremen Eigenwerten gut approximieren lassen. Zur Modellierung der Eigenfunktionen, die symmetrisch bezüglich einer Ecke ξ_i sind, verwenden wir ein solches (eindimensionales) Punktblocksystem, das pro Ecke aus k Hutfunktionen

$$s_l^i(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-\xi_i|}{2^l h} & \text{für } 0 \leq |x-\xi_i| \leq 2^l h, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$l = 0, \ldots, k-1$ (Abbildung 19, obere Bilder) besteht.

Zusätzlich benötigen wir für die asymmetrischen Eigenfunktionen pro Ecke $k-1$ asymmetrische Basisfunktionen

$$a_l^i(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-(\xi_i+2^l h)|}{2^l h} & \text{für } 0 \leq |x-(\xi_i+2^l h)| \leq 2^l h, \\ -1 + \dfrac{|x-(\xi_i-2^l h)|}{2^l h} & \text{für } 0 \leq |x-(\xi_i-2^l h)| \leq 2^l h, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$l = 0, \ldots, k-2$ (Abbildung 19, zweitunterstes Bild).

Da alle bisher eingeführten Basisfunktionen in den Seitenmitten verschwinden, was die zu modellierenden Eigenfunktionen nicht tun, werden weitere asymmetrische Basisfunktionen m^i verwendet, deren Träger sich über zwei ganze Seiten erstrecken. Die zur Ecke ξ_2 antisymmetrische Funktion m^2 wird definiert als

$$m^2(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{|x-(\xi_1+\xi_2)/2|}{(\xi_2-\xi_1)/2} & \text{für } \xi_1 \leq x < \xi_2, \\ -1 + \dfrac{|x-(\xi_2+\xi_3)/2|}{(\xi_3-\xi_2)/2} & \text{für } \xi_2 \leq x < \xi_3, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

entsprechend m^1 und m^3 zu den Ecken ξ_1 und ξ_3 (Abbildung 19, unten); das zur Ecke ξ_4 antisymmetrische m^4 wäre von den ersten drei Funktionen linear abhängig: $m^4 = -(m^1 + m^2 + m^3)$.

Schließlich wird noch die konstante Funktion $c \equiv 1$ in T_1 aufgenommen, damit enthält T_1 insgesamt $8k$ Basisfunktionen.

Die in Tabelle 1 zusammengestellten Reduktionsraten für einen Iterationsschritt gemäß (4.9) , bei dem also die Schurkomplementgleichung auf dem Punktblocksystem T_1 direkt gelöst wird, zeigen, daß die Eigenfunktionen, die beim einfachen Uzawa-Verfahren die Konvergenz dominierten, so gut von den Punktblocksystemen aufgefangen werden, daß man mit je drei Iterationsschritten etwa fünf Dezimalstellen Genauigkeit gewinnt.

h	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
$\dim W_R$	60	124	252	508
$\dim W_{R,1}$	32	40	48	56
$\|M\|$	0.0239	0.0219	0.0212	0.0213
$-\log_{10} \|M\|$	1.62	1.66	1.67	1.67

Tabelle 1: Konvergenzrate der Iteration (4.9) mit dem Punktblocksystem T_1.

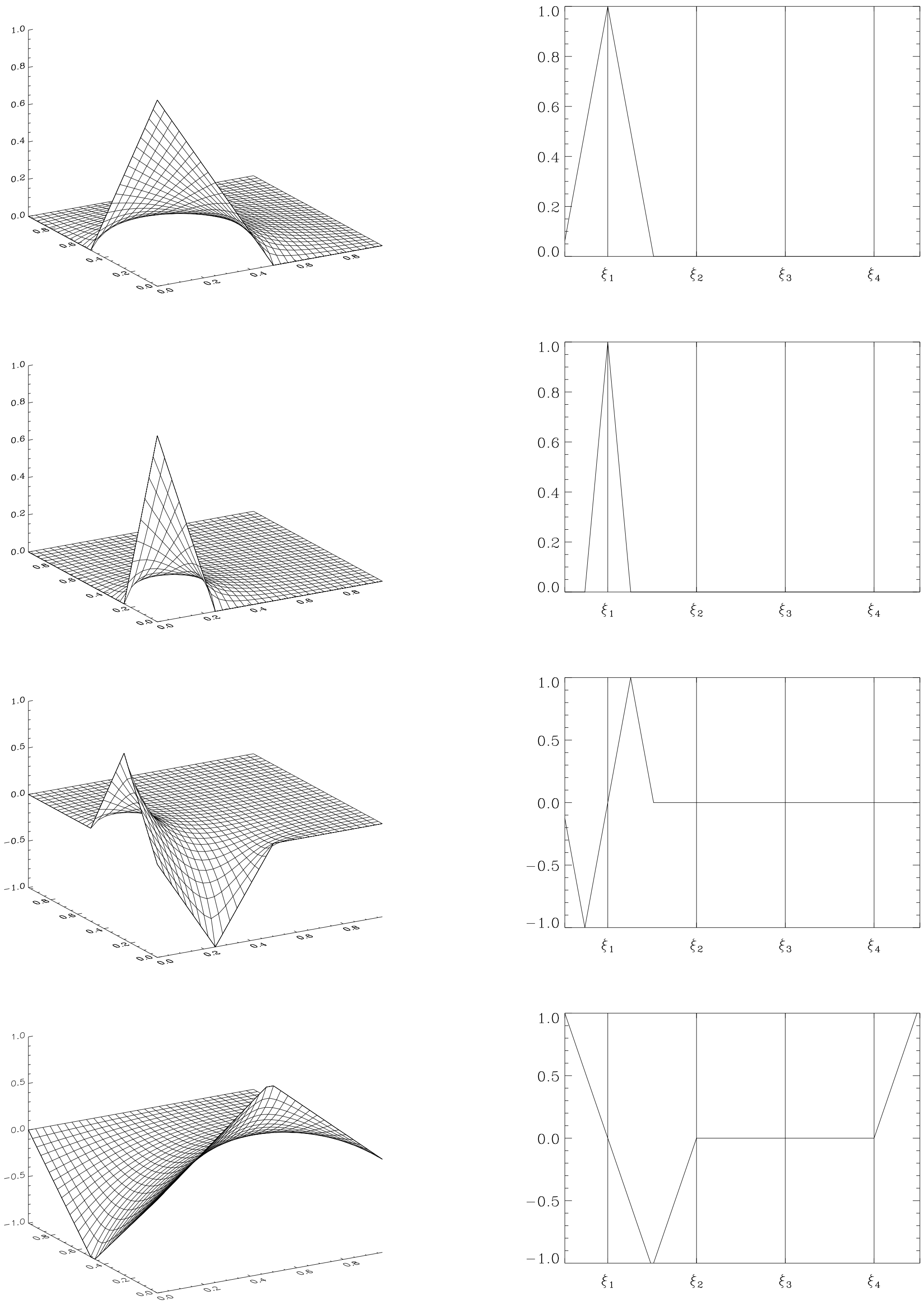


Abbildung 19: Vier Punktblock-Basisfunktionen: s^1_{k-1}, s^1_{k-2}, a^1_{k-2} und m^1 (von oben nach unten, $h = 2^{-5}$).

Die zusätzlichen Kosten pro Iterationsschritt gegenüber dem gewöhnlichen Uzawa-Verfahren sind gering, weil die Dimension von $W_{1,R}$ im Verhältnis zum Gesamtproblem verschwindend gering ist: bei einer Maschenweite $h = 2^{-k}$ gibt es

- $O(4^k)$ Gitterpunkte (für $k = 7$ auf dem Quadrat genau 16384); durch den Übergang auf den Randoperator interessieren davon nur noch die
- $O(2^k)$ Randpunkte ($k = 7$: 508), aber auch hier wird die Konvergenzrate bestimmt von den
- $O(k)$ Eigenfunktionen mit deutlich von 1/2 verschiedenen Eigenwerten (z.B. 56 für $k = 7$, die genaue Zahl hängt von der Schranke für „deutlich verschieden“ ab). Diese werden mit dem Punktblocksystem T_1 hinreichend gut herausgefiltert und können getrennt behandelt werden.

An zusätzlichen Kosten entstehen:

- Vorbereitungsarbeiten, die pro Berechnungsgebiet nur einmal anfallen:
  - Aufstellen und Orthogonalisieren von T_1: $O(k)$ Vektoren der Länge $O(2^k) \rightsquigarrow O(k^2 2^k)$ Operationen.
  - S_{11} aufstellen: $O(k)$ Anwendungen des Randoperators $S \rightsquigarrow O(k4^k)$ Operationen.
  - Dreiecks- bzw. Singulärwertzerlegung von $S_{11} \rightsquigarrow O(k^3)$ Operationen.
- Zusatzkosten pro Iterationsschritt
  - Zerlegung des Residuums in r_1 und r_2; Entwicklung von r_1 in T_1 bzw. der daraus gewonnenen Orthogonalbasis $\rightsquigarrow O(k2^k)$ Operationen.
  - Berechnung von $S_{11}^{-1} r_1 \rightsquigarrow O(k^2)$ Operationen.
  - Bilden der Korrekturrichtung $\rightsquigarrow O(2^k)$ Operationen.

Dabei wurde das Anwenden des Randoperators S mit $O(4^k)$ Operationen angesetzt, was sich sowohl ergibt, wenn man S explizit, also als (vollbesetzte) $n_R \times n_R$ Matrix, vorliegen hat, als auch, wenn es in jedem Schritt durch harmonisches Fortsetzen, Anwenden von $BA^{-1}B^*$ und Einschränken auf den Rand ausgewertet wird — vorausgesetzt, das Lösen der Laplace- bzw. Poissongleichungen verursacht konstanten Aufwand für jeden der $O(4^k)$ Gitterpunkte.

Damit kostet ein gewöhnlicher Uzawa-Schritt auch $O(4^k)$ Operationen — daß das harmonische Fortsetzen entfallen kann, da die Korrekturrichtungen automatisch als harmonische Funktionen entstehen, spielt für die Größenordnung keine Rolle — diese Kosten dominieren die Zusatzkosten pro Iterationsschritt.

Nur das Aufstellen von S_{11} ist relativ teuer, andererseits ist diese Matrix nur vom Berechnungsgebiet Ω abhängig und als $8k \times 8k$-Matrix nicht aufwendig zu speichern.

Die Matrix S_{11} ist eine sehr kompakte Beschreibung des Schurkomplements: sie beschreibt mit hinreichender Genauigkeit dessen Verhalten für diejenigen Fehlerkomponenten, die harmonisch sind, aber nicht zum Eigenwert $1/2$ gehören. Dieses wiederum ist gerade die gebietsabhängige Information, die zur Konstruktion eines schnellen Iterationsverfahrens (4.9) notwendig ist.

5 Andere Sattelpunktprobleme

Das Schurkomplement der stationären Stokes-Gleichung wurde in den vorangegangenen Kapiteln analysiert, indem es auf die harmonischen Funktionen eingeschränkt wurde und für diese wiederum Fehlermoden untersucht wurden, die entstehen, indem eindimensionale Fouriermoden vom Rand des Gebietes ins Innere harmonisch fortgesetzt werden.

Wir wenden diese Technik nun auf zwei weitere Probleme an: Zum einen wird der Übergang von der stationären zur verallgemeinerten — oder zeitabhängigen — Stokes-Gleichung in primitiven Variablen betrachtet, zum anderen die Stromfunktion–Wirbelstromstärke–Formulierung, die sich mit ähnlichen Methoden behandeln läßt.

5.1 Die verallgemeinerte Stokes-Gleichung

Die verallgemeinerte Stokes-Gleichung, wie sie z.B. bei einer impliziten Diskretisierung der zeitabhängigen Stokes-Gleichung zu lösen ist, entsteht aus der gewöhnlichen, indem der Laplaceoperator $A = -\Delta$ durch einen Helmholtzoperator $A_\alpha := \alpha I - \Delta$ mit $\alpha \geq 0$ — das im Fall des zeitabhängigen Problems der Kehrwehrt des Zeitschritts $1/\delta t$ ist — ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \alpha u - \Delta u + \operatorname{grad} p &= f, \\ -\operatorname{div} u \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

$B = -\operatorname{div}$ und damit $B^* = \operatorname{grad}$ sind unabhängig von α, also dieselben wie im stationären Fall $\alpha = 0$.

Um die Ergebnisse aus Kapitel 3 zu übertragen, liegt es nahe, statt $\tilde{A} = \Delta$ nun ebenfalls einen Helmholtzoperator $\tilde{A}_\alpha := \Delta - \alpha I$ zu wählen, während wie im stationären Fall $\tilde{B} := \operatorname{div}$ ist .

Damit ist die Vertauschungsrelation $\tilde{A}B = \tilde{B}A$ (2.4) erfüllt, als Suchraum ist also wiederum nur der Kern von $\tilde{B}B^* = \Delta$, also die harmonischen Funktionen, relevant.

Allerdings ist $\tilde{A}_\alpha \neq \tilde{B}B^*$ für $\alpha > 0$, damit ist die Bedingung (2.6) verletzt. Das zu einem harmonischen Fehler $p^{(0)} - p^*$ gehörende Residuum $S(p^{(0)} - p^*)$ liegt nicht selbst im Suchraum, es erfüllt vielmehr eine homogene Helmholtzgleichung.

Ein Iterationsverfahren, das den eingeschränkten Suchraum nutzen will, muß also eine harmonische Suchrichtung extra konstruieren. Eine Möglichkeit hierfür ist, in jedem Iterationsschritt eine Laplacegleichung zu lösen, für die mittels des Residuums geeignete Randbedingungen bestimmt werden.

Passende Randbedingungen findet man durch Analyse der schon im stationären Fall verwendeten harmonischen Moden. Zunächst — analog zum Kapitel 3.4 — für die Halbebene $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$:

$$p := e^{-kx_1} \cdot e^{ikx_2},$$

$k \in \mathbb{N}$. Lösen der Impulsgleichungen gibt mit

$$\tilde{k} := \sqrt{\alpha + k^2}$$

für $\alpha > 0$ ein Geschwindigkeitsfeld $u = (u_1, u_2)^T$ mit

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \frac{k}{\alpha}\left(e^{-kx_1} - e^{-\tilde{k}x_1}\right) e^{ikx_2}, \\ u_2(x_1, x_2) &= -i \cdot u_1(x_1, x_2) \end{aligned}$$

mit der Divergenz

$$d := Sp = \operatorname{div} u = \frac{k(\tilde{k} - k)}{\alpha} e^{-\tilde{k}x_1} e^{ikx_2}.$$

Wegen

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{k(\tilde{k} - k)}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{k}{\alpha}\left(e^{-kx_1} - e^{-\tilde{k}x_1}\right) = \frac{1}{2} x_1 e^{-kx_1}$$

(gleichmäßig auf $[0, \infty)$), ergeben sich im Grenzfall $\alpha \to 0$ gerade die Moden aus Kapitel 3.4.

Auf Randfunktionen bezogen, bildet das Schurkomplement ab

$$e^{ikx_2} \mapsto \frac{k(\tilde{k} - k)}{\alpha} e^{ikx_2},$$

die Moden sind also Eigenschwingungen, aber nicht mehr zum von k unabhängigen Eigenwert $1/2$.

Für die Normalableitungen gilt

$$\begin{aligned} -\left.\frac{\partial p}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} &= k e^{ikx_2}, \\ -\left.\frac{\partial d}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} &= \tilde{k} \frac{k(\tilde{k} - k)}{\alpha} e^{ikx_2}. \end{aligned}$$

Mithin ergibt die Einschränkung der Lösung der Laplacegleichung mit Neumann-Randbedingung $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial d}{\partial n}$ auf den Rand die Mode

$$\frac{\tilde{k}(\tilde{k} - k)}{\alpha} e^{ikx_2}$$

Löst man zwei Laplace-Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta s_1 = 0, &\quad s_1|_{\partial\Omega} = d|_{\partial\Omega}, \\ \Delta s_2 = 0, &\quad \frac{\partial s_2}{\partial n} = \frac{\partial d}{\partial n}, \end{aligned}$$

gilt $p = s_1 + s_2$ auf dem Rand, weil dort $s_1(0, x_2) + s_2(0, x_2) = e^{ikx_2}$ gilt und im Inneren, weil alle drei Funktionen harmonisch sind.

Diese Beziehung gilt unabhängig von k, daher können durch einen solchen Korrekturschritt alle Fehlermoden gleichzeitig eliminiert werden.

Entsprechendes gilt auch für den Einheitskreis $\Omega = D$ und die harmonischen Fehlermoden $p = r^k e^{ik\varphi}$ (vgl. Kapitel 3.3):

Satz 5.1 (Verallgemeinerte Stokes-Gleichung auf dem Einheitskreis) *Seien $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$,*

$$p : D \to \mathbb{C},\ p(r, \varphi) = r^k e^{ik\varphi}$$

$$u_1 : D \to \mathbb{C},\ \alpha u_1 - \Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad u_1|_{\partial D} = 0 \tag{5.1}$$

$$u_2 : D \to \mathbb{C},\ \alpha u_2 - \Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad u_2|_{\partial D} = 0 \tag{5.2}$$

$$d := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

Dann gilt $p = s_1 + s_2$ mit

$$\Delta s_1 = 0, \quad s_1|_{\partial D} = d|_{\partial D}, \tag{5.3}$$

$$\Delta s_2 = 0, \quad \frac{\partial s_2}{\partial n} = \frac{\partial d}{\partial n}. \tag{5.4}$$

Beweis: Sei

$$u_1 = \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l r^l\right) e^{i(k-1)\varphi}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 - \alpha u_1 &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l \left((l+k-1)(l-k+1) r^{l-2} - \alpha r^l\right)\right) e^{i(k-1)\varphi} \\
&= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \left(c_l (l+k-1)(l-k+1) - \alpha c_{l-2}\right) r^{l-2}\right) e^{i(k-1)\varphi} \\
&\overset{!}{=} k r^{k-1} e^{i(k-1)\varphi} = \frac{\partial p}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

mit $c_l := 0$ für $l < 0$.

Also ist für $l \geq 0$

$$(l+k-1)(l-k+1)c_l - \alpha c_{l-2} = \begin{cases} k & \text{für } l = k+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.5}$$

Der Randbedingung $u_1|_{r=1} = 0$ entspricht die Bedingung

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l = 0. \tag{5.6}$$

Ist u_1 Lösung von (5.1), erfüllt $u_2 := iu_1$ wegen $\frac{\partial p}{\partial x_1} = i\frac{\partial p}{\partial x_2}$ Gleichung (5.2). Dann ist die Divergenz

$$d = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) u_1 = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(l-k+1)r^{l-1}e^{ik\varphi}$$

und

$$\begin{aligned} s_1 &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot 1 \cdot (l-k+1)\right) r^k e^{ik\varphi}, \\ s_2 &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \frac{l-1}{k} \cdot (l-k+1)\right) r^k e^{ik\varphi}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l}{k}(l+k-1)(l-k+1)\right) r^k e^{ik\varphi} \\ &= \left(\left(\sum_{l=0}^{\infty} c_{l-2}\frac{\alpha}{k}\right) + 1\right) r^k e^{ik\varphi} \\ &= p \end{aligned}$$

wegen der Koeffizientengleichung (5.5) und der Randbedingung (5.6). □

Mit diesem Iterationsverfahren eng verwandt ist das von Cahouet und Chabard [1988], das auch in [Bramble und Pasciak 1994] bzw. [Habashi 1995, Kap. 3] analysiert wird. Bei diesem Verfahren wird eine Poissongleichung

$$\Delta s = d, \ \frac{\partial s}{\partial n} = 0$$

gelöst und der Korrekturvektor

$$\delta p = d - \alpha s$$

gebildet. Daher gilt

$$\Delta\delta p = \Delta d - \alpha d = \Delta p$$

im Inneren und

$$\frac{\partial \delta p}{\partial n} = \frac{\partial d}{\partial n} \tag{5.7}$$

am Rand. Speziell ist für harmonisches p auch δp harmonisch und wegen der Randbedingung (5.7) gilt $\delta p = s_2$ mit s_2 aus (5.3).

Cahouet und Chabard zeigen, daß ihr Verfahren im Fall periodischer Randbedingungen an u im ersten Iterationsschritt die exakte Lösung liefert. Obige

Rechnung zeigt, daß im Fall von Dirichlet-Randbedingungen an u im Fall der Halbebene die Korrektur um einen Faktor

$$\frac{1}{2} \leq \frac{s_2}{p} = \frac{\tilde{k}(\tilde{k} - k)}{\alpha} < 1$$

zu klein ist, die Einschränkung gilt für alle α und k. Für den Kreis ist der entsprechende Faktor $(\sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \frac{l-1}{k} \cdot (l - k + 1)$ in Abbildung 20 aufgetragen.

Der kritische Fall ist jeweils die stationäre Stokes-Gleichung $\alpha = 0$, für die auf der Halbebene und auf dem Kreis $s_2 = p/2$ gilt, je größer α wird, desto näher kommt s_2/p dem Wert Eins, bei dem die Korrektur exakt wäre.

Lösen der zusätzlichen Laplacegleichung (5.3) liefert für alle α den fehlenden Anteil $s_1 = p - s_2$.

Für viele praktische Anwendungen genügt s_2 als Korrekturvektor völlig — die Konvergenzrate des zugehörigen Iterationsverfahrens wäre für Kreis und Halbebene ja immer noch $1/2$ — dies bestätigt sich in numerischen Experimenten auch für komplizierte Gebiete und dreidimensionale Rechnungen [Cahouet und Chabard 1988].

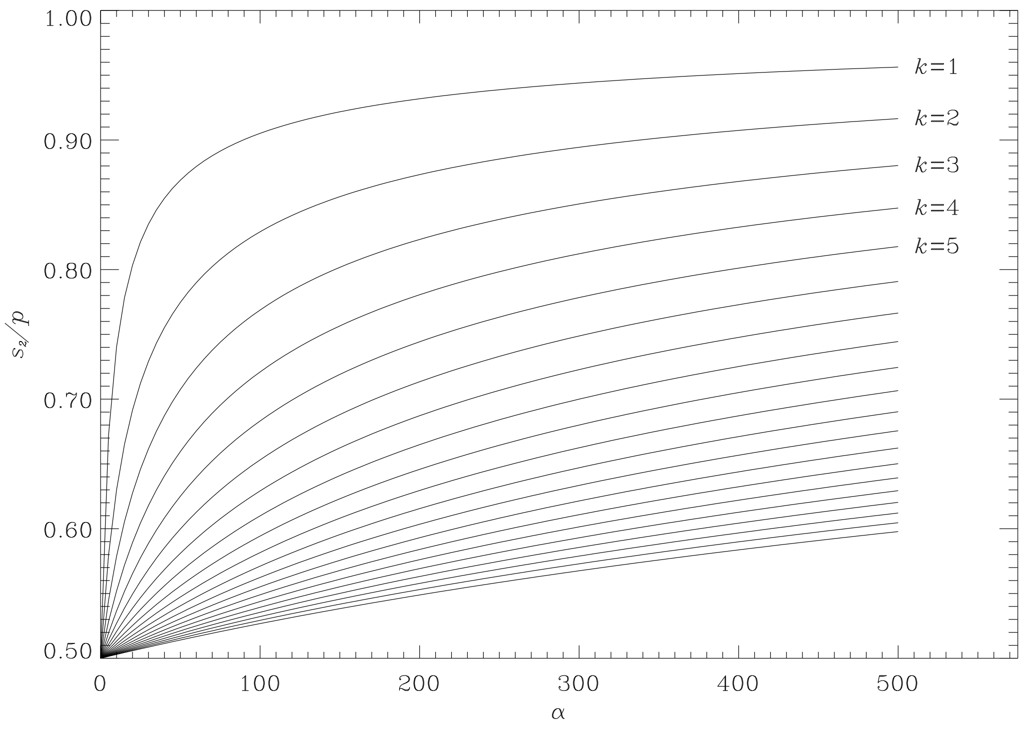


Abbildung 20: Anteil von s_2 an der exakten Druckkorrektur auf dem Kreis für verschiedene Werte von α und die ersten 20 Moden.

5.2 Die Stokes-Gleichung im (ψ, ω)-System

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Stokes-Gleichung in der Formulierung mit Stromfunktion

$$\psi : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mit } \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -u_2, \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = u_1$$

und Wirbelstromstärke

$$\omega : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mit } \omega := \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

die folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} \Delta\psi - \omega &= 0, \\ \Delta\omega &= 0, \\ \psi|_{\partial\Omega} = \psi_\Gamma, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \psi_n. \end{aligned}$$

Durch Übergang zu diesem System hat man nur noch zwei Feldgrößen statt drei (u, v und p), die Differentialgleichungen sind relativ einfach zu lösen, da es sich nur um eine Laplace- und eine Poissongleichung handelt, wofür wieder Standardverfahren eingesetzt werden können. Falls für ω eine Randbedingung vorgeschrieben wäre, hätte man ein nur einseitig gekoppeltes Problem: man könnte zunächst ω berechnen und es dann als rechte Seite für die Poissongleichung für ψ benutzen.

Das (ψ, ω)-System kann man analog zur Formulierung in primitiver Variablen mit Laplacegleichung für den Druck betrachten:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \operatorname{grad} p &= 0, \\ \Delta p &= 0, \\ u_{\partial\Omega} = u_\Gamma, \quad \operatorname{div} u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Dabei übernimmt ω die Rolle des Lagrange-Multiplikators p, für dessen Laplace-Gleichung keine Randbedingungen gegeben sind, während ψ die Rolle des Geschwindigkeitsfelds u übernimmt, wofür sowohl Dirichlet- als auch Neumann-Randbedingungen vorgeschrieben sind.

Analog zum Kapitel 3.4 konstruieren wir Iterationsverfahren, die versuchen, Randwerte für ω zu bestimmen, dann durch Lösen einer Laplacegleichung ω selber berechnen und $\Delta\psi = \omega$ lösen, wobei eine der beiden ψ-Randbedingungen vorgegeben wird und der dabei enstehende Fehler in der anderen Randbedingung als Residuum betrachtet wird, aus dem eine Korrekturrichtung für die ω-Randwerte für die nächste Iteration bestimmt wird.

Für die Analyse beschränken wir uns wieder auf den homogenen Fall $\psi_\Gamma = \psi_n = 0$ und betrachten die Halbebene $\Omega = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ und eine (harmonische und beschränkte) Fehlermode ω

$$\omega(x_1, x_2) := e^{-kx_1} \cdot e^{ikx_2}$$

also mit den Randwerten

$$\omega_\Gamma(x_2) = e^{ikx_2}$$

und der Normalableitung

$$\omega_n(x_2) = k \cdot e^{ikx_2}.$$

Lösen von $\Delta\psi = \omega$ mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen für $x_1 = 0$ ergibt

$$\psi^D(x_1, x_2) := -\frac{1}{2k} x_1 e^{-kx_1} e^{ikx_2}$$

mit der Normalableitung

$$\psi_n^D(x_2) = \frac{1}{2k} e^{ikx_2},$$

während die homogene Neumann-Randbedingung mit der zusätzlichen Bedingung

$$\int_0^{2\pi} \psi(0, x_2) dx_2 = 0$$

auf

$$\psi^N(x_1, x_2) := -\frac{1}{2k}\left(x_1 + \frac{1}{k}\right) e^{-kx_1} e^{ikx_2}$$

führt mit Randwerten

$$\psi_\Gamma^N(x_2) = -\frac{1}{2k^2} e^{ikx_2}.$$

Die Abbildung von Randwerten für ω auf Randwerte von ψ für eine Fehlermode $\omega(x_1, x_2) := e^{-kx_1} \cdot e^{ikx_2}$ läßt sich durch folgende Tabelle zusammenfassen, die die jeweiligen Koeffizienten der zugehörigen Rand-Fouriermode e^{ikx_2} angibt:

Fehler		Residuum	
ω_Γ	ω_n	ψ_n^D	ψ_Γ^N
1	k	$\frac{1}{2k}$	$-\frac{1}{2k^2}$

Zur Konstruktion eines Iterationsverfahrens der oben beschriebenen Art ist folgendes zu tun: Man wählt aus der linken Hälfte der Tabelle, was als Eingabedaten verwendet werden soll — also Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen für das harmonische ω — und aus der rechten Hälfte ein Maß für das Residuum — hierdurch ist dann auch festgelegt, welche Randbedingungen beim Lösen von $\Delta\psi = \omega$ vorzuschreiben sind.

Leider ist es hier nicht wie in der Formulierung in primitiven Variablen möglich, Eingabedaten und Residuum direkt so zu wählen, daß sie in einem von k unabhängigen Verhältnis stehen. Zur effizienten Bestimmung von Randwerten von k ist also ein Vorkonditionierer notwendig, der die Umkehrung des Randoperators möglichst gut approximiert. Wir diskutieren dies für drei Fälle, nämlich den Paaren $(\omega_\Gamma, \psi_n^D)$, $(\omega_\Gamma, \psi_\Gamma^N)$ und (ω_n, ψ_n^D).

Die Abbildung $\omega_\Gamma \mapsto \psi_n^D$ hat im Fourierraum das Symbol $1/(2k)$, der Vorkonditionierer sollte mithin das Symbol $2k$ haben. Wie sich aus der linken Hälfte der obigen Tabelle ablesen läßt, kann man ihn berechnen, indem man eine zusätzliche Laplacegleichung mit Dirichlet-Randbedingungen löst und die Normalableitung berechnet (und mit 2 multipliziert). Dies führt auf die Vorkonditionierung aus [Dean, Glowinski und Pironneau 1991] für die Methode aus [Glowinski und Pironneau 1979]. Sie hat den Vorteil, daß sowohl der Randoperator als auch der Vorkonditionierer auch bei allgemeinen Gebieten symmetrisch sind, erfordert aber eben das Lösen einer zusätzlichen Laplacegleichung.

In den beiden anderen Fällen ist das Vorkonditionieren einfacher, da hier ein Operator mit Symbol $\pm 2k^2$ gesucht ist, der als echter Differentialoperator $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ realisiert werden kann, wobei $\frac{\partial}{\partial t}$ die Ableitung tangential zum Rand bezeichnet. Konkret gilt:

$$\omega_n = -2\frac{\partial^3 \psi^D}{\partial x_2^2 \partial n}$$

und

$$\omega_\Gamma = 2\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x_2^2}.$$

In allen drei Fällen erhält man für die Halbebene ein direktes Verfahren, weil der Vorkonditionierer das Inverse des Randoperators ist, mithin alle Fehlermoden in einem Schritt eliminiert werden.

Für den diskreten Fall lassen sich die Rechnungen aus Kapitel 4.3 übertragen: wir betrachten wieder ein regelmäßiges Gitter der Maschenweite h auf der Halbebene, $k \in \mathbb{N}$, μ, η aus (4.3), (4.4) und eine diskret harmonische Fehlermode

$$\omega(x_1, x_2) = \eta^{-kx_1} e^{ikx_2}.$$

Löst man die diskrete Poissongleichung $\Delta^h \psi = \omega$ mit homogenen Dirichlet- (für ψ^D) oder Neumann- (für ψ^N) Randbedingungen, ergibt sich auf dem Rand folgendes für die Koeffizienten von e^{ikx_2}:

Fehler		Residuum	
ω_Γ	ω_n	ψ_n^D	ψ_Γ^N
1	$\frac{\eta^{kh} - \eta^{-kh}}{2h}$	$\frac{h}{2} \cdot \frac{\eta^{kh} + \eta^{-kh}}{\eta^{kh} - \eta^{-kh}}$	$-h^2 \frac{\eta^{kh} + \eta^{-kh}}{(\eta^{kh} - \eta^{-kh})^2}$

Alle Normalableitungen wurden dabei mit zentralen Differenzen diskretisiert. Wegen

$$\lim_{kh\to 0}\left(\eta^{kh}-\eta^{-kh}\right)=2kh$$

und

$$\lim_{kh\to 0}\left(\eta^{kh}+\eta^{-kh}\right)=2$$

ergeben sich im Grenzwert für niedrige Frequenzen bzw. feine Gitter die Verhältnisse des kontinuierlichen Falls.

Überträgt man die Vorkonditionierung, d.h. das Anwenden des eindimensionalen Laplace-Operators auf das Residuum auf den diskreten Fall, ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^h}{\partial x_2}\right)^2 \psi_n^D = -\frac{1}{2}\cdot\lambda(k\cdot h)\cdot\omega_n \tag{5.8}$$

und

$$\left(\frac{\partial^h}{\partial x_2}\right)^2 \psi_\Gamma^N = \frac{1}{2}\cdot\lambda(k\cdot h)\cdot\omega_\Gamma \tag{5.9}$$

mit

$$\lambda(k\cdot h):=1+\frac{\mu k^2h^2}{\mu k^2h^2+4}. \tag{5.10}$$

Auf dem Intervall $[0,\pi]$, also für alle auf dem h-Gitter darstellbaren Moden, ist λ monoton steigend mit $\lim_{kh\to 0}\lambda(kh)=1$ und $\lim_{kh\to\pi}\lambda(kh)=3/2$. Das bedeutet, daß für ein Verfahren, das etwa aus dem Fehler ψ_Γ^N den Randwert ω_Γ für eine Korrektur mit dem Differenzenstern

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\psi_\Gamma^N = 2\omega_\Gamma \tag{5.11}$$

bestimmt, die Kondition (im Fall der Halbebene) für alle Maschenweiten durch 3/2 beschränkt ist.

Durch Anwenden geeigneter Differenzensterne auf die Randfunktionen läßt sich die Abhängigkeit von k und h in (5.8) und (5.9) ganz kompensieren, so daß man auch im diskretisierten System einen direkten Löser für das Problem auf der Halbebene erhält. Wir zeigen dies am Beispiel von (5.9): der Nenner aus (5.10) wird eliminiert, indem auf beide Seiten von (5.9) der Differenzenoperator $(4-h^2(\partial^h/\partial x_2)^2)$ mit dem Symbol μk^2h^2+4 angewendet wird, es gilt für jede Mode

$$\begin{aligned}\left(4-h^2\left(\frac{\partial^h}{\partial x_2}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^h}{\partial x_2}\right)^2\psi_\Gamma^N &= \frac{1}{2}(2\mu k^2h^2+4)\omega_\Gamma \\ &= \left(2-h^2\left(\frac{\partial^h}{\partial x_2}\right)^2\right)\omega_\Gamma,\end{aligned}$$

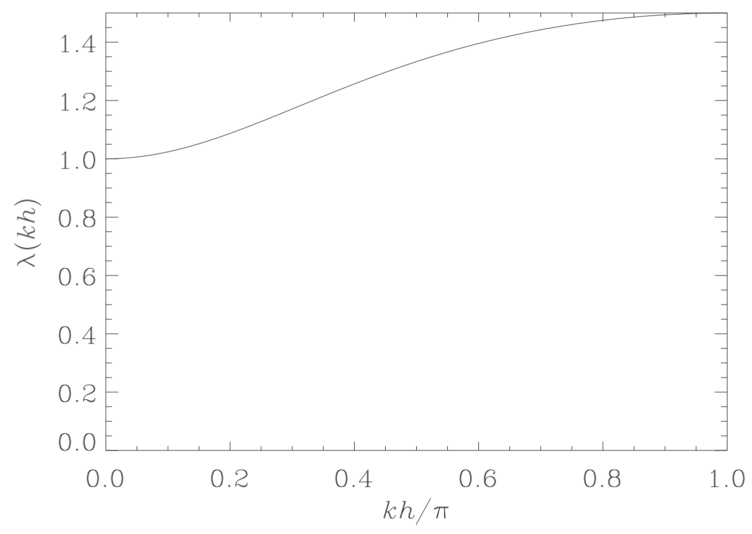


Abbildung 21: „Diskretisierungsfehler" λ des diskreten Vorkonditionierers für die Halbebene.

bzw. als Differenzenstern für die Randpunkte:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -14 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}\psi_\Gamma^N = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}\omega_\Gamma. \tag{5.12}$$

Man erhält also einen von k und h unabhängigen Zusammenhang zwischen dem Residuum und dem Fehler, den man als Randbedingung für eine Korrekturrichtung von ω interpretieren kann, die zwar einerseits komplizierter ist als die aus (5.11), andererseits aber im Fall der Halbebene alle Fehlermoden in einem Schritt eliminiert.

Als Anwendung hiervon betrachten wir ein Kanalgebiet, dargestellt durch einen Streifen $(0,1)\times\mathbb{R}$, und berechnen in x_2-Richtung 1-periodische Lösungen, indem das Quadrat mit entsprechenden Randbedingungen ausgestattet wird (s. Abbildung 22).

Als Eigenfunktionen des Randoperators, also der Abbildung der rechten Seite der Randbedingungen (5.11) bzw. (5.12) auf die jeweilige linke Seite, erhält man Paare von Eigenfunktionen, die auf dem Kanalrand $x_1 = 0$ wieder von der Form e^{ikx_2} und zur Kanalachse $x_1 = 1/2$ symmetrisch bzw. antisymmetrisch sind.

Die zugehörigen Eigenwerte (Tabelle 2 und Abbildung 23) weichen nur für die ganz niederfrequenten Moden leicht von denen der Halbebene ab — die höherfrequenten Fehlermoden fallen mit wachsendem Abstand von der Wand zu schnell ab, als daß der Einfluß der gegenüberliegenden Wand deutlich würde.

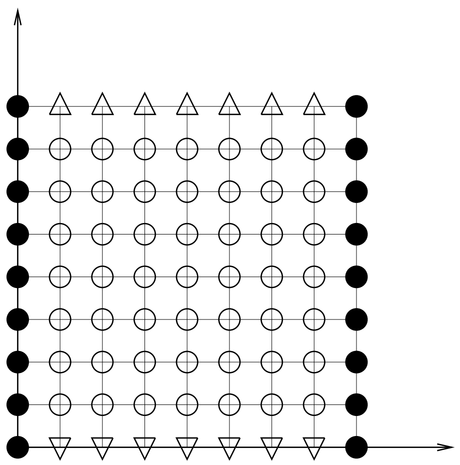


Abbildung 22: Das Berechnungsgbiet für periodische Lösungen auf dem Streifen. Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen für ψ in den Punkten $\bullet$; innere Punkte $\circ$; die Punkte $\triangle$ und $\triangledown$ werden paarweise miteinander identifiziert.

Rand-Bedingung	Eigenfunktion zur Kanalachse	$k/(2\pi)$			
		1	2	3	4
(5.11)	symmetrisch	1.0259	1.0096	1.0211	1.0367
	antisymmetrisch	0.9789	1.0094	1.0211	1.0367
(5.12)	symmetrisch	1.0235	$1 + 9.0 \times 10^{-5}$	$1 + 2.7 \times 10^{-7}$	$1 + 7.9 \times 10^{-10}$
	antisymmetrisch	0.9765	$1 - 9.0 \times 10^{-5}$	$1 - 2.7 \times 10^{-7}$	$1 - 7.9 \times 10^{-10}$

Tabelle 2: Eigenwerte zu den niederfrequenten Eigenschwingungen des Randoperators (vgl. Abbildung 23).

Man erhält mit den beiden Varianten (5.11) und (5.12) der Randbedingung ein gut konditioniertes Problem, mit der Randbedingung (5.12) jedoch läßt sich für fast alle Fehlermoden eine nahezu exakte Korrekturrichtung berechnen.

Die zum effizienten Lösen notwendige Geometrieinformation — d.h. der Unterschied des Spektums für periodische Lösungen auf dem Streifen zu dem auf der Halbebene — läßt sich also wieder auf einem Teilraum sehr kleiner Dimension beschreiben. Dieser wird hier von den Randmoden mit kleinsten Frequenzen aufgespannt, die die Periodizitätsbedingung noch erfüllen.

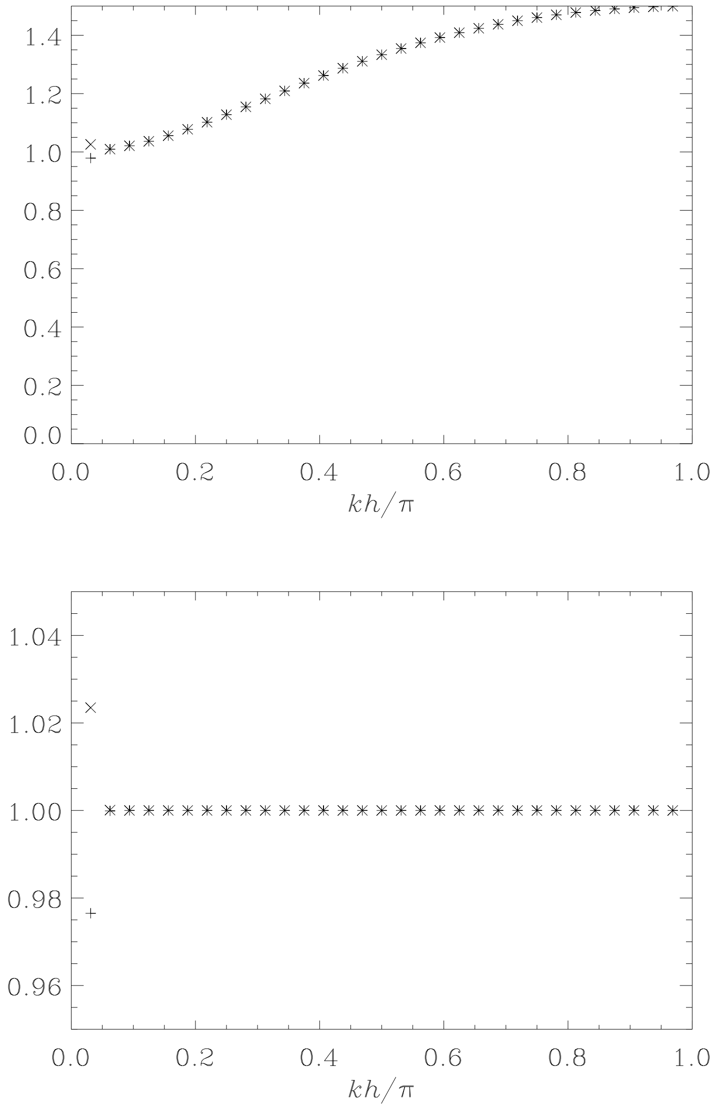


Abbildung 23: Eigenwerte des Randproblems für den Kanal mit Randbedingungen (5.11), oben, bzw. (5.12). Die zugehörigen Eigenfunktionen haben Randwerte der Form e^{ikx_2} für $x_1 = 0$ und sind zur Kanalachse $x_1 = 1/2$ symmetrisch ($\times$) bzw. antisymmetrisch ($+$), $h = 1/64$.

6 Ausblick

Wir haben gezeigt, wie sich die zum Lösen der Schurkomplementgleichung der zweidimensionalen Stokes-Gleichung relevante gebietsabhängige Information sehr kompakt beschreiben läßt — als Randoperator oder sogar nur mit Punktblocksystemen für die Eckpunkte. Damit lassen sich Verfahren angeben, mit denen Standardverfahren zum Lösen der Poissongleichung effizient für das gekoppelte System verwendet werden können.

Dieses Verfahren ist nicht prinzipiell nur auf zweidimensionale Probleme beschränkt: für die dreidimensionale Stokes-Gleichung funktioniert die Reduktion auf harmonische Funktionen bzw. deren Randwerte ebenfalls. Auch die Analyse für die Halbebene (Kapitel 3.4), die dort gezeigt hat, daß das Uzawa-Verfahren zum direkten Löser entartet, läßt sich direkt auf den Halbraum $\{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$ übertragen: für eine harmonische Fehlermode

$$p(x_1, x_2, x_3) := e^{-\sqrt{k_2^2+k_3^2}x_1} e^{ik_2x_2} e^{ik_3x_3}, \quad k_2, k_3 \in \mathbb{N},$$

ergibt sich aus der Impulsgleichung $\Delta u = \operatorname{grad} p$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} x_1 \cdot p(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -ik_2/\sqrt{k_2^2 + k_3^2} \\ -ik_3/\sqrt{k_2^2 + k_3^2} \end{pmatrix}$$

mit der Divergenz

$$\operatorname{div} u = \frac{1}{2} p.$$

Auch hier lassen sich alle Fehlermoden mit einem Uzawa-Schritt gleichzeitig eliminieren; man kann erwarten, daß sich dieses Ergebnis wieder auf die ebenen Teilstücke der Berandung eines Polyeders übertragen läßt. Die Störungen, die jetzt von Kanten und Eckpunkten ausgehen, sollten sich wieder mit relativ wenigen Parametern beschreiben lassen.

Zurück zum zweidimensionalen Fall: der Zusatzaufwand für die Methode mit Eck-Punktblocksystemen besteht im wesentlichen im Aufstellen der $8k \times 8k$-Koeffizientenmatrix, da hierzu für die Ansatzfunktionen das Schurkomplement ausgewertet werden muß, also Poissongleichungen für das Gesamtgebiet zu lösen sind. Dieser Aufwand sollte sich noch verringern lassen, indem man nur eine Näherung des Schurkomplements anwendet, die ausnutzt, daß alle vorkommenden Funktionen im Gebietsinnern sehr glatt sind und sich deswegen auf einem zu den Ecken hin extrem verfeinerten Gitter mit nur $O(k^2)$ statt $O(4^k)$ Gitterpunkten, wie etwa dem aus Abbildung 24, gut approximieren lassen. Man hätte dann zusätzlich zu dem Gitter, auf dem die Lösung bestimmt werden soll, ein Hilfsgitter mit einer Zahl von Unbekannten, die nur logarithmisch mit der Dimension des Gesamtproblems wächst. Die Fehlermoden, die die Konvergenzrate des Uzawa-Verfahrens dominieren, sollten sich damit aber effizient dämpfen lassen; dieses

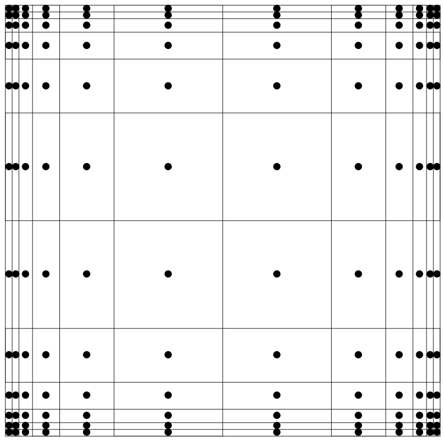


Abbildung 24: Gitter zur näherungsweisen Berechnung der Punktblock-Koeffizientenmatrix

Gitter würde ausreichen, um die Geometrie des Gebietes — bzw. die durch sie verursachte Abweichung des Verhaltens des Schurkomplements von dem auf der Halbebene — hinreichend genau zu beschreiben.

Neben der Beschreibung der Geometrieabhängigkeit erscheinen solche Hilfsgitter auch als geeigneter Zugang für effiziente Löser für die vollen Navier-Stokes-Gleichungen. Diese entziehen sich, auch nach Linearisierung, der direkten Behandlung nach dem bisherigen Schema dadurch, daß der Operator A in der Impulsgleichung ortsabhängig und somit nicht mehr mit dem Divergenzoperator vertauschbar ist. Man erhält daher nur noch Hilfsoperatoren $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ mit $\tilde{A}B \approx \tilde{B}A$ und in der Hilfsgleichung (2.5) $\tilde{B}B^*p = \tilde{B}f_u - \tilde{A}f_p$ tritt eine von u abhängige rechte Seite auf:

$$\tilde{B}B^*p = \tilde{B}f_u - \tilde{A}f_p - (\tilde{B}A - \tilde{A}B)u,$$

es findet also eine Rückkopplung auch im Innern des Gebietes statt. Diese sollte sich aber auf einem Gitter hinreichend genau beschreiben lassen, dessen Maschenweite nur von der Größe dieser Störung abhängt — im Fall der Navier-Stokes-Gleichung von der Konvektionsdominanz, also indirekt von der Reynoldszahl — und nicht von der Genauigkeit, mit der die Lösung bestimmt werden soll, also von der Maschenweite des Ausgangsgitters. Die zum Lösen des linearen Gleichungssystems notwendige Information wäre dann auf zwei Hilfsgittern beschrieben: je eines für die Geometrieinformation und für die Rückkopplung im Gebietsinnern.

Dies wäre ein sehr problemangepaßtes Lösungsverfahren: die Schwierigkeiten, die die Kosten des Iterationsverfahrens bestimmen, werden auf ihren Ursprung im zugrundeliegenden Problem zurückgeführt und auf geeigneten Gittern getrennt behandelt.

Literaturverzeichnis

Arrow, K. J., Hurwicz, L. und Uzawa, H. [1958]. *Studies in Nonlinear Programming*. Stanford University Press.

Bank, R. [1994]. *PLTMG: A Software Package for Solving Elliptic Partial Differential Equations, User's Guide 7.0*. SIAM.

Barrett, R., Berry, M., Chan, T. F., et al. [1993]. *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM. In Netlib erhältlich unter `/netlib/templates/templates.ps`.

Bramble, J. H. und Pasciak, J. E. [1994]. Iterative techniques for time dependent Stokes problems. Bericht BNL-49970, Brookhaven National Laboratory.

Brandt, A. [1984]. Multigrid techniques: 1984 guide with applications to fluid dynamics. Bericht Nr. 85, GMD Bonn.

Cahouet, J. und Chabard, J.-P. [1988]. Some fast 3D finite element solvers for the generalized Stokes problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, *8*, 869–895.

Dean, E. J., Glowinski, R. und Pironneau, O. [1991]. Iterative solution of the stream function-vorticity formulation of the Stokes problem, applications to the numerical simulation of incompressible viscous flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *87*, 117–155.

Elman, H. [1994]. Multigrid and Krylov subspace methods for the discrete Stokes equations. Bericht CS-TR-3302, UMIACS-TR-94-76, University of Maryland.

Elman, H. und Silvester, D. [1994]. Fast nonsymmetric iterations and preconditioning for Navier-Stokes equations. Bericht CS-TR-3283, UMIACS CS-TR-94-66, University of Maryland.

Fortin, M. und Glowinski, R. [1983]. *Augmented Lagrangian Methods: Application to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 15. North-Holland.

Gaultier, M. und Lezaun, M. [1992]. Quelques propriétés du spectre de l'opérateur $-\mathrm{div}(-\Delta)^{-1}\mathrm{grad}$ dans $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I Math.*, *315*, 799–802.

George, A. [1973]. Nested dissection of a regular finite element mesh. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *10*(2), 345–363.

Girault, V. und Raviart, P.-A. [1986]. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*. Series in computational mathematics, Vol. 5. Springer.

Glowinski, R. und Pironneau, O. [1979]. Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem. *SIAM Review*, *21*(2), 167–212.

Glowinski, R. [1984]. *Numerical methods for nonlinear variational problems*. Springer series in computational physics. Springer.

Goubet, O. [1994]. Study of the Uzawa operator for the channel flow problem. *Applicable Analysis*, *55*, 135–258.

Griebel, M. [1993]. Grid- and point-oriented multilevel algorithms. In Hackbusch, W. und Wittum, G.(Hrsg.), *Incomplete Decompositions (ILU) — Algorithms, Theory and Applications. Proceedings of the Eighth GAMM-Seminar Kiel, 24.–26. 1. 1992*, S. 31–46. Vieweg.

Griebel, M. [1995]. Parallel domain-oriented multilevel methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *16*(5), 1105–1125.

Griebel, M., Dornseifer, T. und Neunhoeffer, T. [1995]. *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik*. Vieweg.

Griebel, M. und Neunhoeffer, T. [1994]. A domain-oriented multilevel algorithm — Implementation and parallelization. Bericht SFB 342/18/94A, Institut für Informatik, TU München.

Griebel, M. und Neunhoeffer, T. [1996]. Parallel point- and domain-oriented multilevel methods for elliptic PDEs on workstation networks. Erscheint im Journal of Computational and Applied Mathematics.

Griebel, M., Zenger, C. und Zimmer, S. [1993]. Multilevel Gauss-Seidel-algorithms for full and sparse grid problems. *Computing*, *50*, 127–148.

Griebel, M. und Zimmer, S. [1993]. Adaptive point block methods. In Hackbusch, W. und Wittum, G.(Hrsg.), *Adaptive Methods — Algorithms, Theory and Applications. Proceedings of the Ninth GAMM-Seminar Kiel, 22.–24. 1. 1993*, S. 142–157. Vieweg.

Habashi, W.(Hrsg.). [1995]. *Solution Techniques for Large-Scale CFD Problems*. J. Wiley & Sons.

Hackbusch, W. [1980]. *Multi-Grid Methods and Applications*. Springer.

Hackbusch, W. [1986]. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner.

Hackbusch, W. [1991]. *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme.* Teubner.

Harlow, F. H. und Welch, J. E. [1965]. Numerical computations of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, *8*(12), 2182–2189.

Hoppenstedt, W.(Hrsg.). [1995]. *Löwenzähnchen am Bachesrand — Aphorismen von Christoph Zenger*. Texte, die die Wissenschaft nicht braucht, Bd. 1. Müller-Lüdenscheid Publishing Company.

Kleiser, L. und Schumann, U. [1980]. Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical spectral simulations of plane channel flows. In Hirschel, E. H.(Hrsg.), *Proceedings of the Third GAMM-Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Köln 10.–12. 10. 1979*, S. 165–173. Vieweg.

Kleiser, L. und Schumann, U. [1984]. Spectral simulation of the laminar-turbulent transition process in plane Poiseuille flow. In Voigt, R. G., Gottlieb, D. und Hussaini, M. Y.(Hrsg.), *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, S. 141–162. SIAM.

Kratz, W. und Peyerimhoff, A. [1990]. A numerical algorithm for the Stokes problem based on an integral equation for the pressure via conformal mappings. *Numerische Mathematik*, *58*, 255–272.

Kratz, W. und Peyerimhoff, A. [1993]. On the representation of Stokes flows and a solution of the inhomogeneous Stokes equations in the plane. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *180*, 109–116.

Kratz, W. [1991]. On the representation of Stokes flows. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, *22*(2), 414–423.

Langer, U. und Queck, W. [1987]. Preconditioned Uzawa-type iterative methods for solving mixed finite element equations. Bericht 3/1987, Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Universität Karl-Marx-Stadt.

Maday, Y., Meiron, D., Patera, A. T. und Rønquist, E. M. [1993]. Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes problem: Application to spectral element discretizations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *14*(2), 310–337.

Mitchell, W. F. [1992]. Optimal multilevel iterative methods for adaptive grids. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, *13*(1).

Nečas, J. [1965]. *Equations aux dérivées partielles.* Presse de l' Université de Montréal.

Quartapelle, L. [1993]. *Numerical Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations*. Birkhäuser.

Roache, P. J. [1976]. *Computational Fluid Mechanics*. Hermosa Publishers, Albuquerque.

Rudin, W. [1987]. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.

Schumann, U. [1984]. Discrete finite difference Stokes solver. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik ZAMM*, *64*, T227–T229.

Temam, R. [1984]. *Navier-Stokes Equations*. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2. North-Holland.

Zienkiewicz, O. C. [1984]. Coupled problems and their numeircal solution. In Lewis, R. W., Bettess, P. und Hinton, E.(Hrsg.), *Numerical methods in Coupled Systems*. J. Wiley & Sons.